УДК 534.1:539.3 **DOI: 10.20998/2222-0631.2021.02.09**

В. П. ОЛЬШАНСЬКИЙ, С. В. ОЛЬШАНСЬКИЙ

ПРО АПРОКСИМАЦІЇ ПЕРІОДИЧНИХ АТЕВ-ФУНКЦІЙ

Запропоновано два варіанти апроксимаційних формул для періодичних Ateb-синуса і Ateb-косинуса в першій чверті їх періоду. Перший варіант – це наближення типу Паде, які одержано ітераційним способом при побудові аналітичного розв'язку відповідного інтегрального рівняння зі згортанням степеневого ряду в замкнену суму за формулою Шенкса. Розглянуто два ітераційних наближення. Перше більш компактне, але має гіршу точність, що понижується із збільшенням значення аргументу. Щоб усунути цей недолік, додатково запропоновано гібридну апроксимацію, де обчислення значень Ateb-функцій на початку (для косинуса) і в кінці (для синуса) чверті їх періоду має проводитись за окремою формулою, що була одержана раніше асимптотичним методом. Порівняльний аналіз наближених і точних значень спеціальних функцій показав, що похибка запропонованих апроксимацій є меншою за один відсоток. Другий варіант наближення – це заміна періодичних Ateb-функцій тригонометричними функціями окремих аргументів, вибраних так, щоб значення спеціальних функцій були точними в деяких точках чверті періоду. В роботі виділено п'ять таких точок колокації. Для реалізації цього варіанту апроксимації складено окрему таблицю значень періодичних Ateb-функцій в точках колокації. Наведено приклади розрахунків, де показано, що і другий варіант апроксимації дає гарну точність наближеного обчислення значень спеціальних функцій.

Ключові слова: Ateb-синус, Ateb-косинус, два способи апроксимації, наближення елементарними функціями, точки колокації.

В. П. ОЛЬШАНСКИЙ, С. В. ОЛЬШАНСКИЙ

О АППРОКСИМАЦИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ АТЕВ-ФУНКЦИЙ

Предложены два варианта аппроксимационных формул для периодических Ateb-синуса и Ateb-косинуса в первой четверти их периода. Первый вариант – это приближение типа Паде, которые получены итерационным способом при построении аналитического решения соответствующего интегрального уравнения со свёртыванием степенного ряда в замкнутую сумму по формуле Шенкса. Рассмотрены два итерационных приближения. Первое более компактное, но имеет худшую точность, которая понижается с увеличением значения аргумента. Чтобы устранить этот недостаток, дополнительно предложена гибридная аппроксимация, где вычисление значений Ateb-функций в начале (для косинуса) и в конце (для синуса) четверти периода должно проводиться по отдельной формуле, которая была получена ранее асимптотическим методом. Сравнительный анализ приближённых и точных значений специальных функций показал, что погрешность предложенных аппроксимаций меньше одного процента. Второй вариант приближения – это замена периодических Ateb-функций тригонометрическими отдельных аргументов, выбранных так, чтобы значения специальных функций были точными в определённых точках четверти периода. В работе получены пять таких точек коллокации. Для реализации этого варианта аппроксимации составлена отдельная таблица значений периодических Ateb-функций в точках коллокации. Приведены примеры расчётов, в которых показано, что и второй вариант аппроксимации даёт хорошую точность приближённых значений специальных функций.

Ключевые слова: Ateb-синус, Ateb-косинус, два способа аппроксимации, приближение элементарными функциями, точки коллокации.

V. P. OLSHANSKIY, S. V. OLSHANSKIY

ON APPROXIMATION OF PERIODIC ATEB-FUNCTIONS

Two versions of approximation formulae for periodic Ateb-sine and Ateb-cosine in the first quarter of their common period are proposed. The first version is a Pade type approximation derived when constructing analytical solution of corresponding integral equation by iteration method with transforming the power series into a closed sum by Shanks' formula. Two iteration approximations are considered. The first one is more concise but of worse approximation accuracy which deteriorates with increasing the argument value. To improve the approximation accuracy a hybrid approximation is proposed when the values of the Ateb-functions in the beginning (for the cosine) and in the end (for the sine) of the quarter period are computed by a separate formula obtained a priory by the asymptotic method. The comparison analysis of the approximate and exact values of the special functions indicates the error of the approximation proposed to be less than one per cent. The second variant of approximation is by replacing the periodic Ateb-functions by trigonometric functions of specific argument. The arguments are chosen so that the values of the special functions are exact at specific points of the quarter period. Five such collocation points are introduced in the paper. To implement this version of approximation a separate table of the values of the periodic Ateb-functions at the collocation points is compiled. The computational examples presented in the paper show the approximate values of the special functions obtained by the second version of approximation to have a good accuracy.

Key words: Ateb-sine, Ateb-cosine, computing values, two approximation versions, approximating by elementary functions, collocation points.

Вступ. *Періодичні Ateb-функції* систематично використовують при розв'язанні різних задач в теорії нелінійних механічних коливань, як вітчизняні [1 – 4], так і закордонні вчені [5, 6], а також вони стали зручним засобом при захисті інформації [7, 8]. Останнім часом їх задіяли і при розв'язанні задач *квазістатичного удару* твердих тіл [9, 10, 11]. Але на думку автора [12] широке розповсюдження Ateb-функцій в інженерних розрахунках стримує відсутність вивчення цих функцій у загальнотехнічних курсах вузів і відсутність зручних формул для їх обчислення, хоча питання наближених обчислень названих функцій неодноразово піднімали в науковій літературі. До цього в [7] запропоновано використовувати *ряд Фур'є*, а в [13] – *ряд Маклорена*. Зазначимо, що коефіцієнти тригонометричного ряду виражаються через інтеграли від цих функцій і їх визначення складає певні незручності. В роботах [5, 6] періодичний *Ateb-косинус* апроксимують натуральним логарифмом з *гіперболічного косинуса*, але точність такого компактного наближення не висока. Тому не можна вважати вичерпаним питання числової реалізації розв'язків в Ateb-функціях.

Метою статті є виведення компактних формул для наближеного обчислення значень періодичних Ateb-функцій.

Основні результати. Розглянемо два варіанти апроксимацій, про які не йшлося в вище згаданих публікаціях. Перший варіант – це *апроксимації типу Паде*, а другий – це наближення зведенням Ateb-функцій до *тригонометричних функцій спеціального аргументу*.

Зазначимо, що Ateb-косинус $x(t) = Ca\left(\nu, 1; \frac{1+\nu}{2}t\right)$ і *Ateb-синус* $x(t) = Sa\left(\nu, 1; \frac{1+\nu}{2}t\right)$ є розв'язками диференціального рівняння:

$$\ddot{x} + \frac{1+\nu}{2}x^{\nu} = 0\,, \tag{1}$$

у якому $\nu \geq 0$, крапка над x означає похідну по t.

Перша з Ateb-функцій задовольняє початковим умовам: $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0$, а друга – $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1$.

Ці *задачі Коші* з високою точністю можна розв'язувати *чисельними методами* на комп'ютері. Тому встановлення похибок апроксимацій не викликає труднощів.

Між функціями виконуються співвідношення:

$$Ca\left(\nu, 1; \frac{1+\nu}{2}t\right) = Sa\left(\nu, 1; \frac{1+\nu}{2}(\mathrm{I} - t)\right), \tag{2}$$

де

$$\mathrm{I} = \frac{\sqrt{\pi}}{\nu+1}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\nu+1}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu+3}{2\nu+2}\right)},$$

$\Gamma(x)$ – *Гама-функція*, затабульована в [14].

Отже, для наближеного обчислення значень функцій в першій чверті їх періоду $t \in [0; \mathrm{I}]$ достатньо мати апроксимацію однієї з них.

Апроксимації типу Паде. Апроксимації типу Паде одержимо для $Sa\left(\nu, 1; \frac{1+\nu}{2}t\right)$. Для цього замінимо диференціальне рівняння (1) на інтегральне:

$$x(t) = t - \frac{1+\nu}{2}\int_0^t\int_0^{t_1} x^{\nu}(t_2)\,dt_2 dt_1\,, \tag{3}$$

де враховано вказані вище початкові умови.

Далі замість (3) використаємо ітераційне співвідношення:

$$x_n(t) = t - \frac{1+\nu}{2}\int_0^t\int_0^{t_1} x_{n-1}^{\nu}(t_2)\,dt_2 dt_1, \quad n = 1, 2, 3, \ldots\,. \tag{4}$$

Покладемо в ньому $x_0(t) = 0$. Тоді $x_1(t) = t$ і наступна ітерація дає:

$$x_2(t) = t - \frac{1}{2}\frac{t^{\nu+2}}{\nu+2}\,.$$

Найбільше значення $\mathrm{I} = 2$ чвертьперіод має при $\nu = 0$. Тому на проміжку апроксимації $t \in [0; \mathrm{I}]$ при $2^{\nu} < \nu + 2$, коли $\nu \in [0, 2)$, збігається *біноміальний ряд*:

$$x_2^{\nu}(t) = t^{\nu}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{t^{\nu+1}}{\nu+2}\right)^{\nu} = t^{\nu} - \frac{\nu}{2}\frac{t^{2\nu+1}}{\nu+2} + \frac{\nu(\nu-1)}{8}\frac{t^{3\nu+2}}{(\nu+2)^2} - \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{48}\frac{t^{4\nu+3}}{(\nu+2)^3} + \ldots\,. \tag{5}$$

Зазначимо, що ряд (5) можна використовувати і при більших ν, бо збільшення ν супроводжується зменшенням I. Наприклад, при $\nu = 2$, $\mathrm{I} \approx 1{,}40216$ і $\mathrm{I}^2 = 1{,}96605 < 4$.

Підстановка ряду (5) в (4) приводить до третього наближення:

$$x_3(t) = t - \frac{t^{\nu+2}}{2(\nu+2)} + \frac{\nu t^{2\nu+3}}{8(\nu+2)(2\nu+3)} - \frac{\nu(\nu-1)}{48}\frac{t^{3\nu+4}}{(\nu+2)^2(3\nu+4)} + \ldots\,. \tag{6}$$

Щоб надати йому згорнуту форму, використаємо *формулу Шенкса*, що наближено виражає суму ряду і має вигляд [11, 15]:

$$S \approx S_n - \frac{a_n a_{n+1}}{a_{n+1} - a_n}\,. \tag{7}$$

Тут S_n – сума n перших членів ряду; a_n і a_{n+1} – відповідно, його n – й і $(n+1)$ – й члени.

Приймемо в (6):

$$S_n = t - \frac{t^{\nu+2}}{2(\nu+2)};\ \ a_n = -\frac{t^{\nu+2}}{2(\nu+2)};\ \ a_{n+1} = \frac{\nu t^{2\nu+3}}{8(\nu+2)(2\nu+3)}$$

і підставимо в (7). Тоді:

$$x_3(t) \approx S = t - \frac{t^{\nu+2}}{2(\nu+2)} + \frac{\nu t^{2\nu+3}}{8(\nu+2)\left(2\nu+3+\frac{\nu}{4}t^{\nu+1}\right)}.$$

Після подальших перетворень отримуємо формулу апроксимації Ateb-синусу:

$$Sa\left(\nu, 1; \frac{1+\nu}{2}t\right) \approx x_3(t) \approx t - \frac{2(2\nu+3)t^{\nu+2}}{(\nu+2)\left[4(2\nu+3)+\nu t^{\nu+1}\right]}. \tag{8}$$

Для апроксимації Ateb-косинусу аналогічне наближення має вигляд:

$$Ca\left(\nu, 1; \frac{1+\nu}{2}t\right) \approx \mathrm{I} - t - \frac{2(2\nu+3)(\mathrm{I}-t)^{\nu+2}}{(\nu+2)\left[4(2\nu+3)+\nu(\mathrm{I}-t)^{\nu+1}\right]}. \tag{9}$$

Зазначимо, що при $\nu = 5/3$ формула (8) переходить у виведену раніше в [16], при наближеному розв'язанні інтегрального рівняння пружного удару твердих тіл. При $\nu = 3/2$ формула (8) дає залежність, одержану раніше в [17].

У випадку $\nu = 0$ формули (8) і (9) є точними, бо:

$$Sa\left(0, 1; \frac{1}{2}t\right) = t - \frac{t^2}{4};\ \ Ca\left(0, 1; \frac{1}{2}t\right) = 1 - \frac{t^2}{4}. \tag{10}$$

Для інших ν точність наближень (8) і (9) можна дещо підвищити, якщо врахувати результати роботи [18] і перейти до гібридного варіанту апроксимації:

$$Sa\left(\nu, 1; \frac{1+\nu}{2}t\right) \approx \begin{cases} t - \dfrac{2(2\nu+3)t^{\nu+2}}{(\nu+2)\left[4(2\nu+3)+\nu t^{\nu+1}\right]} & \text{при } 0 \le t \le 0{,}6\cdot\mathrm{I}; \\ 1 - \dfrac{2}{\nu}\sin^2\left[\dfrac{\sqrt{\nu(\nu+1)}}{2\sqrt{2}}(\mathrm{I}-t)\right] & \text{при } 0{,}6\cdot\mathrm{I} \le t \le \mathrm{I}, \end{cases} \tag{11}$$

$$Ca\left(\nu, 1; \frac{1+\nu}{2}t\right) \approx \begin{cases} 1 - \dfrac{2}{\nu}\sin^2\left(\dfrac{\sqrt{\nu(\nu+1)}}{2\sqrt{2}}t\right) & \text{при } 0 \le t \le 0{,}4\cdot\mathrm{I}; \\ \mathrm{I} - t - \dfrac{2(2\nu+3)(\mathrm{I}-t)^{\nu+2}}{(\nu+2)\left[4(2\nu+3)+\nu(\mathrm{I}-t)^{\nu+1}\right]} & \text{при } 0{,}4\cdot\mathrm{I} \le t \le \mathrm{I}. \end{cases} \tag{12}$$

Тут, при $\nu = 1$, $\mathrm{I} = \pi/2$, вирази з квадратом синуса є точними формулами, бо:

$$Sa(1, 1; t) = \sin t,\ \ Ca(1, 1; t) = \cos t.$$

Вони також точні при $\nu = 0$, $\mathrm{I} = 2$, бо:

$$\lim_{\nu\to 0}\frac{2}{\nu}\sin^2\left[\frac{\sqrt{\nu(\nu+1)}}{2\sqrt{2}}(2-t)\right] = \frac{(2-t)^2}{4};\ \ \lim_{\nu\to 0}\frac{2}{\nu}\sin^2\left(\frac{\sqrt{\nu(\nu+1)}}{2\sqrt{2}}t\right) = \frac{t^2}{4}.$$

Другий шлях уточнення формул (8) і (9) – це подальше проведення ітерацій. Скористаємося ним. Подамо (8) у вигляді:

$$x_3(t) = t\left(1 - \frac{a t^{\nu+1}}{1 + b t^{\nu+1}}\right),$$

де $a = \dfrac{1}{2(\nu+2)}$; $b = \dfrac{\nu}{4(2\nu+3)}$.

Тоді можна знову скористатися біноміальним рядом і записати наближення:

$$x_3^{\nu}(t) = t^{\nu} - \nu a t^{2\nu+1} + \nu a\left(b + \frac{\nu-1}{2}a\right)t^{3\nu+2} - \ldots .$$

Підстановка його в (4) дає четверту ітерацію:

$$x_4(t) \approx t - \frac{t^{\nu+2}}{2(2+\nu)} + \frac{\nu a t^{2\nu+3}}{4(2\nu+3)} - \frac{\nu a\left(b + \frac{\nu-1}{2}a\right)t^{3\nu+4}}{6(3\nu+4)} + \dots .$$

Приймемо далі:

$$S_n = t - \frac{t^{\nu+2}}{2(2+\nu)} + \frac{\nu a t^{2\nu+3}}{4(2\nu+3)}; \quad a_n = \frac{\nu a t^{2\nu+3}}{4(2\nu+3)}; \quad a_{n+1} = -\frac{\nu a\left(b + \frac{\nu-1}{2}a\right)t^{3\nu+4}}{6(3\nu+4)}$$

і підставимо в (7). Це дає наступну формулу апроксимації Ateb-синуса:

$$Sa\left(\nu, 1; \frac{1+\nu}{2}t\right) \approx x_4(t) \approx t - \frac{t^{\nu+2}}{2(2+\nu)} + \frac{\nu t^{2\nu+3}}{4(2\nu+3)\left[2(\nu+2) + \frac{\nu^2+\nu-1}{3\nu+4}t^{\nu+1}\right]}. \qquad (13)$$

Вона більш громіздка, ніж (8), але має вищу точність.

Аналогічне наближення Ateb-косинуса має вигляд:

$$Ca\left(\nu, 1; \frac{1+\nu}{2}t\right) \approx \mathrm{I} - t - \frac{(\mathrm{I}-t)^{\nu+2}}{2(2+\nu)} + \frac{\nu(\mathrm{I}-t)^{2\nu+3}}{4(2\nu+3)\left[2(\nu+2) + \frac{\nu^2+\nu-1}{3\nu+4}(\mathrm{I}-t)^{\nu+1}\right]}. \qquad (14)$$

Його точність така, як і формули (13).

При $\nu = 0$ формули (13), (14) є точними і переходять в (10).

Інформацію про похибки наближень (8), (11) і (13) при обчисленні Ateb-синуса з різними індексами ν подано в табл. 1, де умовно точні значення спеціальної функції отримані чисельним інтегруванням диференціального рівняння (1) на комп'ютері.

Таблиця 1 – Наближені та точні значення Ateb-синуса

t/I	Формула (8)	Формула (11)	Формула (13)	Чисельне інтегрування
	Значення $10Sa\left(\nu, 1; \frac{1+\nu}{2}t\right)$			
при $\nu = 0{,}5$				
0,25	4,069	4,069	4,070	4,070
0,50	7,276	7,276	7,277	7,277
0,75	9,296	9,307	9,307	9,307
1,00	9,951	10,000	9,999	10,000
при $\nu = 1$				
0,25	3,827	3,827	3,827	3,827
0,50	7,071	7,071	7,071	7,071
0,75	9,233	9,239	9,239	9,239
1,00	9,958	10,000	10,001	10,000
при $\nu = 1{,}5$				
0,25	3,636	3,636	3,636	3,636
0,50	6,884	6,884	6,884	6,884
0,75	9,169	9,172	9,172	9,172
1,00	9,972	10,000	10,001	10,000
при $\nu = 2$				
0,25	3,487	3,487	3,487	3,487
0,50	6,716	6,716	6,716	6,716
0,75	9,105	9,106	9,106	9,106
1,00	9,985	10,000	10,001	10,000
при $\nu = 3$				
0,25	3,274	3,274	3,274	3,274
0,50	6,436	6,436	6,436	6,436
0,75	8,980	8,982	8,980	8,980
1,00	10,002	10,000	10,000	10,000
при $\nu = 4$				
0,25	3,134	3,134	3,134	3,134
0,50	6,218	6,218	6,218	6,218
0,75	8,863	8,869	8,863	8,863
1,00	10,012	10,000	9,999	10,000

Розрахунки показують, що всі три варіанти апроксимації дають задовільні результати, а кращу точність серед них мають формули (13), (14).

Апроксимація переходом до тригонометричних функцій спеціального аргументу. Такий вид апроксимації пропонують в [19] для обчислення значень еліптичних синуса і косинуса. Тут цю ідею переносимо на випадок періодичних Ateb-функцій. Для наближеного обчислення значень Ateb-синуса в першій чверті його періоду $t \in [0; \mathrm{I}]$ пропонуємо формулу:

$$Sa\left(\nu, 1; \frac{1+\nu}{2}t\right) \approx \sin\left(\frac{\pi t}{2\mathrm{I}} + A\sin\frac{\pi t}{\mathrm{I}} + B\sin\frac{2\pi t}{\mathrm{I}} + C\sin\frac{3\pi t}{\mathrm{I}}\right), \tag{15}$$

в якій A, B, C – сталі множники. Для їх визначення перепишемо (15) у вигляді:

$$A\sin\frac{\pi t}{\mathrm{I}} + B\sin\frac{2\pi t}{\mathrm{I}} + C\sin\frac{3\pi t}{\mathrm{I}} \approx \arcsin\left[Sa\left(\nu, 1; \frac{1+\nu}{2}t\right)\right] - \frac{\pi t}{2\mathrm{I}}. \tag{16}$$

Спираючись на метод колокацій, поставимо умову, щоб рівність (16) виконувалась точно при $t = \mathrm{I}/4;\ \mathrm{I}/2;\ 3\mathrm{I}/4$. Це приводить до системи алгебраїчних рівнянь:

$$A\sin\frac{\pi}{4} + B\sin\frac{\pi}{2} + C\sin\frac{3\pi}{4} = \arcsin\left[Sa\left(\nu, 1; \frac{1+\nu}{2}\frac{\mathrm{I}}{4}\right)\right] - \frac{\pi}{8};$$

$$A\sin\frac{\pi}{2} + B\sin\pi + C\sin\frac{3\pi}{2} = \arcsin\left[Sa\left(\nu, 1; \frac{1+\nu}{2}\frac{\mathrm{I}}{2}\right)\right] - \frac{\pi}{4};$$

$$A\sin\frac{3\pi}{4} + B\sin\frac{3\pi}{2} + C\sin\frac{9\pi}{4} = \arcsin\left[Sa\left(\nu, 1; \frac{1+\nu}{2}\frac{3\mathrm{I}}{4}\right)\right] - \frac{3\pi}{8}.$$

Розв’язок системи виражається аналітично:

$$B = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\left[\arcsin\left(Sa\left(\nu, 1; \frac{1+\nu}{2}\frac{\mathrm{I}}{4}\right)\right) - \arcsin\left(Sa\left(\nu, 1; \frac{1+\nu}{2}\frac{3\mathrm{I}}{4}\right)\right)\right]; \quad A = D + E; \quad C = D - E, \tag{17}$$

причому:

$$D = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\arcsin\left(Sa\left(\nu, 1; \frac{1+\nu}{2}\frac{\mathrm{I}}{4}\right)\right) + \arcsin\left(Sa\left(\nu, 1; \frac{1+\nu}{2}\frac{3\mathrm{I}}{4}\right)\right) - \frac{\pi}{2}\right]; \quad E = \frac{1}{2}\left[\arcsin\left(Sa\left(\nu, 1; \frac{1+\nu}{2}\frac{\mathrm{I}}{2}\right)\right) - \frac{\pi}{4}\right].$$

Щоб використати формули (17) для обчислення констант A, B, C, треба мати значення Ateb-синуса при $t = \mathrm{I}/4;\ t = \mathrm{I}/2$ і $t = 3\mathrm{I}/4$.

Ці значення для окремих ν записано до табл. 2, що спрощує реалізацію апроксимації (15). Для значень ν, яких немає в табл. 2, треба проводити лінійну інтерполяцію табличних даних.

Таблиця 2 – Значення Ateb-синуса $Sa\left(\nu, 1; \frac{1+\nu}{2}t\right)$ при $t = 0{,}25\mathrm{I};\ 0{,}5\mathrm{I};\ 0{,}75\mathrm{I}$

ν	I	$10Sa\left(\nu, 1; \frac{1+\nu}{2}\frac{\mathrm{I}}{4}\right)$	$10Sa\left(\nu, 1; \frac{1+\nu}{2}\frac{\mathrm{I}}{2}\right)$	$10Sa\left(\nu, 1; \frac{1+\nu}{2}\frac{3\mathrm{I}}{4}\right)$
0,0	2,00000	4,375	7,500	9,375
0,1	1,92856	4,309	7,454	9,361
0,2	1,86709	4,245	7,409	9,348
0,3	1,81356	4,184	7,365	9,334
0,4	1,76649	4,126	7,321	9,321
0,5	1,72475	4,070	7,277	**9,307**
0,6	1,68745	4,017	7,235	9,293
0,7	1,65390	3,966	7,193	9,280
0,8	1,62357	3,917	7,151	9,266
0,9	1,59599	3,871	7,111	9,252
1,0	1,57079	3,827	7,071	**9,239**
1,1	1,54770	3,785	7,032	9,225
1,2	1,52641	3,745	6,994	9,212
1,3	1,50679	3,707	6,956	9,198
1,4	1,48857	3,671	6,920	9,185
1,5	1,47165	3,636	6,884	**9,172**
1,6	1,45586	3,603	6,849	9,158
1,7	1,44114	3,572	6,815	9,145
1,8	1,42734	3,542	6,781	9,132
1,9	1,41436	3,514	6,748	9,119

Продовження таблиці 2

2,0	1,40216	3,487	6,716	**9,106**
2,1	1,39069	3,461	6,685	9,094
2,2	1,37987	3,436	6,654	9,080
2,3	1,36962	3,412	6,625	9,067
2,4	1,35994	3,390	6,596	9,055
2,5	1,35074	3,368	6,567	9,042
2,6	1,34201	3,348	6,540	9,029
2,7	1,33369	3,328	6,513	9,017
2,8	1,32575	3,309	6,486	9,004
2,9	1,31820	3,291	6,461	8,992
3,0	1,31102	3,274	6,436	**8,980**
3,1	1,30416	3,257	6,412	8,968
3,2	1,29759	3,241	6,388	8,956
3,3	1,29130	3,226	6,365	8,944
3,4	1,28525	3,211	6,342	8,932
3,5	1,27944	3,197	6,320	8,920
3,6	1,27391	3,183	6,299	8,909
3,7	1,26857	3,170	6,278	8,897
3,8	1,26343	3,157	6,258	8,886
3,9	1,25846	3,145	6,238	8,874
4,0	1,25372	3,134	6,218	**8,863**

Враховуючи (2), із (15) одержуємо формулу апроксимації Ateb-косинуса:

$$Ca\left(\nu, 1; \frac{1+\nu}{2}t\right) \approx \cos\left(\frac{\pi t}{2\mathrm{I}} - A\sin\frac{\pi t}{\mathrm{I}} + B\sin\frac{2\pi t}{\mathrm{I}} - C\sin\frac{3\pi t}{\mathrm{I}}\right). \tag{18}$$

Вона має таку ж точність, як і (15).

У випадку $\nu = 1$ формули(15) і (18) є точними, бо $A = B = C = 0$, $\mathrm{I} = \pi / 2$.

Щоб з'ясувати похибки наближень (15) і (18), розглянемо два приклади. Порівняння наближених і точних результатів проводимо посередині між вузлами інтерполяції, а саме при $t = 0{,}375\mathrm{I}$, $t = 0{,}625\mathrm{I}$ і $t = 0{,}875\mathrm{I}$. Приймемо $\nu = 0{,}5$. Використовуючи значення Ateb-синуса, записані в табл. 1, за формулами (17) одержуємо $A = 0{,}030584$, $B = 0{,}004122$, $C = 0{,}001019$. Підставивши ці значення констант в (15), проводимо подальше обчислення Ateb-синуса в контрольних точках. Отримуємо результати і записуємо їх до табл. 3.

У другому прикладі покладемо $\nu = 2$ і підставимо відповідні значення Ateb-синуса з табл. 1 в формулу (17). Одержуємо:

$$A = -0{,}049222;\ B = -0{,}001576;\ C = -0{,}000190.$$

Задавши ці значення констант в формулу (15), проводимо обчислення спеціальної функції в контрольних точках. Одержані результати представимо в табл. 4.

Таблиця 3 – Значення $Sa(0{,}5; 1; 0{,}75t)$, обчислені трьома способами

$\frac{t}{\mathrm{I}}$	Формула (15)	Формула (13)	Чисельне інтегрування
	$10Sa(0{,}5; 1; 0{,}75t)$		
0,375	5,809	5,806	5,806
0,625	8,451	8,452	8,452
0,875	9,826	9,825	9,826

Таблиця 4 – Значення $Sa(2; 1; 1{,}5t)$, обчислені трьома способами

$\frac{t}{\mathrm{I}}$	Формула (15)	Формула (13)	Чисельне інтегрування
	$10Sa(2; 1; 1{,}5t)$		
0,375	5,163	5,166	5,164
0,625	8,061	8,060	8,060
0,875	9,771	9,772	9,771

Розрахунки показують, що похибки порівняних варіантів апроксимації майже однакові. Вони забезпечують точність в три значущі цифри після коми, але точність апроксимації типу Паде буде кращою при малих ν, бо при $\nu = 0$ її апроксимаційні формули становляться точними, що відзначалось раніше.

В роботах [5, 6] для обчислення Ateb-косинуса використовують формулу:

$$Ca\left(\nu, 1; \frac{1+\nu}{2}t\right) \approx 1 - \frac{2}{1+\nu}\ln\left[\mathrm{ch}\left(\frac{1+\nu}{2}t\right)\right]. \tag{19}$$

Для аналізу її точності проведено обчислення значень вказаної функції при $\nu = 0{,}5$ і різних t. Результати обчислень записано до табл. 5.

Таблиця 5 – Значення $Ca(0,5;1;0,75t)$, одержані чотирма способами

$\frac{t}{\mathrm{I}}$	Формула (14)	Формула (18)	Формула (19)	Чисельне інтегрування
	$10Ca(0,5;1;0,75t)$			
0,375	8,452	8,451	8,489	8,452
0,625	5,806	5,809	6,048	5,806
0,875	2,113	2,103	2,832	2,113

Як бачимо, точність апроксимації (19) невисока, вона значно гірша, ніж точність запропонованих тут формул.

Перспективи подальших досліджень. Вище йшлося про наближене обчислення значень періодичних Ateb-функцій. Але на практиці, крім них, поширені також неперіодичні Ateb-функції [13]. Тому виведення формул для наближеного їх обчислення складає подальшу перспективу.

Висновки. Реалізовано два варіанти апроксимації періодичних Ateb-функцій в першій чверті їх періоду. Виведено та перевірено розрахунками апроксимаційні формули. Показано, що вони забезпечують точність в три значущі цифри після коми і можуть бути використані при числовій реалізації аналітичних розв'язків різних прикладних задач, пов'язаних з періодичними Ateb-функціями.

Список літератури

1. *Сокіл Б. І.* Про застосування Ateb-функцій для побудови розв'язків деяких рівнянь, які описують нелінійні коливання одновимірних середовищ // Доповіді Національної академії наук України. – Київ, 1997. – № 1. – С. 55 – 58.
2. *Сокіл Б. І.*, *Ліщинська Х. І.* Асимптотичний метод і періодичні Ateb-функції у дослідженнях коливних процесів рухомих нелінійно пружних одновимірних систем // Вісник національного університету «Львівська політехніка». Серія : Динаміка, міцність і проектування машин і приладів. – Львів : Видавництво Львівської політехніки, 2006. – № 556. – С. 57 – 64.
3. *Pukach P. Ya.*, *Kuzio I. V.* Resonance phenomena in quasi-zero stiffness vibration isolation system // Naukovyi Visnyk Natsionalnoho Hirnychoho Universytetu. – 2015. – Issue 3. P. 62 – 67.
4. *Pukach P. Ya.* Investigation of bending vibration in Voigt – Kelvin bars with regard for nonlinear resistance forse // Journal of Mathematical Sciences. – 2016. – Vol. 215. – Issue 1. – P. 71 – 78.
5. *Gendelman O.*, *Vakakis A. F.* Transition from localization in strongly nonlinear damped oscillators // Chaos, Solitons and Fractals. – 2000. – Vol. 1. – No. 10. – P. 1535 – 1542.
6. *Cveticanin L.*, *Podany T.* Oscillator with a Sum of Nonintegor – Order Nonlinearities // Hindawi Publishing Corporation. Journal of Applied Mathematics. – 2012. – Articl ID 649050. – 20 p.
7. *Дронюк І. М.*, *Назаркевич М. А.*, *Тхір В. І.* Обчислення результатів моделювання Ateb-функціями захисту інформації // Вісник національного університету «Львівська політехніка». Комп'ютерні науки та інформаційні технології. – Львів : Видавництво Львівської політехніки, 2010. – № 686. – С. 121 – 126.
8. *Грицик В. В.*, *Назаркевич І. М.* Документально захищені інформаційні технології засобами Ateb-функцій // Проблеми управління і автоматики. – 2009. – № 2. – С. 139 – 152.
9. *Ольшанський В. П.*, *Ольшанський С. В.* Ateb-синус у розв'язку задачі Герца про удар // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2018. – № 3 (1279). – С. 98 – 103.
10. *Ol'shanskii V.*, *Spol'nik O.*, *Slipchenko M.*, *Znaidiuk V.* Modeling the elastic impact of a body with a special point at its surface // Eastern – European Journal of Enterprise Technologies. – 2019. – Vol. 1/7 (97). – P. 25 – 32.
11. *Olshanskiy V.*, *Burlaka V.*, *Slipchenko M.* Solution of the equation of force of impact of solids expressed by the Ateb-sine // Ukrainian Journal of Mechanical Engineering and Materials Science. – 2019. – Vol. 5. – No. 2. – P. 53 – 60.
12. *Cveticanin L.* A review on dynamics of mass variable system // Journal of the Serbian Society for Computation Machanics. – 2012. – Vol. 6. – No. 1. – P. 56 – 74.
13. *Грицик В. В.*, *Назаркевич М. А.* Математичні моделі алгоритмів і реалізація Ateb-функцій // Доповіді Національної академії наук України. – Київ, 2007. – № 12. – С. 37 – 42.
14. *Абрамовиц М.*, *Стиган И.* Справочник по специальным функциям (с формулами, графиками и математическими таблицами). – М. : Наука, 1979. – 832 с.
15. *Кильчевский Н. А.* Динамическое контактное сжатие твердых тел. Удар. – Киев : Наукова думка, 1976. – 319 с.
16. *Ольшанський В. П.* Найближчий розв'язок інтегрального рівняння удару тіл з сингулярною точкою на поверхні контакту // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2019. – № 22 (1347). – С. 62 – 67.
17. *Ольшанський В. П.* Порівняння наближених розв'язків інтегрального рівняння сили удару тіл в теорії Герца // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2019. – № 8 (1333). – С. 244 – 249.
18. *Ольшанський В. П.*, *Ольшанський С. В.* Про рух осцилятора зі степеневою характеристикою пружності // Вібрації в техніці та технологіях. Всеукраїнський науково-технічний журнал. – Вінниця, 2017. – № 3 (86). – С. 34 – 40.
19. *Ольшанский В. П.*, *Ольшанский С. В.* Аналітичний розв'язок задачі пружного удару конуса по півпростору // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Динаміка і міцність машин. – Харків : НТУ «ХПІ», 2019. – № 1. – С. 40 – 45.

References (transliterated)

1. Sokil B. I. Pro zastosuvannya Ateb-funktsiy dlya pobudovy rozv''yazkiv deyakykh rivnyan', yaki opysuyut' neliniyni kolyvannya odnovymirnykh seredovyshh [On application of Ateb-functions for constructing solutions to some equations describing nonlinear oscillations of one-dimensional media]. *Dopovidi Natsional'noyi akademiyi nauk Ukrayiny* [Reports of the National Academy of science of Ukraine]. 1997, no. 1, pp. 55–58.
2. Sokil B. I., Lishhyns'ka Kh. I. Asymptotychnyy metod i periodychni Ateb-funktsiyi u doslidzhennyakh kolyvnykh protsesiv rukhomykh neliniyno pruzhnykh odnovymirnykh system [Asymptotic methods and periodic Ateb-functions in studying vibration processes of mobile nonlinearly elastic

one dimensional systems]. *Visnyk natsional'nogo universytetu "L'vivs'ka politekhnika". Seriya : Dynamika, mitsnist' i proektuvannya mashyn i pryladiv* [Bulletin of the National University «Lviv Polytechnic». Series: Dynamics, strength and development of machines and devises]. Lviv, Vydavnytstvo L'vivs'koyi politekhniky Publ., 2006, no. 556, pp. 57–64.

3. Pukach P. Ya., Kuzio I. V. Resonance phenomena in quasi-zero stiffness vibration isolation system. *Naukovyi Visnyk Natsionalnoho Hirnychoho Universytetu*. 2015, issue 3, pp. 62–67.

4. Pukach P. Ya. Investigation of bending vibration in Voigt – Kelvin bars with regard for nonlinear resistance force. *Journal of Mathematical Sciences.* 2016, vol. 215, issue 1, pp. 71–78.

5. Gendelman O., Vakakis A. F. Transition from localization in strongly nonlinear damped oscillators. *Chaos*, *Solitons and Fractals*. 2000, vol. 1, no. 10, pp. 1535–1542.

6. Cveticanin L., Podany T. Oscillator with a Sum of Nonintegor – Order Nonlinearities. *Hindawi Publishing Corporation*. *Journal of Applied Mathematics*. 2012, Articl ID 649050, 20 p.

7. Dronyuk I. M., Nazarkevych M. A., Tkhir V. I. Obchyslennya rezul'tativ modelyuvannya Ateb-funktsiyamy zakhystu informatsiyi [Computing results of modeling information protection by Ateb-functions]. *Visnyk natsional'nogo universytetu "L'vivs'ka politekhnika". Komp"yuterni nauky ta informatsiyni tekhnologiyi* [Bulletin of the National University «Lviv Polytechnic». Series: Computer sciences and information technologies]. Lviv, Vydavnytstvo L'vivs'koyi politekhniky Publ., 2010, no. 686, pp. 121–126.

8. Grytsyk V. V., Nazarkevych I. M. Dokumental'no zakhyshheni informatsiyni tekhnologiyi zasobamy Ateb-funktsiy [Secured information technologies by means of Ateb-functions]. *Problemy upravlinnya i avtomatyky* [Problems of control and automation]. 2009, no. 2, pp. 139–152.

9. Ol'shans'kiy V. P., Ol'shans'kiy S. V. Ateb-synus u rozv"yazku zadachi Gertsa pro udar [Ateb–sine in the solution of Hertz's problem of impact]. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya : Matematichne modelyuvannya v tekhnstsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of the NTU "KhPI". Series: Mathematical modeling in engineering and technology]. Kharkov, NTU «KhPI» Publ., 2018, no. 3 (1279), pp. 98–103.

10. Ol'shanskii V., Spol'nik O., Slipchenko M., Znaidiuk V. Modeling the elastic impact of a body with a special point at its surface. *Eastern – European Journal of Enterprise Technologies.* 2019, vol. 1/7 (97), pp. 25–32.

11. Olshanskiy V., Burlaka V., Slipchenko M. Solution of the equation of force of impact of solids expressed by the Ateb-sine. *Ukrainian Journal of Mechanical Engineering and Materials Science.* 2019, vol. 5, no. 2, pp. 53–60.

12. Cveticanin L. A review on dynamics of mass variable system. *Journal of the Serbian Society for Computation Mechanics*. 2012, vol. 6, no. 1, pp. 56–74.

13. Grytsyk V. V., Nazarkevych M. A. Matematychni modeli algorytmiv i realizatsiya Ateb-funktsiy [Mathematical models of algorithms and implementation of Ateb-functions]. *Dopovidi Natsional'noyi akademiyi nauk Ukrayiny* [Reports of the National Academy of science of Ukraine]. 2007, no. 12, pp. 37–42.

14. Abramovits M., Stigan I. *Spravochnik po spetsial'nym funktsiyam (s formulami*, *grafikami i matematicheskimi tablitsami)* [Handbook of special functions (with formulas, graphs and mathematical tables)]. Moscow, Nauka Publ., 1979. 832 p.

15. Kil'chevskiy N. A. *Dinamicheskoe kontaktnoe szhatie tverdyih tel. Udar* [Dynamic contact compression of solids. Blow]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 1976, 319 p.

16. Ol'shans'kyy V. P. Nablyzhenyy rozv"yazok integral'nogo rivnyannya udaru til z syngulyarnoyu tochkoyu na poverkhni kontaktu [Approximate solution of the integral equation of body shock with a singular point on the surface of the contact]. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya : Matematichne modelyuvannya v tekhnstsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of the NTU "KhPI". Series: Mathematical modeling in engineering and technology]. Kharkov, NTU «KhPI» Publ., 2019, no. 22 (1347), pp. 62–67.

17. Ol'shans'kyy V. P. Porivnyannya nablyzhenykh rozv"yazkiv integral'nogo rivnyannya syly udaru til v teoriyi Gertsa [Comparison of approximate solutions to impact strength integral equation in the framework of Hertz theory]. *Visnyk Natsional'noho tekhnichnoho universytetu «KhPI». Seriya : Matematichne modelyuvannya v tekhnstsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series : Mathematical modeling in engineering and technology]. Kharkov, NTU «KhPI» Publ., 2019, no. 8 (1333), pp. 244–249.

18. Ol'shans'kyy V. P., Ol'shans'kyy S. V. Pro rukh ostsylyatora zi stepenevoyu kharakterystykoyu pruzhnosti [On the movement of an oscillator with power elasticity characteristic]. *Vibratsiyi v tekhnitsi ta tekhnologiyakh. Vseykrayins'kyy naukovo-tekhnichnyy zhurnal* [Vibrations in technic and technologies. Pan-Ukrainian scientific and technical journal]. Vinnitsa, 2017, no. 3 (86), pp. 34–40.

19. Ol'shans'kyy V. P., Ol'shans'kyy S. V. Analitychnyy rozv"yazok zadachi pruzhnogo udaru konusa po pivprostoru [Analytic solution of the elastic impact problem for a cone over a half-space]. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya : Dynamika i mitsnist' mashyn* [Bulletin of the NTU "KhPI". Series : Dynamics and strength of machines]. Kharkov, NTU «KhPI» Publ., 2019, no. 1, pp. 40–45.

Надійшла (received) 19.02.2021

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Ольшанський Василь Павлович – доктор фізико-математичних наук, професор, Харківський національний технічний університет сільського господарства імені П. Василенка, м. Харків; тел.: (066) 010-09-55; e-mail: OlshanskiyVP@gmail.com.

Ольшанский Василий Павлович – доктор физико-математических наук, профессор, Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства имени П. Василенка, г. Харьков; тел.: (066) 010-09-55; e-mail: OlshanskiyVP@gmail.com.

Olshanskiy Vasiliy Pavlovich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Petro Vasylenko Kharkiv National Technical University of Agriculture, Kharkiv; tel.: (066) 010-09-55; e-mail: OlshanskiyVP@gmail.com.

Ольшанський Станіслав Васильович – кандидат фізико-математичних наук, Харківський національний технічний університет сільського господарства імені П. Василенка, м. Харків; тел.: (057) 343-29-41; e-mail: stasolsh77@gmail.com.

Ольшанский Станислав Васильевич – кандидат физико-математических наук, Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства имени П. Василенка, г. Харьков; тел.: (057) 343-29-41; e-mail: stasolsh77@gmail.com.

Olshanskiy Stanislav Vasilevich – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Petro Vasylenko Kharkiv National Technical University of Agriculture, Kharkiv; tel.: (057) 343-29-41; e-mail: stasolsh77@gmail.com.