

**Ю. І. ПЕРШИНА**

### **МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНОГО ТРИВИМІРНОГО ТІЛА З ВИКОРИСТАННЯМ ОПЕРАТОРІВ ІНТЕРФЛЕТАЦІЇ ТА МІШАНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ**

Розглядається задача відновлення внутрішньої структури (щільності, коефіцієнта поглинання або послаблення) тривимірного тіла за допомогою інформації про неї у вигляді томограм, що задані на деякій системі площин, які перетинають об'єкт дослідження. Ця задача виникає на практиці в тих випадках, коли серед площин, які входять в експериментальні дані, немає площини, що складається з того чи іншого набору точок, які цікавлять дослідника. Наприклад, така задача може виникнути після того, як пацієнт пройшов дослідження на медичному томографі. Після аналізу отриманих томограм виникає необхідність знайти за їх допомогою ще одну чи декілька томограм в площинах, які перетинають тіло та не співпадають з жодною із заданих площин. Зазначається, що оператори інтерфлетації функцій є природним узагальненням операторів інтерполяції функцій трьох змінних. Тому, як і у випадку інтерполяції, похибки в експериментальних даних (в даному випадку, в томограмах) привносяться також і в оператори інтерфлетації. В математиці існує альтернатива операторам інтерполяції – оператори апроксимації. Це оператори, що побудовані шляхом згладжування експериментальних даних за допомогою поліномів, раціональних функцій, тригонометричних поліномів, вейвлетів тощо. Будується оператор мішаної апроксимації функції трьох змінних за допомогою поліномів Бернштейна; наводиться загальний вигляд похибки наближення побудованим оператором та оцінка цієї похибки. Також в роботі будується та досліджується чотиривимірна математична модель тривимірного тіла, що змінюється з часом. Наводиться обчислювальний експеримент з відновлення внутрішньої структури серця людини за томограмами, що лежать на системі взаємно перпендикулярних площин, які поступають з реально діючого комп'ютерного томографа. В статті представлені деякі можливості роботи з томограмами при відновленні внутрішньої структури тривимірного тіла за відомими проекціями цього тіла (томограмами).

**Ключові слова:** томографія, мішана апроксимація, інтерфлетація, поліноми Бернштейна, динамічне моделювання, тривимірне моделювання.

**Ю. И. ПЕРШИНА**

### **МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОГО ТРЕХМЕРНОГО ТЕЛА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ОПЕРАТОРОВ ИНТЕРФЛЕТАЦИИ И СМЕШАННОЙ АПРОКСИМАЦИИ**

Рассматривается задача восстановления внутренней структуры (плотности, коэффициента поглощения или ослабления) трехмерного тела с помощью информации о ней в виде томограмм, заданных на некоторой системе плоскостей, пересекающих объект исследования. Эта задача возникает на практике в тех случаях, когда среди плоскостей, которые входят в экспериментальные данные, нет плоскости, которая состоит из того или иного набора точек, которые интересуют исследователя. Например, такая задача может возникнуть после того, как пациент прошел исследования на медицинском томографе. И после анализа полученных томограмм возникает необходимость найти с их помощью еще одну или несколько томограмм в плоскостях, пересекающих тело, но не совпадающих ни с одной из заданных плоскостей. Отмечается, что операторы интерфлетации функций являются естественным обобщением операторов интерполяции функций трех переменных. Поэтому, как и в случае интерполяции, погрешности в экспериментальных данных (в данном случае, в томограммах) привносятся также и в операторы интерфлетации. В математике существует альтернатива операторам интерполяции – операторы аппроксимации. Это операторы, построенные путем сглаживания экспериментальных данных с помощью полиномов, рациональных функций, тригонометрических полиномов, вейвлетов и тому подобное. Строится оператор смешанной аппроксимации функции трех переменных с помощью полиномов Бернштейна; приводится общий вид погрешности приближения построенным оператором и оценка этой погрешности. Также в работе строится и исследуется четырехмерная математическая модель трехмерного тела, меняющегося со временем. Приводится вычислительный эксперимент по восстановлению внутренней структуры сердца человека по томограммам, лежащим на системе взаимно перпендикулярных плоскостей, которые поступают из реально действующего компьютерного томографа. В статье представлены некоторые возможности работы с томограммами при восстановлении внутренней структуры трехмерного тела по известным проекциями этого тела (томограммам).

**Ключевые слова:** томография, смешанная аппроксимация, интерфлетация, полиномы Бернштейна, динамическое моделирование, трехмерное моделирование.

**I. I. PERSHYNA**

### **MODELING A DYNAMIC THREE-DIMENSIONAL BODY USING INTERFLATATION AND BLENDING APPROXIMATION**

The paper deals with the problem of reconstruction of the internal structure (density, absorption or attenuation coefficient) of a three-dimensional body by the information about it in the form of tomograms, given on a certain system of planes intersecting the object of study. This problem arises in practice in cases where there is no plane among the planes that are included in the experimental data, which consists of one or another set of points that are of interest to the researcher. For example, such a problem may arise after a patient has undergone examinations on a medical tomograph. After analyzing the obtained tomograms, it becomes necessary to find with their help one or more tomograms in the planes intersecting the body, but not coinciding with any of the given planes. It is noted that the operators of interflatation of functions is a natural generalization of the interpolation operators for the functions of three variables. Therefore, as in the case of interpolation, errors in the experimental data (in this case, in tomograms) are also introduced into the interflatation operators. In mathematics, there is an alternative to interpolation operators, namely approximation operators. These are operators constructed by smoothing experimental data using polynomials, rational functions, trigonometric polynomials, wavelets, and the like. An operator of mixed approximation of a function of three variables is constructed using Bernstein polynomials; the general form of the approximation error by the constructed operator and the estimate of this error are given. In the paper a four-dimensional mathematical model of a three-dimensional body that changes over time is also built and studied. A computational experiment is presented to restore the internal structure of the human heart from tomograms lying on a system of mutually perpendicular planes, which come from an actually operating computer tomograph. The article presents some possibilities of working with tomograms when restoring the internal structure of a three-dimensional body from the known projections of this body (tomograms).

**Key words:** tomography, blending approximation, interflatation, Bernstein polynomials, dynamic modeling, three-dimensional modeling.

**Вступ.** *Комп'ютерна томографія* виникла на стику декількох наукових дисциплін: математики, фізики та

медицини. Але своє практичне втілення вона змогла отримати лише завдяки появі та розвитку комп'ютерної техніки. Серед всіх існуючих томографічних методів особливого успіху досягла *радіаційна (рентгенівська) комп'ютерна томографія (КТ)*. Передумовою її появи послужили недоліки звичайної рентгенографії, що породили ідею отримання не одного, а ряду знімків, виконаних під різними ракурсами, і визначення по ним шляхом математичної обробки щільності досліджуваної речовини в ряді перетинів. Перевагами КТ у порівнянні з традиційною рентгенографією стали:

- відсутність тінювих накладень на зображенні;
- більш висока точність вимірювання геометричних співвідношень;
- чутливість на порядок вище, ніж при звичайній рентгенографії.

Двадцяте століття ознаменувалось інтенсивним розвитком і широким впровадженням одного з видатних досягнень людства – комп'ютерної томографії. Великий теоретичний вклад в розвиток радонівської комп'ютерної томографії зробив німецький вчений *Й. Радон* [1], який розвинув теорію перетворення функцій багатьох змінних (*перетворення Радона*). Згідно з цим перетворенням функцію багатьох змінних можна характеризувати не тільки її значеннями у точках багатовимірного простору, але також інтегралами від цієї функції, взятими по нескінченній сукупності ліній або площин. За останні десятиліття комп'ютерна томографія зробила потужні кроки у напрямку удосконалення алгоритмів, програмних засобів та апаратної реалізації.

Але практична реалізація томографічного методу ще далека від оптимальності, оскільки є недостатньо обґрунтованою доза опромінення томографа та наявність невластивих об'єкту артефактів на екранах дисплеїв при відновленні об'єкта у заданому перетині.

У практиці дослідження томографічних зображень часто виникає задача отримання зображення перетину тіла у тих площинах, для яких немає зображення, за відомими зображеннями у деякій сукупності перетинів. У попередніх роботах *О. М. Литвина* та *Ю. І. Перишиної* [2] розв'язувалася задача комп'ютерної томографії *методами інтерфлетатції функцій*.

Задача побудови математичних моделей динамічної внутрішньої структури тривимірних тіл належить до однієї з найбільш актуальних задач сучасності. Така задача виникає в різних областях науки та техніки, зокрема, в медичній практиці у випадку проведення декількох повторних досліджень пацієнта в різні моменти часу та необхідності аналізу на їх основі ефективності лікування. Таким чином, актуальною є розробка та дослідження методу розв'язання 3D задачі комп'ютерної томографії з використанням *операторів мішаної апроксимації* та *методу відновлення* динамічної внутрішньої структури тривимірного тіла, що змінюється з часом, за відомими її томограмами, що поступають з комп'ютерного томографа.

Особливо важливим є побудова чотиридимірних моделей на основі томографічних даних в різні моменти часу. Ця задача сама по собі є дуже складною у зв'язку з великими масивами інформації, яка використовується на кожному етапі часу, а також у зв'язку з обмеженнями на візуалізацію результатів відновлення в моменти часу, що не співпадають з моментами, для яких представлені експериментальні дані. Відмітимо, що функція чотирьох змінних може бути візуалізована тільки лише за своїми значеннями в окремих точках або графіком своїх слідів на окремих лініях чи поверхнях (зокрема, площинах).

В ряді випадків (наприклад, при дослідженні тривимірної моделі серця) необхідно враховувати, що повна зміна внутрішньої структури об'єкта здійснюється приблизно за одну секунду. Тому, якщо ми бажаємо отримати послідовність математичних моделей тривимірного тіла в різні моменти часу, то для кожного з цих моментів часу необхідно виконати великий об'єм роботи. Для ефективного дослідження змін за часом та, зокрема, для прогнозу, очевидно, необхідно аналітичне за  $t, x, y, z$  представлення внутрішньої структури тривимірного тіла.

Враховуючи викладене, актуальною являється задача побудови аналітичної чотиридимірної моделі внутрішньої структури тіла, яка змінюється з часом, на основі томограм в різні моменти часу.

**Аналіз останніх досліджень.** Загальний розв'язок задачі відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла за допомогою інформації про неї у вигляді томограм, заданих на системі трьох груп перетинних площин, в кожній з яких площини паралельні, був розроблений в роботах [3], [4]. Ця задача була розв'язана з використанням операторів інтерфлетатції функцій трьох змінних. Треба відмітити, що оператори інтерфлетатції функцій є природним узагальненням *операторів інтерполяції* функцій трьох змінних. Тому, як і у випадку інтерполяції, похибки в експериментальних даних (в даному випадку, в томограмах) привносяться також і в оператори інтерфлетатція. В математиці існує альтернатива операторам інтерполяції – *оператори апроксимації*. Це оператори, що побудовані шляхом згладжування експериментальних даних за допомогою *поліномів*, раціональних функцій, сплайнів, тригонометричних поліномів, вейвлетів.

В даній статті пропонується метод відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла. В методі проводиться згладжування експериментальних даних у вигляді томограм, заданих на системі взаємно перпендикулярних площин, за допомогою операторів мішаної апроксимації [5], [6].

В роботах [7], [8] викладені алгебраїчні та аналітичні методи відновлення динамічного тривимірного тіла при конусно-променевій томографії. В статті [9] автори представляють новий алгоритм відновлення в 4D комп'ютерній томографії, який використовує повторення анатомічних структур в різних місцях між сусідніми фазами дихання при віяльній схемі сканування. В даній роботі представляється метод відновлення динамічного ті-

ла при паралельній (найпростішій) схемі сканування.

**Математичне моделювання стаціонарної внутрішньої структури тривимірного тіла з використанням мішаної апроксимації поліномами Бернштейна.** Мішана апроксимація функцій  $n$  ( $n \geq 2$ ) змінних будується за допомогою операторів, кожен з яких діє на одну змінну, але не є оператором інтерполяції за цією змінною. Отримувані в результаті оператори апроксимації є значно точнішими порівняно з класичними операторами апроксимації.

Нехай  $f(x, y, z) \in C^{r_1, r_2, r_3}[D]$ ,  $D = [0, 1]^3$ ,  $r_i \geq 1$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Зафіксуємо три розбиття

$$\Delta n: 0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1; \quad \Delta m: 0 = y_0 < y_1 < \dots < y_m = 1; \quad \Delta s: 0 = z_0 < z_1 < \dots < z_s = 1$$

відрезка  $[0, 1]$ , якими задається розбиття  $\Delta_{nms}$  куба  $D$  на комірки

$$I_{k,l,p} = [x_{k-1}, x_k] \times [y_{l-1}, y_l] \times [z_{p-1}, z_p], \quad k = \overline{1, n}, \quad l = \overline{1, m}, \quad p = \overline{1, s}.$$

Оператори апроксимації будемо будувати у вигляді операторів класичної апроксимації

$$L_{nms} f(x, y, z) = L_1 L_n L_2 L_m L_3 f(x, y, z)$$

або у вигляді операторів мішаної апроксимації

$$O f(x, y, z) = (L_1 L_n + L_2 L_m + L_3 - L_1 L_n L_2 - L_1 L_n L_3 - L_2 L_m L_3 + L_1 L_n L_2 L_m L_3) f(x, y, z), \quad (1)$$

де  $L_1, L_2, L_3$  – оператори Фур'є, Фейєра, Валле-Пуссена, Бернштейна тощо, що діють на функцію  $f(x, y, z)$  як на функцію однієї змінної.

Оператори  $L_1 f(x, y, z)$ ,  $L_2 f(x, y, z)$ ,  $L_3 f(x, y, z)$  діють на функцію  $f(x, y, z)$  за змінними  $x, y, z$  відповідно.

**Лема.** Для похибки наближення  $R_{nms} f(x, y, z) = (I - L_{nms}) f(x, y, z)$  оператором класичної апроксимації справедлива рівність

$$R_{nms} f(x, y, z) = (r_1 L_n + r_2 L_m + r_3 - r_1 r_2 L_m - r_1 r_3 L_s - r_2 L_m L_3 + r_1 r_2 L_m L_3) f(x, y, z).$$

де  $r_1 = I - L_1$ ,  $r_2 = I - L_2$ ,  $r_3 = I - L_3$ ,  $I$  – тотожний оператор.

Доведення витікає з операторної тотожності

$$R_{nms} f(x, y, z) = ((I - L_1) + (I - L_2) + (I - L_3) - (I - L_1)(I - L_2) - (I - L_1)(I - L_3) - (I - L_2)(I - L_3) + (I - L_1)(I - L_2)(I - L_3)) f(x, y, z).$$

Лема доведена.

**Теорема 1.** Для похибки наближення  $Rf(x, y, z) = (I - O) f(x, y, z)$  оператором мішаної апроксимації справедлива операторна рівність

$$Rf(x, y, z) = r_1 r_2 r_3 f(x, y, z),$$

де  $r_1 = I - L_1$ ,  $r_2 = I - L_2$ ,  $r_3 = I - L_3$ ,  $I$  – тотожний оператор.

Доведення. Проведемо операторні перетворення

$$\begin{aligned} Rf(x, y, z) &= (I - O) f(x, y, z) = \\ &= (I - L_1 - L_2 - L_3 + L_1 L_2 + L_1 L_3 + L_2 L_3 - L_1 L_2 L_3) f(x, y, z) = \\ &= ((I - L_1) + (I - L_2) + (I - L_3) - (I - L_1 L_2) - (I - L_1 L_3) - (I - L_2 L_3) + \\ &+ (I - L_1 L_2 L_3)) f(x, y, z) = ((I - L_1) + (I - L_2) + (I - L_3) - (I - L_1) - (I - L_2) + (I - L_1)(I - L_2) - \\ &- (I - L_1) - (I - L_3) + (I - L_1)(I - L_3) - (I - L_2) - (I - L_3) + (I - L_2)(I - L_3) + \\ &+ (I - L_1) + (I - L_2) + (I - L_3) - (I - L_1)(I - L_2) - (I - L_1)(I - L_3) + \\ &- (I - L_2)(I - L_3) + (I - L_1)(I - L_2)(I - L_3)) f(x, y, z) = \\ &= (I - L_1)(I - L_2)(I - L_3) f(x, y, z) = r_1 r_2 r_3 f(x, y, z). \end{aligned}$$

Теорема 1 доведена.

Введемо до розгляду клас функцій

$$M^{r,r,r} = \left\{ f(x, y, z) \in C^{r,r,r}([0, 1]^3) : \max_{\substack{0 \leq y \leq 1 \\ 0 \leq z \leq 1}} \left\{ \int_0^1 |f^{(r,0,0)}(x, y, z)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \leq 1, \max_{\substack{0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq z \leq 1}} \left\{ \int_0^1 |f^{(0,r,0)}(x, y, z)|^p dy \right\}^{\frac{1}{p}} \leq 1, \right. \\ \left. \max_{\substack{0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1}} \left\{ \int_0^1 |f^{(0,0,r)}(x, y, z)|^p dz \right\}^{\frac{1}{p}} \leq 1, \max_{\substack{0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1}} \left\{ \int_0^1 \int_0^1 |f^{(r,r,0)}(x, y, z)|^p dx dy \right\}^{\frac{1}{p}} \leq 1, \max_{\substack{0 \leq y \leq 1 \\ 0 \leq z \leq 1}} \left\{ \int_0^1 \int_0^1 |f^{(r,0,r)}(x, y, z)|^p dx dz \right\}^{\frac{1}{p}} \leq 1, \right.$$

$$\max_{0 \leq x \leq 1} \left\{ \int_0^1 \int_0^1 |f^{(0,r,r)}(x, y, z)|^p dy dz \right\}^{\frac{1}{p}} \leq 1, \left\{ \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 |f^{(r,r,r)}(x, y, z)|^p dx dy dz \right\}^{\frac{1}{p}} \leq 1, \quad 1 \leq p < \infty;$$

$$M^{0,0} = \{g(x, y) \in C[0;1]^2 \mid \max_{(x,y) \in [0,1]^2} |g(x, y)| < \infty\}.$$

В роботі *Н. П. Корнейчука* [10] були наведені похибки наближення двовимірними сплайнами. Розповсюди-мо їх на тривимірний випадок.

**Теорема 2.** Нехай для залишків наближення лінійними операторами  $L_1, L_2, L_3$  можна написати інтегральні зображення

$$\begin{aligned} r1_n f(x, y, z) &= \int_0^1 G_1(x, u) f^{(p,0,0)}(u, y, z) du; \\ r2_m f(x, y, z) &= \int_0^1 G_2(y, v) f^{(0,q,0)}(x, v, z) dv; \\ r3_s f(x, y, z) &= \int_0^1 G_3(z, w) f^{(0,0,t)}(x, y, w) dw, \end{aligned} \quad (2)$$

де  $G_1(x, u), G_2(y, v), G_3(z, w) \in M^{0,0}$ . Тоді

$$\begin{aligned} R_{nms} f(x, y, z) &= f(x, y, z) - L_1 L_2 L_3 f(x, y, z) = \int_0^1 G_1(x, u) f^{(p,0,0)}(u, y, z) du + \\ &+ \int_0^1 G_2(y, v) f^{(0,q,0)}(x, v, z) dv + \int_0^1 G_3(z, w) f^{(0,0,t)}(x, y, w) dw - \\ &- \int_0^1 \int_0^1 G_1(x, u) G_2(y, v) f^{(p,q,0)}(u, v, z) dudv - \int_0^1 \int_0^1 G_1(x, u) G_3(z, w) f^{(p,0,t)}(u, y, w) dudw - \\ &- \int_0^1 \int_0^1 G_2(y, v) G_3(z, w) f^{(0,q,t)}(x, v, w) dvdw + \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 G_1(x, u) G_2(y, v) G_3(z, w) f^{(p,q,t)}(u, v, w) dudvdw. \end{aligned}$$

Доведення випливає з леми.

**Теорема 3.** Нехай  $1 \leq p < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ , тоді для оцінювання похибки наближення функції

$f(x, y, z) \in M^{r,r,r}$  оператором  $Of(x, y, z)$  виконується нерівність:

$$\begin{aligned} \|(I - O)f(x, y, z)\|_{L_\mu[0,1]^3} &= \|r1_n r2_m r3_s f\|_{L_\mu[0,1]^3} \leq \\ &\leq \|f^{(r,r,r)}\|_{L_p[0,1]^3} \|G_1(x, *)\|_{L_{p'}[0,1]} \|G_2(y, *)\|_{L_{p'}[0,1]} \|G_3(z, *)\|_{L_{p'}[0,1]} \\ &\quad \cdot \|G_1(x, *)\|_{L_\mu[0,1]} \cdot \|G_2(y, *)\|_{L_\mu[0,1]} \cdot \|G_3(z, *)\|_{L_\mu[0,1]}, \\ &\quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \quad 1 \leq \mu < \infty. \end{aligned}$$

Доведення. Користуючись (2), маємо:

$$\begin{aligned} |(I - O)f(x, y, z)| &= |r1_n r2_m r3_s f(x, y, z)| \leq \|G_1(x, *)\|_{L_{p'}[0,1]} \|G_2(y, *)\|_{L_{p'}[0,1]} \|G_3(z, *)\|_{L_{p'}[0,1]} \times \\ &\times \left[ \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 |f^{(r,r,r)}(u, v, w)|^p dudvdw \right]^{\frac{1}{p}}, \quad (x, y, z) \in [0,1]^3; \\ \sup_{f \in M^{r,r,r}} |(I - O)f(x, y, z)| &= \|G_1(x, *)\|_{L_{p'}[0,1]} \|G_2(y, *)\|_{L_{p'}[0,1]} \|G_3(z, *)\|_{L_{p'}[0,1]}. \end{aligned}$$

Тоді

$$\|(I - O)f(x, y, z)\|_{L_\mu[0,1]^3} \leq \left[ \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 |f^{(r,r,r)}(u, v, w)|^p dudvdw \right]^{\frac{1}{p}} \|G_1(x, *)\|_{L_{p'}[0,1]} \|G_2(y, *)\|_{L_{p'}[0,1]} \|G_3(z, *)\|_{L_{p'}[0,1]} \Big\|_{L_\mu[0,1]^3} =$$

$$\leq \|f^{(r,r,r)}\|_{L_p[0,1]^3} \| \|G_1(x, *)\|_{L_{p'}[0,1]} \| \|G_2(y, *)\|_{L_{p'}[0,1]} \| \|G_3(z, *)\|_{L_{p'}[0,1]} \|_{L_\mu[0,1]^3},$$

де

$$\|f\|_{L_p[0,1]^3} = \left\{ \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 |f(x, y, z)|^p dx dy dz \right\}^{\frac{1}{p}};$$

$$\|G_1(x, *)\|_{L_{p'}[0,1]} = \left[ \int_0^1 |G_1(x, u)|^{p'} du \right]^{\frac{1}{p'}}; \quad \|G_2(y, *)\|_{L_{p'}[0,1]} = \left[ \int_0^1 |G_2(y, v)|^{p'} dv \right]^{\frac{1}{p'}}; \quad \|G_3(z, *)\|_{L_{p'}[0,1]} = \left[ \int_0^1 |G_3(z, w)|^{p'} dw \right]^{\frac{1}{p'}};$$

$$\| \|G_1(x, *)\|_{L_{p'}[0,1]} \|_{L_\mu[0,1]^3} = \left[ \int_0^1 \left( \|G_1(x, *)\|_{L_{p'}[0,1]} \right)^\mu dx \right]^{\frac{1}{\mu}}.$$

$$\text{Аналогічно визначаються } \| \|G_2(y, *)\|_{L_{p'}[0,1]} \|_{L_\mu[0,1]^3}, \quad \| \|G_3(z, *)\|_{L_{p'}[0,1]} \|_{L_\mu[0,1]^3}.$$

Теорема 3 доведена.

**Наслідок.** Якщо в попередній теоремі взяти

$$m = n = s, \quad \|r1_n f\|_{L_p} = O(n^{-\alpha}), \quad \|r2_n f\|_{L_p} = O(n^{-\alpha}), \quad \|r3_n f\|_{L_p} = O(n^{-\alpha}), \quad \alpha > 0,$$

то  $\|(I - O)f(x, y, z)\|_\infty = O(n^{-3\alpha})$ .

**Зауваження.** Оператори  $L1_n f$ ,  $L2_m f$ ,  $L3_s f$  діють на функцію  $f(x, y, z)$  по одній змінній. При цьому використовуються деякі функціонали (інтеграли) від  $f(x, y, z)$ , що діють на вказану змінну, а інші змінні вважаються параметрами. Тобто оператор мішаної апроксимації  $Of(x, y, z)$  не є класичним оператором апроксимації функцій трьох змінних типу Фур'є, для побудови яких застосовано функціонали від наближаючої функції, що діють на  $f(x, y, z)$  як на функцію трьох змінних (наприклад, коефіцієнтів Фур'є функції трьох змінних).

**Мішана апроксимація поліномами Бернштейна.** Розглянемо вище викладену теорію на прикладі мішаної апроксимації за допомогою поліномів Бернштейна та застосуємо її до розв'язання просторової задачі комп'ютерної томографії.

**Означення.** Поліномами Бернштейна (або операторами Бернштейна) степеня  $n$  для функції  $g(t) \in C[0, 1]$  однієї змінної називають поліноми

$$B_n g(t) = \sum_{k=0}^n C_n^k t^k (1-t)^{n-k} g\left(\frac{k}{n}\right), \quad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad (3)$$

**Лема** [11]. Для кожної неперервної на  $[0, 1]$  функції  $g(t) \in C[0, 1]$  і довільного числа  $\delta > 0$  знайдеться таке натуральне  $n$ , що

$$|g(t) - B_n g(t)| \leq \delta, \quad \forall x \in [0, 1].$$

Зауважимо, що формулювання цього твердження для довільного відрізка  $u \in [a, b]$  проводиться з використанням заміни  $u = a + t(b - a)$ , тобто замість функції  $g(u)$ ,  $u \in [a, b]$ , достатньо розглянути функцію  $f(t) = g(a + t(b - a))$ ,  $t \in [0, 1]$ .

Отже, поліноми Бернштейна рівномірно збігаються до кожної неперервної функції на  $[a, b]$ . Якщо функція  $g(t)$  обмежена в точці  $c$ ,  $a < c < b$ , і має розрив першого роду в цій точці, то

$$\lim_{t \rightarrow c} B_n g(t) = \frac{g(c-0) + g(c+0)}{2}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Якщо функція  $g(t)$  двічі диференційована в точці  $c \in [a, b]$ , то

$$B_n g(c) - g(c) = \frac{g''(c)(c-a)(b-c)}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Класичне узагальнення поліномів Бернштейна для випадку функцій  $f(x, y, z)$ ,  $(x, y) \in [0, 1]^3$ , трьох змінних має вигляд:

$$B_{nms} f(x, y, z) = B1_n B2_m B3_s f(x, y, z) = \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m \sum_{p=0}^s C_n^k C_m^l C_s^p x^k (1-x)^{n-k} y^l (1-y)^{m-l} z^p (1-z)^{s-p} f(x_k, y_l, z_p),$$

де

$$B1_n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k} f(x_k, y, z); \quad B2_m = \sum_{l=0}^m C_m^l y^l (1-y)^{m-l} f(x, y_l, z);$$

$$B3_s = \sum_{p=0}^s C_s^p z^p (1-z)^{s-p} f(x, y, z_p).$$

Тобто оператор  $B1_n$  діє на змінну  $x$ , оператор  $B2_m$  – на змінну  $y$ , а оператор  $B3_s$  – на змінну  $z$ .

**Зауваження.** Оператори  $B_{nms}f$  використовують  $(n+1)(m+1)(s+1)$  значень  $f(x_k, y_l, z_p)$ , але

$$B_{nms}f(x_k, y_l, z_p) \neq f(x_k, y_l, z_p), \quad k = \overline{0, n}, \quad l = \overline{0, m}, \quad p = \overline{0, s}.$$

**Теорема 4.** Для залишку наближення функції  $f(x, y, z)$  операторами  $B_{nms}f(x, y, z)$  виконується рівність:

$$f(x, y, z) - B_{nms}f(x, y, z) = ((I - B1_n) + (I - B2_m) + (I - B3_s) - (I - B1_n)(I - B2_m) - (I - B1_n)(I - B3_s) - (I - B2_m)(I - B3_s) + (I - B1_n)(I - B2_m)(I - B3_s))f(x, y, z).$$

*Доведення.* Розпишемо вираз в правій частині рівності, що треба довести:

$$\begin{aligned} & ((I - B1_n) + (I - B2_m) + (I - B3_s) - (I - B1_n)(I - B2_m) - \\ & - (I - B1_n)(I - B3_s) - (I - B2_m)(I - B3_s) + (I - B1_n)(I - B2_m)(I - B3_s))f(x, y, z) = \\ & = (I - B1_n + I - B2_m + I - B3_s - I + B1_n + B2_m - B1_n B2_m - I + B1_n + B3_s - B1_n B3_s - \\ & - I + B2_m + B3_s - B2_m B3_s + (I - B1_n - B2_m + B1_n B2_m)(I - B3_s))f(x, y, z) = \\ & = (B1_n + B2_m - B1_n B2_m - B1_n B3_s + B3_s - B2_m B3_s + \\ & + I - B3_s - B1_n + B1_n B3_s - B2_m + B2_m B3_s + B1_n B2_m - B1_n B2_m B3_s)f(x, y, z) = \\ & = (I - B1_n B2_m B3_s)f(x, y, z) = (I - B_{nms})f(x, y, z). \end{aligned}$$

Теорема 4 доведена.

Це означає, що для функції  $f(x, y, z) \in C^{(2,2,2)}[0, 1]^3$ , яка має в точці  $(c, d, h) \in [0, 1]^3$  неперервні похідні  $f^{(2,0,0)}(x, y, z)$ ,  $f^{(0,2,0)}(x, y, z)$ ,  $f^{(0,0,2)}(x, y, z)$ , виконуватиметься співвідношення:

$$\begin{aligned} B_{nms}f(c, d, h) - f(c, d, h) &= \frac{f^{(2,0,0)}(c, d, h)c(1-c)}{2n} + \frac{f^{(0,2,0)}(c, d, h)d(1-d)}{2m} + \\ &+ \frac{f^{(0,0,2)}(c, d, h)h(1-h)}{2s} - \frac{f^{(2,2,0)}(c, d, h)c(1-c)d(1-d)}{4nm} - \frac{f^{(2,0,2)}(c, d, h)c(1-c)h(1-h)}{4ns} - \\ &- \frac{f^{(0,2,2)}(c, d, h)d(1-d)h(1-h)}{4ms} + \frac{f^{(2,2,2)}(c, d, h)c(1-c)d(1-d)h(1-h)}{8nms} + \\ &+ o\left(\frac{1}{n}\right) + o\left(\frac{1}{m}\right) + o\left(\frac{1}{nm}\right) + o\left(\frac{1}{ns}\right) + o\left(\frac{1}{ms}\right) + o\left(\frac{1}{nms}\right), \quad n, m, s \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Тобто  $|B_{nms}f(c, d, h) - f(c, d, h)| = O((\min\{n, m, s\})^{-1})$ ,  $m, n, s \rightarrow \infty$ .

Припустимо, що  $m = n = s$ . Тоді отримаємо:  $|B_{nms}f(c, d, h) - f(c, d, h)| = O(n^{-1})$ ,  $n \rightarrow \infty$ .

Сформулюємо означення мішаної апроксимації поліномами Бернштейна. Для цього введемо деякі необхідні поняття.

Нехай внутрішня структура тривимірного об'єкта описується функцією  $f(x, y, z)$ , яка повністю розміщена в одиничному кубі  $[0, 1]^3$ . Та нехай задані три системи паралельних томограм на взаємно перпендикулярних площинах, які отримані за допомогою комп'ютерного томографа. Не зменшуючи загальності, будемо вважати, що ці групи площин паралельні координатним площинам, тобто маємо такі томограми:

1.  $T1_k(y, z) = f(x_k, y, z)$ ,  $k = \overline{1, n}$  – томограми, що лежать на площинах, перпендикулярних вісі  $Ox$ ;
2.  $T2_l(x, z) = f(x, y_l, z)$ ,  $l = \overline{1, m}$  – томограми, що лежать на площинах, перпендикулярних вісі  $Oy$ ;
3.  $T3_p(x, y) = f(x, y, z_p)$ ,  $p = \overline{1, s}$  – томограми, що лежать на площинах, перпендикулярних вісі  $Oz$ .

**Означення.** Операторами мішаної апроксимації поліномами Бернштейна називаються оператори вигляду:

$$Of(x, y, z) = (B1_n + B2_m + B3_s - B1_n B2_m - B1_n B3_s - B2_m B3_s + B1_n B2_m B3_s)f(x, y, z), \quad (4)$$

$$B1_n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k} T1_k(y, z); \quad B2_m = \sum_{l=0}^m C_m^l y^l (1-y)^{m-l} T2_l(x, z);$$

$$B3_s = \sum_{p=0}^p C_p^s z^p (1-z)^{s-p} T3_p(x, y).$$

$n, m, s$  – кількість томограм, що розташовані на площинах, які перпендикулярні вісям  $Ox, Oy, Oz$  відповідно.

**Теорема 5.** Нехай  $f \in C^{2,2,2}[0,1]^3$ . Тоді для оператора  $Of$  виконується асимптотичне співвідношення:

$$f(x, y, z) - Of(x, y, z) = \frac{f^{(2,2,2)}(x, y, z)x(1-x)y(1-y)z(1-z)}{8nms} + o\left(\frac{1}{nms}\right). \quad (5)$$

*Доведення.* Скористаємося рівністю

$$f(x, y, z) - Of(x, y, z) = (I - B1_n)(I - B2_m)(I - B3_p)f(x, y, z)$$

і виразами для залишку наближення поліномами Бернштейна двічі диференційовної по  $x$ , по  $y$  та по  $z$  функції ( $a < x < b, c < y < d, h < z < t$ ):

$$B1_n f(\xi, y, z) - f(\xi, y, z) = \frac{f^{(2,0,0)}(\xi, y, z)(\xi - a)(b - \xi)}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right), \quad a < \xi < b;$$

$$B2_m f(x, \eta, z) - f(x, \eta, z) = \frac{f^{(0,2,0)}(x, \eta, z)(\eta - c)(d - \eta)}{2m} + o\left(\frac{1}{m}\right), \quad c < \eta < d;$$

$$B3_s f(x, y, \zeta) - f(x, y, \zeta) = \frac{f^{(0,0,2)}(x, y, \zeta)(\zeta - h)(t - \zeta)}{2s} + o\left(\frac{1}{s}\right), \quad h < \zeta < t.$$

Це дає змогу записати вираз для похибки (5).

Теорема 5 доведена.

**Зауваження.** Якщо в (5) покласти  $n = m = s$ , то  $f(x, y, z) - Of(x, y, z) = O\left(\frac{1}{n^3}\right), n \rightarrow \infty$ .

Тобто оператор  $Of$ , у випадку  $n = m = s$ , мають порядок точності відносно змінної  $n$  у три рази більший, ніж при наближенні оператором  $B_{nms} f$ . Звертаємо увагу на те, що оператор  $Of(x, y, z)$  потребують для своєї побудови томограми  $T1_k, T2_l, T3_p$ , тобто сліди наближуваної функції  $f(x, y, z)$  на заданих площинах, паралельних координатним площинам.

Тобто, для оцінки похибки наближення функції  $f(x, y, z)$  оператором  $Of(x, y, z)$  виконується нерівність:

$$\|f - Of\|_{C[0,1]^3} = O(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3), \quad \varepsilon_k \rightarrow 0, \quad k = 1, 2, 3,$$

де  $\varepsilon_1 = \|(I - L1_n)f\|_{C[0,1]^3}, \varepsilon_2 = \|(I - L2_m)f\|_{C[0,1]^3}, \varepsilon_3 = \|(I - L3_s)f\|_{C[0,1]^3}$ .

**Побудова чотиривимірної математичної моделі динамічної внутрішньої структури тривимірного тіла.** Нехай функція  $f(x, y, z, t)$  описує деяку фізичну характеристику внутрішньої структури (наприклад, щільність, коефіцієнт поглинання тощо). Джерелом інформації про функцію  $f(x, y, z, t)$ , тобто про динамічну внутрішню структуру тривимірного тіла, будемо вважати набір площин

$$\Pi_p : \omega_p(x, y, z) = \alpha_{p1}x + \alpha_{p2}y + \alpha_{p3}z - \gamma_p = 0, \quad p = \overline{1, s},$$

а також набір томограм, які лежать на цих площинах, у конкретні моменти часу. Для подальшого викладення нам необхідно сформулювати деякі твердження.

**Означення.** Слідом функції  $f(x, y, z, t_k)$  у момент часу  $t_k, k = \overline{1, n}$  на площині  $\Pi_p : \omega_p(x, y, z) = 0$  будемо називати функцію двох змінних  $\varphi_{k,p}(u, v)$ , яка в кожній точці цієї площини  $\Pi_p$  приймає такі самі значення, що і функція  $f(x, y, z, t_k)$ :

$$f_k(x, y, z)|_{\Pi_p} = \varphi_{k,p}(u, v), \quad k = \overline{1, n}, \quad p = \overline{1, s}. \quad (6)$$

**Означення.** Інтерфлетациєю функції  $f(x, y, z, t_k), k = \overline{1, n}$  називається відновлення (можливо, наближене) функції  $f(x, y, z, t_k), k = \overline{1, n}$  в точках між площинами  $\Pi_p : \omega_p(x, y, z) = 0$  за допомогою її слідів (6) на цих площинах.

**Означення.** Томограмою  $T_{k,p}(\bar{x})$  (слідом функції  $f(x, y, z, t_k)$ ) на площині  $\omega_p(x, y, z) = 0$  в момент часу  $t_k, k = \overline{1, n}$  будемо називати одну з трьох функцій:

$$T_{k,p}(\bar{x}) = \begin{cases} f(x_p(y, z), y, z, t_k); \\ f(x, y_p(x, z), z, t_k); \\ f(x, y, z_p(x, y), t_k), \end{cases} \quad \bar{x} = \begin{cases} (x, y); \\ (x, z); \\ (y, z). \end{cases}$$

Томограму в момент часу  $t_k$ , яка лежить, наприклад, на площині  $\omega_p(x, y, z): z - c = 0$  можна представити у вигляді функції двох змінних  $T_{kp}(x, y)$ , тобто у вигляді сліду функції  $f(x, y, z, t_k)$  на площині  $\omega_p(x, y, z) = 0$ .

Як експериментальні дані будемо використовувати:

1) послідовність  $n$  моментів часу:  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ ;

2) серію  $s$  площин, заданих рівняннями  $\Pi_p: \omega_p(x, y, z) = a_{p1}x + a_{p2}y + a_{p3}z - \gamma_p = 0$ ,  $p = \overline{1, s}$ ;

3) томограми тривимірного об'єкта  $T_{kp}, k = \overline{1, n}$ ,  $p = \overline{1, s}$ , які лежать на заданих площинах  $\Pi_p$ , в задані моменти часу  $t = t_k, k = \overline{1, n}$ .

Томограми отримуємо за допомогою комп'ютерного томографа. Тобто маємо  $n$  груп томограм (у кожній групі по  $s$  томограм). У кожній групі томограми представлені в один момент часу. Але вони лежать на різних площинах. Зазначимо, що кількість томограм у різні моменти часу може бути різною. Це також відноситься і до кількості рівнянь площин, на яких лежать томограми. Більш того, в різні моменти часу площини, на яких лежать томограми, можуть бути задані різними рівняннями.

Спочатку побудуємо  $n$  тривимірних математичних моделей  $f_k(x, y, z), k = \overline{1, n}$  об'єкта  $f(x, y, z, t)$  для кожного з моментів часу  $t = t_k, k = \overline{1, n}$ .

Отже, є функція  $f_k(x, y, z)$ , яка в точках площини  $\Pi_p$  в  $k$ -й момент часу збігається із зображенням  $p$ -ї томограми. Для побудови таких функцій можуть бути використані: 1) оператори сплайн-інтерфлетації; 2) оператори мішаної апроксимації, які були побудовані раніше. У випадку 1) побудовані тривимірні математичні моделі  $f_k(x, y, z), k = \overline{1, n}$  об'єкта  $f(x, y, z, t)$  для кожного з моментів часу  $t = t_k, k = \overline{1, n}$  мають задовольняти властивості:

$$f(x, y, z, t_k)|_{\Pi_p} = f_k(x, y, z)|_{\Pi_p} = T_{k,p}(\bar{x}), \quad k = \overline{1, n}, \quad p = \overline{1, s}.$$

При цьому, якщо експериментальні дані (характеристики томограм – геометричні параметри площин, на яких лежать томограми, а також зображення на томограмах) задані точно, то можна використовувати метод відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла за допомогою операторів інтерфлетації функцій. Якщо ж експериментальні дані задано з похибкою, то можна використовувати метод розв'язання задач тривимірного комп'ютерної томографії за допомогою мішаної апроксимації.

Згадані методи відновлення внутрішньої структури тіла вирізняються високою точністю.

Після побудови тривимірних моделей  $f_k(x, y, z), k = \overline{1, n}$  будемо чотиривимірну модель  $F(x, y, z, t)$ , використовуючи метод інтерполяції за змінною  $t$  у вигляді формули:

$$F(x, y, z, t) = \sum_{k=1}^n h_k(t) f_k(x, y, z), \quad (7)$$

де  $h_p(t)$  – допоміжні функції від однієї змінної  $t$  з властивостями:

$$h_k(t_q) = \delta_{kq}, \quad k, q = \overline{1, n}, \quad \delta_{kq} = \begin{cases} 1, & k = q \\ 0, & k \neq q \end{cases} \quad \text{– символ Кронекера.}$$

Ці функції можуть бути поліномами (алгебраїчними або тригонометричними), сплайнами (поліноміальними або періодичними) степеня  $r$ ,  $r = 1, 2, 3, \dots$ , і т.д.

**Теорема 6.** Якщо експериментальні дані (томограми  $T_{k,p}, k = \overline{1, n}, p = \overline{1, s}$  що лежать на площинах  $\Pi_p$ ) відповідають функції, яку наближуємо  $f(x, y, z, t) \in C^r(D)$ ,  $D = G \times [0, T]$ ,  $r \geq 0$ ,  $G \subset R^3$ ,  $t \in [0, T]$ , то можна побудувати  $4D$  модель  $F(x, y, z, t)$  внутрішньої структури об'єкта, який змінюється, з властивостями:

$$F(x, y, z, t) \in C^r(D);$$

$$F(x, y, z, t_k)|_{\omega_p(x, y, z)=0} = f_k|_{\omega_p(x, y, z)=0} = T_{k,p}(u, v), \quad k = \overline{1, n}, \quad p = \overline{1, s}, \quad (u, v) = \begin{cases} (x, y); \\ (x, z); \\ (y, z). \end{cases}$$

Зазначимо, що задача в такій постановці немає єдиного розв'язку. Але при певних обмеженнях на клас функцій, яку наближуємо, вона буде мати єдиний розв'язок. Більш того, для деяких класів наближуваних функцій  $f(x, y, z, t)$  можна оцінити похибку наближення.



**Теорема 7.** Нехай

- похибка задання томограм  $T_{kp}(\bar{x})$  в моменти часу  $t = t_k$ :  $\varepsilon_{kp} = \max_{(u,v) \in G} |f|_{\Gamma_p} - T_{k,p}(\bar{x})|$ ;
- похибка наближення операторами інтерфлотації або мішаної апроксимації функції  $f(x, y, z, t)$ :

$$\varepsilon 1_k = |f_k(x, y, z) - f(x, y, z, t_k)|_{C(D)};$$

похибка наближення оператором інтерполяції за змінною  $t$ :  $\varepsilon 2 = |F(x, y, z, t) - f(x, y, z, t)|_{C[0,T]}$ .

Тоді похибка наближення функції  $f(x, y, z, t) \in C^r(D)$  оператором  $F(x, y, z, t)$ , побудованим в теоремі 6, буде мати вигляд:

$$E = \max_{\substack{1 \leq p \leq s \\ 1 \leq k \leq n}} O(\varepsilon_{kp}) + \max_{1 \leq k \leq n} O(\varepsilon 1_k) + O(\varepsilon 2).$$

**Представлення томограм у середовищі Matlab.** Кожний малюнок Matlab має площину (Figures) для рисування, яка, по суті, являється двовимірним масивом пікселів. Кожному елементу цього масива, в свою чергу, ставиться у відповідність атрибут, тобто колір. Відмітимо, що при програмуванні в Matlab використовується RGB модель кольору, у відповідності до якої будь-який колір можна представити як суперпозицію трьох основних кольорів – червоного (Red), зеленого (Green) та синього (Blue). Кожна з компонент Red, Green, Blue задається одним байтом і відповідає  $2^8 = 256$  відтінків кольорів (значення інтенсивності змінюється від 0 до 255, число 255 відповідає кольору найбільшої інтенсивності). Повна кількість кольорів, яку можна задати трьома байтами, складає  $256^3 = 16777216$ , що є близьким до кольорової здатності ока людини (ця модель має назву TrueColor).

Комп'ютерний томограф видає томограми у спеціальному форматі, який є доступним лише для томографів. Існує спеціальна програма, яка переводить цей формат у формат .bmp, який розпізнає і комп'ютер.

Нехай задані п'ять томограм (рис. 1), які представляються у вигляді файлів у форматі .bmp – x1.bmp, x2.bmp, x3.bmp, x4.bmp, x5.bmp (розмір томограм повинен бути однаковим, в цьому випадку –  $450 * 450$  пікселів).

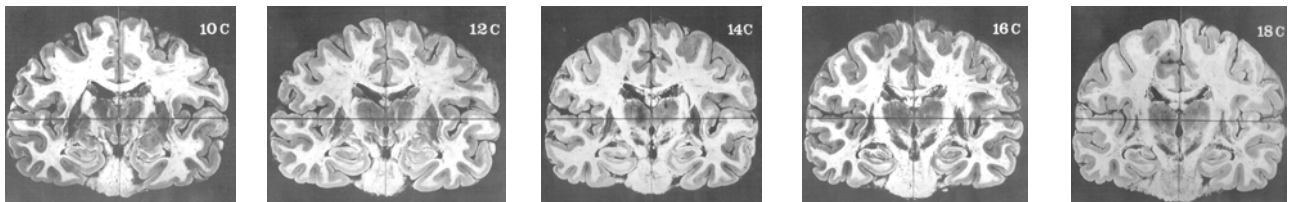


Рис. 1 – Томограми, що лежать на системі площин, які паралельні осі  $Oz$ .

Ці томограми представимо як одномірний масив у вигляді наступної функції:

1.  $function A = A(i)$ .

Тут  $i$  – номер малюнку.

2.  $if i == 1;$

3.  $c = imread('x1.bmp');$

Функція  $imread('x1.bmp')$  – читає графічний файл  $x1.bmp$ , тобто виводить матрицю чисел. Кожний елемент матриці інтерпретується як значення RGB, тобто відповідає інтенсивності кольору у відповідному пікселі.

4.  $elseif i == 2;$

5.  $c = imread('x2.bmp');$

6.  $elseif i == 3;$

7.  $c = imread('x3.bmp');$

8.  $elseif i == 4;$

9.  $c = imread('x4.bmp');$

10.  $elseif i == 5;$

11.  $c = imread('x5.bmp');$

12. *end* ;

13.  $A = \text{image}(c)$  .

Функція  $\text{image}(c)$  перетворює матрицю чисел в малюнок (рис. 2).

Тобто ми представили набір томограм у вигляді функції  $A(i)$  .

Якщо треба працювати не з цілими малюнками, а з окремими пікселями, то в наведеній вище функції треба зробити зміни в рядках 1 та 13:

1. *function*  $A = A(i, y, z)$  .

Тут  $i$  – номер малюнка,  $(y, z)$  – координати пікселя, з яким треба працювати.

13.  $A = c(y, z)$  .

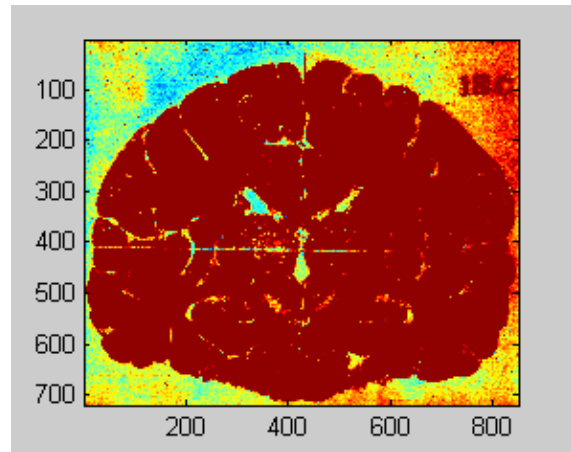


Рис. 2 – Результат роботи функції  $A(5)$  .

Наприклад, функція  $A(5, 100, 100)$  видає в результаті число 41. Тобто інтенсивність кольору в пікселі з координатами  $(100, 100)$  п'ятого малюнку дорівнює 41.

**Matlab-програми відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла між паралельними томограмами.** Нехай треба відновити внутрішню структуру головного мозку людини між томограмами, які лежать на паралельних площинах. Тобто треба знайти значення тривимірної функції між паралельними площинами.

Нехай задані тривимірні функція  $f(x, y, z)$  і рівняння площин:  $x = x_1$  та  $x = x_2$ . Відновлювати значення функції  $f(x, y, z)$  між заданими площинами будемо за допомогою *оператора лінійної інтерполяції*:

$$P(f(x, y, z)) = f(x_1, y, z) \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} + f(x_2, y, z) \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} .$$

Продемонструємо роботу цього оператора на прикладі головного мозку людини. Вхідними даними є набір томограм, які лежать на системі паралельних площин (рис. 1). Набір томограм представляється у вигляді функції  $A(i)$ , як це показано у додатку В.

Функція, яка відновлює внутрішню структуру головного мозку між паралельними площинами, має вигляд:

1. *function*  $\text{brainz} = \text{brainz}(z)$  .

Тут  $z$  – число від 0 до 1. Тобто задається рівняння площини, в якій треба відновити внутрішню структуру (без обмеження загальності вважаємо, що тривимірне тіло лежить всередині одиничного куба).

2.  $M = 5$  ( $M$  – кількість заданих томограм);

3.  $k = \text{floor}(M * z)$  .

Функція  $\text{floor}(M * z)$  округляє число  $A$  до найближчого цілого в меншу сторону, тобто  $\text{floor}(0,2) = 0$  і  $\text{floor}(0,8) = 0$ . Ця функція необхідна для того, щоб зробити перемасштабування, тобто помістити заданий тривимірний об'єкт в одиничний куб.

4.  $r1 = A(k)$  ;

5.  $r2 = A(k+1)$  .

На кроці 4 та 5 визначається, між якими томограмами лежить введена площина.

6.  $R1 = \text{immultiply}(r1, (k+1-z*M))$  ;

7.  $R2 = \text{immultiply}(r2, (k-z*M))$  ;

8.  $R = \text{imsubtract}(R1, R2)$  ;

Кроки 6 – 8 відповідають формулі (Г.1).

Оператор  $\text{immultiply}(X, a)$  визначає добуток зображення  $X$ , тобто масиву значень від 0 до 255, на число  $a$ . Якщо значення добутку перевищує заданий діапазон, то воно усікається, а дробові значення округляються.

Оператор  $\text{imsubtract}(X, Y)$  визначає різницю двох зображень  $X$  та  $Y$ , тобто двох масивів значень від 0 до 255. Розмірність матриць  $X$  та  $Y$  повинна бути однаковою.

9.  $\text{brainz} = \text{image}(R)$  .

Функція  $image(R)$  перетворює отриману матрицю значень в малюнок.

Результати роботи функції  $brainz(z)$  представлені на рис. 3.

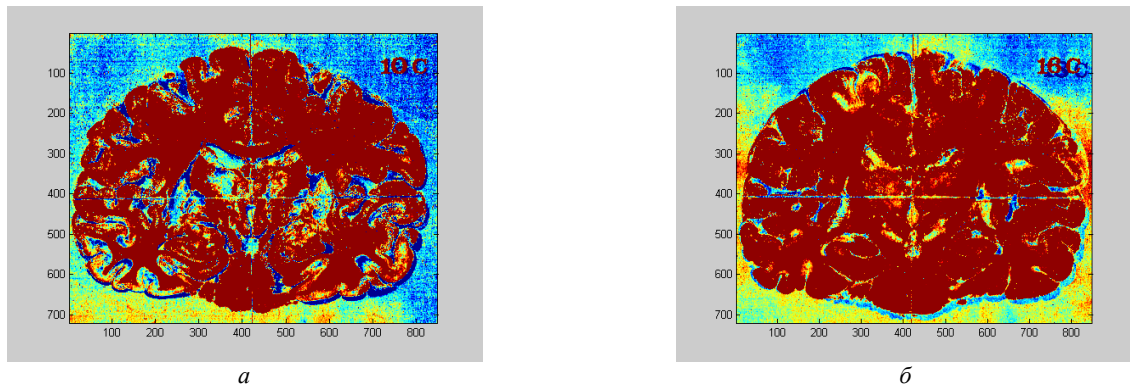


Рис. 3 – Результати роботи програми  $brainz(z)$ :  $a$  –  $brainz(0,3)$  – переріз головного мозку площиною  $z = 0.3$ , тобто відновлено зображення тривимірного тіла між першою та другою томограмою;  $b$  –  $brainz(0,9)$  – переріз головного мозку площиною  $z = 0.9$ , тобто відновлено зображення тривимірного тіла між четвертою та п'ятою томограмою.

Було виконано обчислювальний експеримент для відновлення внутрішньої структури серця людини, яка змінюється з часом.

Як експериментальні дані були використані:

1.  $n = 25$  моментів часу;
2.  $s = 9$  паралельних зрізів серця площинами, перпендикулярними осі  $Ox$  (метод дає змогу використовувати крім даних томограм також томограми, що лежать в інших перетинах, які не перпендикулярні осі  $Ox$ );
3. томограми серця, які лежать на  $s = 9$  заданих площинах, у кожній з 25 моментів часу.

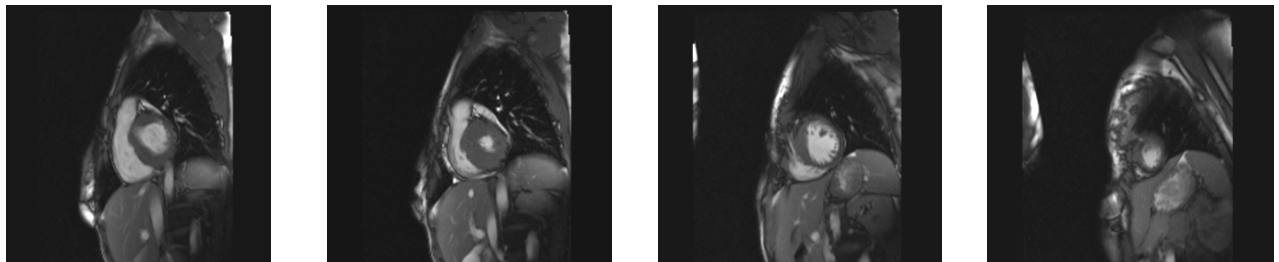


Рис. 4 – Приклади томограм, зроблених у момент часу  $t_1$ , у перетинах:  $x = 0.1$ ,  $x = 0.3$ ,  $x = 0.5$ ,  $x = 0.8$ .

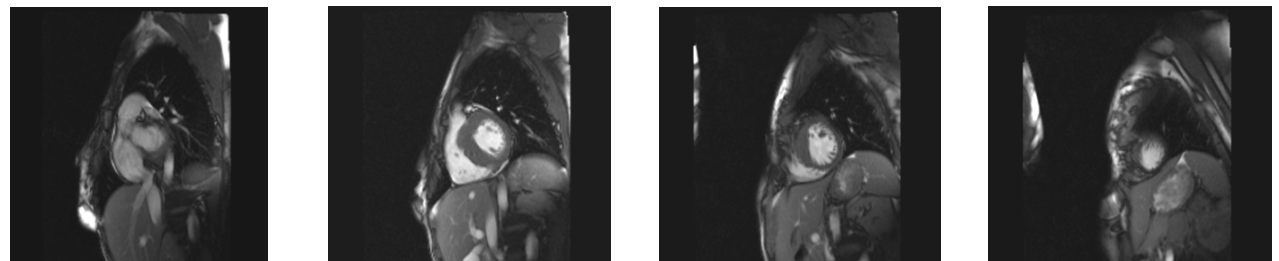


Рис. 5 – Приклади томограм, зроблених у момент часу  $t_2$ , у перетинах:  $x = 0.1$ ,  $x = 0.3$ ,  $x = 0.5$ ,  $x = 0.8$ .

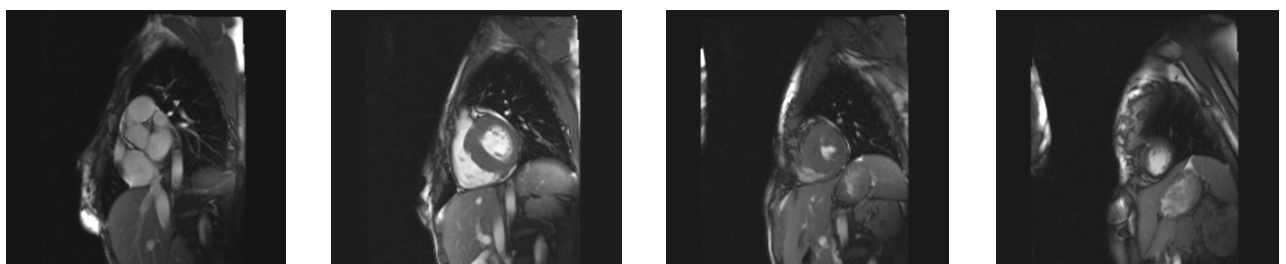


Рис. 6 – Приклади томограм, зроблених у момент часу  $t_{22}$ , у перетинах:  $x = 0.1$ ,  $x = 0.3$ ,  $x = 0.5$ ,  $x = 0.8$ .

Отже, маємо 25 груп томограм. У кожній групі представлені томограми, зроблені в один певний момент часу, в дев'яти перетинах (тобто в кожній групі по 9 томограм). На рис. 4 – 6 показано приклади томограм у різ-

ні моменти часу в одних і тих самих перетинах.

Для побудови тривимірних моделей використовувалися оператори інтерфлетації функцій трьох змінних [11]. Було побудовано 25 математичних моделей внутрішньої структури серця у вигляді функцій  $f_k(x, y, z)$ ,  $k = \overline{1, 25}$ , за допомогою операторів інтерфлетації функцій трьох змінних. Потім ці математичні моделі було використано при побудові 4D математичної моделі серця за допомогою операторів інтерполяції за змінною часу  $t$ .

За допомогою побудованої 4D математичної моделі знайдемо зображення серця людини в площині, яка задається рівнянням  $x = a$ , в конкретний момент часу  $t = t_{\text{прогнозе}}$ .

Практична реалізація була здійснена в системі комп'ютерної математики MatLab. На рис. 7 – 9 наведено результати обчислювального експерименту.

Особливістю комп'ютерної реалізації запропонованого методу є необхідність дії на кожен з  $RGB$  компонент кольору окремо. Таким чином, у запропонованому методі здійснюється виділення окремих компонент кольору в заданій точці.

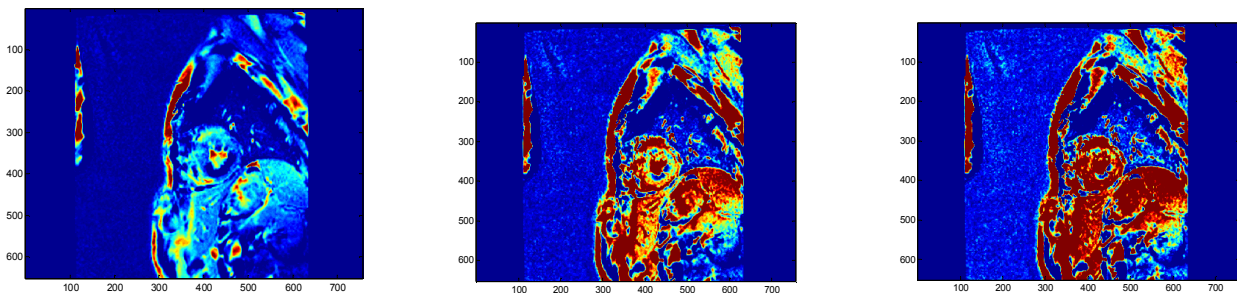


Рис. 7 – Відновлення внутрішньої структури серця в площині  $x = 0.6$  у моменти часу  $t_5, t_{12}, t_{20}$  відповідно.

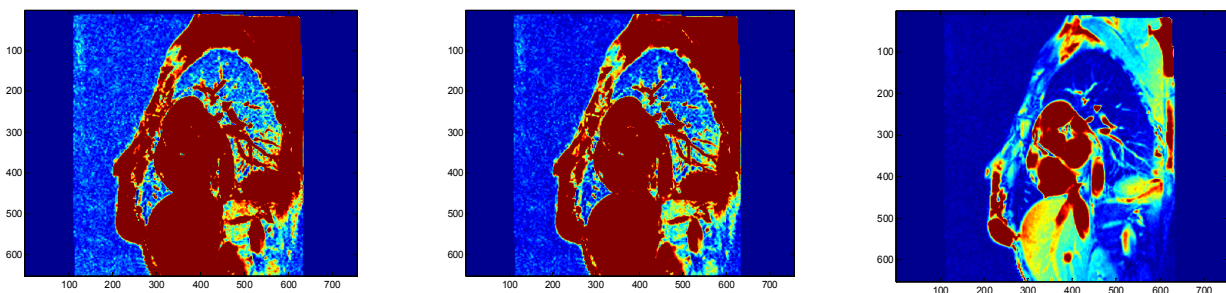


Рис. 8 – Відновлення внутрішньої структури серця в площині  $x = 0.1$  у моменти часу  $t_5, t_{12}, t_{20}$  відповідно.

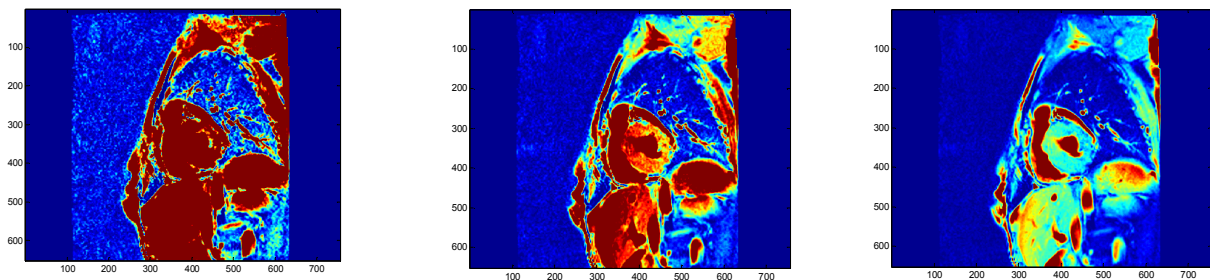


Рис. 9 – Відновлення внутрішньої структури серця в площині  $x = 0.3$  у моменти часу  $t_5, t_{12}, t_{20}$  відповідно.

**Перспективи подальших досліджень.** Автори вважають перспективними шляхи, пов'язані з побудовою математичних моделей динамічних тривимірних тіл. В подальшому планується розробити методи відновлення динамічної внутрішньої структури тривимірного тіла з суттєвим використанням її неоднорідності.

**Висновки.** В роботі запропонований новий метод побудови чотиривимірної математичної моделі тривимірного тіла, що змінюється з часом, з використанням операторів інтерполяції або апроксимації за змінною часу  $t$ . Чотиривимірна модель будується на основі тривимірної моделі об'єкта, яка використовує оператори інтерфлетації або мішаної апроксимації функцій трьох змінних  $x, y, z$ . За допомогою побудованої чотиривимірної моделі знайдена математична модель об'єкта в конкретний момент часу  $t = t_{\text{прогнозе}}$ . В якості прикладу проведена

візуалізація об'єкту (серця людини) в площинах, заданих дослідником з використанням томограм, отриманих за допомогою магнітно-резонансного комп'ютерного томографу Siemens. Продемонстровані результати обчислювального експерименту.

Отримана 4D модель може бути використана не тільки для знаходження зображення об'єкту в заданому перерізі у фіксований момент часу, який не співпадає з експериментально заданими значеннями часу, але і для аналізу течії хвороби шляхом дослідження поведінки функції чотирьох змінних в залежності від часу та від просторових координат.

#### Список літератури

1. Radon J. Über die Bestimmung von Functionen durch ihre Integralvertheilung langs gewisser Mannigfaltigkeiten // *Berichte Sachsische Academie der Wissenschaften*. – Leipzig, Mathem. – Phys., 1917. – K1. – 69. – P. 262 – 267.
2. Сергієнко І. В., Литвин О. М., Першина Ю. І. Математичне моделювання в комп'ютерній томографії з використанням інтерфлетатції функцій. Монографія. – Харків : ХНУРЕ, 2008. – 160 с.
3. Першина Ю. І., Шилін О. В. Решение 3D-задачи компьютерной томографии по известным томограммам на системе произвольных плоскостей // *Известия Национальной академии наук Беларуси. Серия физико-технических наук*. – Минск, 2017. – № 4. – С. 112 – 121.
4. Першина Ю. І., Шилін О. В. Чисельна реалізація методу відновлення внутрішньої структури 3D тіла за відомими її томограмами на системі довільних площин з використанням інтерфлетатції функцій // *Вісник Національного технічного університету «ХПІ»*. Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 6(1228). – С. 105 – 111.
5. Малозёмов В. Н., Сергеев А. Н., Григорьев М. И. Полиномы Бернштейна и Составные кривые Безье. – Санкт-Петербург, 2004. – 11 с.
6. Малозёмов В. Н., Машарский С. М. Элементарные методы в экстремальных задачах. – СПб. : Изд-во ВВМ, 2020. – 160 с.
7. Jaffray D. A., Siewerdsen J. H., Wong J. W., Martinez A. A. Flat-panel cone-beam computed tomography for image-guided radiation therapy // *Int. J. Radiat. Oncol. Biol. Phys.* – 2002. – Vol. 53. – № 5. – P. 1337 – 1349. doi: 10.1016/s0360-3016(02)02884-5.
8. Orth R. C., Wallace M. J., Kuo M. D. C-arm cone-beam CT : general principles and technical considerations for use in interventional radiology // *J. Vasc Interv Radiol.* – 2008. – Vol. 19. – № 6. – P. 814 – 820. doi: 10.1016/j.jvir.2009.04.026.
9. Jia X., Lou Y., Dong B. 4D Computed Tomography Reconstruction from Few-Projection Data via Temporal Non-local Regularization // *Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention: proceedings of the conference, Part I*. – 2010. – P. 143 – 150. doi: 10.1007/978-3-642-15705-9\_18.
10. Корнейчук Н. П. Сплайны в теории приближения. – М. : Наука, 1984. – 352 с.
11. Литвин О. М. Интерлинація функцій та деякі її застосування. – Харків : Основа, 2002. – 544 с.

#### References (transliterated)

1. Radon J. Über die Bestimmung von Functionen durch ihre Integralvertheilung langs gewisser Mannigfaltigkeiten. *Berichte Sachsische Academie der Wissenschaften*. Leipzig, Mathem. – Phys., 1917, K1, 69, pp. 262–267.
2. Serhiienko I. V., Lytvyn O. M., Pershyna I. I. *Matematychni modelyuvannya v komp'yuterniy tomografiyi z vykorystanniam interfletatsiyi funktsiy. Monografiya* [Mathematical modeling in computed tomography by interflotation function. Monograph]. Kharkiv, KhNURE Publ., 2008. 160p.
3. Pershyna Yu. I., Shilin O. V. Reshenie 3D-zadachi komp'yuternoy tomografii po izvestnym tomogrammam na sisteme proizvol'nykh ploskostey [Solution of a 3D computed tomography problem using known tomograms on a system of arbitrary planes]. *Izvestiya Natsional'noy akademii nauk Belarusi. Seriya fiziko-tekhnicheskikh nauk* [Bulletin of the National Academy of Science of Belarus. Series Physical and Technical Sciences]. Minsk, 2017, no. 4, pp. 112–121.
4. Pershyna Yu. Y., Shylin O. V. Chysel'na realizatsiya metodu vidnovlennya vnutrishn'oyi struktury 3D tila za vidomymy yiyi tomogramamy na systemi dovil'nykh ploshchyn z vykorystanniam interfletatsiyi funktsiy [Numerical implementation of the method of restoring the internal structure of a 3D body according to its known tomograms on a system of arbitrary planes using interflotation of functions]. *Visnyk Natsional'noho tekhnichnoho universytetu «KHPi»*. Seriya : *Matematychni modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series : Mathematical modeling in engineering and technology]. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2017, no. 6(1228), pp. 105–111.
5. Malozyemov V. N., Sergeev A. N., Grigor'ev M. I. *Polinomy Bernshteyna i Sostavnye krivye Bez'e* [Bernstein polynomials and Bézier composite curves]. Sankt-Peterburg, 2004. 11 p.
6. Malozyemov V. N., Masharskiy S. M. *Elementarnye metody v ekstremal'nykh zadachakh* [Elementary methods in extreme problems]. Sankt-Peterburg, Izd-vo VVM Publ., 2020. 160 p.
7. Jaffray D. A., Siewerdsen J. H., Wong J. W., Martinez A. A. Flat-panel cone-beam computed tomography for image-guided radiation therapy. *Int. J. Radiat. Oncol. Biol. Phys.* 2002, vol. 53, no. 5, pp. 1337–1349. doi: 10.1016/s0360-3016(02)02884-5.
8. Orth R. C., Wallace M. J., Kuo M. D. C-arm cone-beam CT : general principles and technical considerations for use in interventional radiology. *J. Vasc Interv Radiol.* 2008, vol. 19, no. 6, pp. 814–820. doi: 10.1016/j.jvir.2009.04.026.
9. Jia X., Lou Y., Dong B. 4D Computed Tomography Reconstruction from Few-Projection Data via Temporal Non-local Regularization. *Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention : proceedings of the conference, Part I*. 2010, pp. 143–150.
10. Korneychuk N. P. *Splajny v teorii priblizheniya* [Splines in approximation theory]. Moscow, Nauka Publ., 1984. 352 p.
11. Litvin O. M. *Interlinatsiya funktsiy ta deyaki yiyi zastosuvannya* [Interlination of functions and some of its applications]. Kharkiv, Osнова Publ., 2002. 544 p.

Надійшла (received) 03.12.2020

#### Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

**Першина Юлія Ігорівна** – доктор фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри вищої математики, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (050) 222-69-79; e-mail: yuliapershina78@gmail.com.

**Першина Юлія Ігорівна** – доктор фізико-математических наук, доцент, доцент кафедри вищої математики, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», г. Харьков; тел.: (050) 222-69-79; e-mail: yuliapershina78@gmail.com.

**Pershyna Iuliia Igorevna** – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor at the Department of Higher Mathematics, National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute», Kharkiv; tel.: (050) 222-69-79; e-mail: yuliapershina78@gmail.com.