

**В. П. ОЛЬШАНСЬКИЙ, С. В. ОЛЬШАНСЬКИЙ**

### **ПРО ПРИПИНЕННЯ В'ЯЗКИМ ОПОРОМ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ НЕЛІНІЙНО ПРУЖНОГО ОСЦИЛЯТОРА**

Розглянуто вільні коливання осцилятора зі степеневу нелінійною пружністю при наявності степеневу в'язкого опору. Встановлено співвідношення між показниками нелінійностей, коли сила в'язкого опору може повністю припинити коливальний рух. В такому випадку вільні коливання обмежені в часі, тобто складаються із скінченного числа циклів, як в системі з сухим тертям Кулона. Для проведення дослідження задіяно метод енергетичного балансу. З використанням періодичних Атеб-функцій виведено наближену формулу роботи дисипативної сили за один напівцикл коливань. Из умов рівності роботи зміні потенціальної енергії системи, одержано рекурентне співвідношення між розмахами коливань у вигляді степеневу рівняння. За підсумками аналізу зміні коефіцієнта в рівнянні, яка пов'язана зі зміною номера напівциклу і розмахів коливань, встановлено умову, коли це рівняння не має додатних коренів, що означає припинення коливального руху. Показано, що ця умова, в вигляді нерівності, узагальнює відомі результати. Для перевірки теоретичних висновків проведено чисельне інтегрування нелінійного диференціального рівняння руху на комп'ютері. Підтверджено, що при виконанні встановлених умов, вільні коливання осцилятора складаються з обмеженого числа циклів і за відсутності в системі сухого тертя. Виділено окремі випадки, коли наближений метод енергетичного балансу призводить до точних розрахункових формул. На відміну від пружно лінійного осцилятора тривалості циклів зростають у ході руху, бо залежать від розмахів затухаючих коливань у розглянутій суттєво нелінійній системі з жорсткою силовою характеристикою.

**Ключові слова:** вільні коливання осцилятора, степеневу нелінійна пружність, степеневу в'язкий опір, умова припинення коливань, метод енергетичного балансу, періодичні Атеб-функції.

**В. П. ОЛЬШАНСКИЙ, С. В. ОЛЬШАНСКИЙ**

### **О ПРЕКРАЩЕНИИ ВЯЗКИМ СОПРОТИВЛЕНИЕМ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ НЕЛИНЕЙНО УПРУГОГО ОСЦИЛЛЯТОРА**

Рассмотрены свободные колебания осциллятора с нелинейной упругостью, которая описывается степенной зависимостью, при наличии вязкого сопротивления такого же типа. Установлено соотношение между показателями нелинейностей, когда сила вязкого сопротивления может полностью прекратить колебательное движение. В этом случае свободные колебания ограничены во времени, то есть состоят из конечного числа циклов, как в системе с сухим трением Кулона. Для проведения исследований задействован метод энергетического баланса. С применением периодических Атеб-функций выведена приближённая формула работы диссипативной силы за один полуцикл колебаний. Из условия равенства работы изменению потенциальной энергии системы получено рекуррентное соотношение между размахами колебаний в виде степенного уравнения. По итогам анализа изменения коэффициента в уравнении, которое связано с изменением номера полуцикла и размахов колебаний, установлено условие, когда это уравнение не имеет положительного корня, что означает прекращение колебательного движения. Показано, что это условие, в виде неравенства, обобщает известные результаты. Для проверки теоретических выводов проведено численное интегрирование нелинейного дифференциального уравнения движения на компьютере. Подтверждено, что при соблюдении установленных условий, свободные колебания осциллятора имеют ограниченное число циклов и при отсутствии в системе сухого трения. Выделены отдельные случаи, когда приближённый метод энергетического баланса приводит к точным расчётным формулам. Продолжительность циклов увеличиваются в ходе движения, поскольку зависят от размахов затухающих колебаний в рассмотренной существенно нелинейной системе с жёсткой силовой характеристикой.

**Ключевые слова:** свободные колебания осциллятора, нелинейная упругость, которая описывается степенной зависимостью, степенное вязкое сопротивление, условие прекращения колебаний, метод энергетического баланса, периодические Атеб-функции.

**V. P. OLSHANSKIY, S. V. OLSHANSKIY**

### **CESSATION OF FREE VIBRATIONS OF A NONLINEAR ELASTIC SYSTEM DUE TO VISCOUS RESISTANCE**

The paper deals with free vibrations of a system with power-law nonlinear elasticity subjected to power-law viscous resistance. The relation between the nonlinearity indices is determined when the impact of the viscous resistance force causes the vibrations to die away. In this case the vibrations are limited in time i.e. consist of a finite number of cycles analogous to a system with Coulomb dry friction. The research exploits the energy balance method. The periodic Ateb-functions are used to obtain an approximate formula for the work of dissipative force over a semi-cycle of vibrations. A recursive power-law equation for the vibration swings is derived from the condition of equality of the work to the potential energy change. By analyzing the change of the coefficient in the equation, which is related to the change of the semi-cycle number as well as the vibration swings, the condition for the equation to have no positive root is determined, which means that the vibrations die away. The condition is formulated in the form of an inequality. It is shown to generalize the results previously known. The theoretical inferences are verified by numerical integration of the nonlinear differential equation of motion. It is shown that under the conditions proposed in the paper the free vibrations consist of a finite number of cycles even if dry friction is absent from the system. Special cases are highlighted, when the approximate energy balance method results into exact computational formulae. The length of the cycles increases during the motion since it depends on the swing of damped vibrations in the essentially nonlinear system with rigid force characteristics considered.

**Key words:** free vibrations, power-law nonlinear elasticity, power-law viscous resistance, condition of vibration dying-away, energy balance method, periodic Ateb-functions.

**Вступ.** Из практики видно, що вільні коливання механічних систем завжди обмежені в часі, тобто мають скінченну кількість циклів. Цю властивість зазвичай пов'язують із дією сили сухого тертя Кулона. Але виявляється, що за певних умов вільні коливання може припинити і дія сили в'язкого опору, без участі сили сухого тертя. З'ясування цих умов дає можливість глибше зрозуміти сутність механічного явища і створити більш адекватні

феноменологічні моделі механічних коливань.

**Огляд публікацій і мета роботи.** Дослідженні нелінійних коливань відноситься до актуальних задач механіки. На сьогодні накопичилось багато публікацій, що стосуються цієї проблеми, із яких виділимо лише узагальнюючі видання останніх років [1], [2]. Питання руху дисипативних осциляторів висвітлено також в [3], де розглянуто сильну дію дисипативних сил різної природи, що описується окремими аналітичними виразами. В роботі [4] встановлено, що вільні коливання лінійного осцилятора може повністю зупинити степеневий в'язкий опір, якщо показник нелінійності є меншим за одиницю. Цей результат узагальнено в [5] на випадок, коли у виразі сили опору, крім степеневі, є лінійна складова. В статті [6] встановлено, що повне припинення вільних коливань нелінійного осцилятора можливе дією сили лінійного в'язкого опору, коли показник степеня у виразі сили пружності є більшим за одиницю, тобто при жорсткій силовій характеристиці. Цілком природно узагальнити ці результати, щоб відповісти на питання, коли відбувається повне припинення вільних коливань подвійно нелінійного осцилятора, в якого степеневі нелінійними є як в'язкий опір, так і пружна характеристика. З цим питанням пов'язана мета даної роботи.

**Метою статті** є аналіз особливостей вільних коливань осцилятора з подвійною степеневою нелінійністю, одна з яких присутня у виразі дисипативної сили, а друга – у виразі сили пружності.

Ставиться задача виявлення умов, за яких вільні коливання будуть обмежені в часі, як в системі з сухим тертям. Її розв'язуємо наближено *методом енергетичного балансу*, який набув поширення в теорії нелінійних коливань [6–8].

**Основні результати.** Вільні коливання описуємо диференціальним рівнянням:

$$m\ddot{x} + k|\dot{x}|^\mu \operatorname{sign} \dot{x} + c|x|^\nu \operatorname{sign} x = 0, \quad (1)$$

при початкових умовах:

$$x(0) = -a_0; \quad \dot{x}(0) = 0. \quad (2)$$

В (1), (2):  $m$  – маса осцилятора;  $k > 0$  – коефіцієнт в'язкого опору;  $c > 0$  – коефіцієнт пружності;  $\mu \geq 0$ ,  $\nu > 0$  – показники степеня;  $x = x(t)$  – переміщення системи у часі  $t$ ;  $a_0$  – стартове відхилення осцилятора від положення рівноваги  $x = 0$ ; крапка над  $x$  означає похідну по  $t$ .

Орієнтуючись на використання методу енергетичного балансу, обчислимо зміну потенціальної енергії  $\Delta\Pi$  і роботу дисипативної сили  $A$  на  $i$ -ому напівциклі коливань, що починається з відхилення  $x = -a_{i-1}$  і закінчується відхиленням  $x = a_i$ . Зміна потенціальної енергії на цьому етапі руху становить:

$$\Delta\Pi = \frac{c}{\nu+1} (a_i^{\nu+1} - a_{i-1}^{\nu+1}). \quad (3)$$

Роботу  $A$  знайдемо наближено. Для цього рух осцилятора описуємо виразом [6]:

$$x(t) = -a \cdot Ca(\nu, 1, \omega t), \quad (4)$$

у якому  $a = \frac{1}{2}(a_{i-1} + a_i)$ ;  $\omega = a^{\frac{\nu-1}{2}} \sqrt{\frac{(1+\nu)c}{2m}}$ ;  $Ca(\nu, 1, \omega t)$  – *Ateb-косинус*.

Роботу дисипативної сили подаємо інтегралом:

$$A = -2k \int_0^b [\dot{x}(t)]^{\mu+1} dt, \quad (5)$$

де  $b = \frac{1+\nu}{2\omega} I$ ;  $I = \frac{\sqrt{\pi}}{\nu+1} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\nu+1}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu+3}{2\nu+2}\right)}$ ;  $\Gamma(z)$  – *гамма-функція*, таблиці якої є в [9, 10].

Підстановкою похідної з (4) по  $t$ :

$$\dot{x}(t) = \frac{2}{1+\nu} a\omega Sa(1, \nu, \omega t)$$

в (5), отримуємо:

$$A = -\frac{2k}{\omega} \left(\frac{2a\omega}{1+\nu}\right)^{\mu+1} \int_0^{\frac{1+\nu}{2} I} Sa^{\mu+1}(1, \nu, z) dz.$$

Із теореми, яка доведена в [11], випливає, що:

$$\int_0^{\frac{1+\nu}{2}} Sa^{\mu+1}(1, \nu, z) dz = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{\mu+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{\nu+1}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu+2}{2} + \frac{1}{\nu+1}\right)}$$

Тому робота подається виразом:

$$A = -\lambda \frac{c}{1+\nu} (a_i + a_{i-1})^{1+\frac{\mu(1+\nu)}{2}}, \quad (6)$$

у якому:

$$\lambda = \frac{k}{c} \left( \frac{c}{2^\nu (1+\nu)m} \right)^{\frac{\mu}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{\mu+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{\nu+1}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu+2}{2} + \frac{1}{\nu+1}\right)}. \quad (7)$$

При  $\mu = 1$  залежності (6), (7) переходять у ті, що надруковано в [6].

Згідно з методом енергетичного балансу  $\Delta\Pi = A$ , що з урахуванням (3) і (6), (7) набуває форму алгебраїчного рівняння:

$$a_i^{\nu+1} = a_{i-1}^{\nu+1} - \lambda (a_i + a_{i-1})^{1+\frac{\mu(1+\nu)}{2}}, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

Введемо позначення  $\xi = a_i / a_{i-1}$ . Верхньому співвідношенню надаємо вигляд:

$$\xi^{\nu+1} + \gamma_i (1 + \xi)^{1+\frac{\mu(1+\nu)}{2}} = 1; \quad i = 1, 2, 3, \dots, \quad (8)$$

де

$$\gamma_i = \frac{\lambda}{a_{i-1}^{\nu - \frac{\mu(1+\nu)}{2}}}. \quad (9)$$

Отже, значення  $\gamma_i$  пов'язане з номером напівциклу  $i$ , а (8) не завжди має додатні корені.

Рішення (8), при  $\mu = 1$ , було раніше виведено в [6]. Не складно переконатись, що при  $\gamma_i \geq 1$  воно не має додатних коренів  $\xi = \xi_i$ , тобто не описує коливальний процес.

Якщо в (9):

$$2\nu - \mu - \nu\mu > 0 \quad (10)$$

або

$$\mu < \mu_* = \frac{2\nu}{1+\nu}, \quad (11)$$

то у міру згасання коливань  $a_{i-1}$  прямує до нуля. Внаслідок цього зростають значення  $\gamma_i$  і настає припинення коливань. Достатньою умовою припинення коливань є виконання нерівностей (10) або (11), коли:

$$a_{i-1} < \lambda^{\frac{2}{2\nu - \mu - \nu\mu}}. \quad (12)$$

Ця нерівність є своєрідною умовою попадання осцилятора в умовну область застою, бо останній розмах коливань дорівнює  $a_{i-1}$ .

Рівняння (8) має замкнені аналітичні розв'язки лише для окремих значень  $\mu$  і  $\nu$ . Такі розв'язки при  $\mu = 1$  було побудовано в [6] для  $\nu = 1$  і  $\nu = 3$ . Тут їх доповнимо іншими.

Випадок  $\mu = 0$ ,  $\nu = 1$ . Рівняння (8) стає квадратичним:

$$\xi^2 + \gamma_i (1 + \xi) - 1 = 0, \quad (13)$$

в якому:

$$\gamma_i = \frac{\lambda}{a_{i-1}}; \quad \lambda = 2 \frac{k}{c}.$$

Рівняння (13) має розв'язок  $\xi = 1 - \gamma_i$ , з якого випливає загальновідома залежність [8], [12]:

$$a_i = a_{i-1} - \frac{2k}{c}, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

Це спадання розмахів коливань в лінійному осциляторі з сухим тертям, коли сила тертя  $F_T = k$ .

Випадок  $\mu = 0$ ,  $\nu = 2$ . Рівняння (8) стає кубічним:

$$\xi^3 + \gamma_i(1 + \xi) - 1 = 0. \quad (14)$$

$$\text{У ньому } \gamma_i = \frac{3k}{ca_{i-1}^2}.$$

Для обчислення розмахів затухаючих коливань із (14) одержуємо рекурентне співвідношення:

$$a_i = a_{i-1} \left( \sqrt[3]{s-0,5q} - \sqrt[3]{s+0,5q} \right), \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (15)$$

$$\text{Тут } s = \sqrt{\left(\frac{\gamma_i}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}, \quad q = \gamma_i - 1.$$

Згідно з (12) коливання припиняться, коли  $a_{i-1} \leq \sqrt{3k/c}$ .

Користуючись формулою (15), проведемо розрахунок  $a_i$  при  $m = 1$  кг,  $c = 20000$  Нм<sup>-2</sup>,  $k = 4$  Н,  $a_0 = 0,05$  м. Для таких числових даних умовою припинення коливань є  $a_i \leq 0,02449$  м. Обчислені розмахи коливань  $a_i$  записано в табл. 1.

Таблиця 1 – Значення  $a_i$  при  $\nu = 2$

$i$	0	1	2	3
$100a_i$ , м	5,0000	4,1261	3,0147	1,2366

Разом з  $a_0$  тут маємо лише чотири розмахи коливань.

Випадок  $\mu = 0$ ,  $\nu = 3$ . Рівняння (8), після скорочення на  $1 + \xi$ , стає кубічним і набуває вигляду:

$$\xi^3 - \xi^2 + \xi + (\gamma_i - 1) = 0.$$

Воно має аналітичний розв'язок:

$$\xi = \sqrt[3]{Q - \frac{\gamma_i}{2} + \frac{10}{27}} - \sqrt[3]{Q + \frac{\gamma_i}{2} - \frac{10}{27}} + \frac{1}{3}, \quad (16)$$

де

$$Q = \sqrt{\left(\frac{2}{9}\right)^3 + \frac{1}{4}\left(\gamma_i - \frac{20}{27}\right)^2}; \quad \gamma_i = \frac{4k}{ca_{i-1}^3}.$$

Обчисливши  $\xi$ , потім легко знайти  $a_i$ , бо  $a_i = \xi a_{i-1}$ .

Достатньою умовою припинення коливань є виконання нерівності:

$$a_{i-1} \leq \sqrt[3]{4k/c}.$$

В якості прикладу, обчислимо  $a_i$  при  $m = 1$  кг;  $c = 4,5 \cdot 10^5$  Н · м<sup>-3</sup>;  $k = 4$  Н;  $a_0 = 0,05$  м. Для таких числових даних коливання припиняються, коли  $a_{i-1} \leq 0,03288$  м. Одержані за формулою (16) значення  $a_i$  запишемо до табл. 2.

Таблиця 2 – Значення  $a_i$  при  $\nu = 3$

$i$	0	1	2
$100a_i$ , м	5,0000	4,1595	2,7199

Тут розмахів коливань ще менше, ніж у попередньому прикладі.

При довільних  $\mu$  і  $\nu$  рівняння (8) доводиться розв'язувати чисельними методами. Із них виділено *схему Ньютона*, за якою:

$$\xi_{j+1} = \xi_j - \frac{\xi_j^{\nu+1} + \gamma_i(1 + \xi_j)^{1 + \frac{\mu(1+\nu)}{2}} + 1}{(1 + \nu)\xi_j^\nu + \frac{2 + \mu + \mu\nu}{2}\gamma_i(1 + \xi_j)^{\frac{\mu(1+\nu)}{2}}}; \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (17)$$

Починати ітерації за  $j$  можна зі значення  $\xi_0 = 1$ .

Ітераційна процедура (17) має швидку збіжність, що спрощує наближене обчислення коренів рівняння (8).

Користуючись формулою (17), обчислимо розмахи коливань при:  $m = 1 \text{ кг}$ ;  $c = 20000 \text{ Н/м}^v$ ;  $k = 4 \text{ Н(с/м)}^\mu$ ;  $v = 2,4$ ;  $\mu = 1,2$  і  $\mu = 1,6$ .

Результати розрахунку при  $\mu = 1,2$ , коли вільні коливання обмежені в часі, записано до табл. 3. В цьому випадку:

$$\mu < \mu_* = 4/3; \Gamma\left(\frac{\mu+2}{2}\right) \approx 0,893515; \Gamma\left(\frac{1}{v+1}\right) \approx 3,054502; \Gamma\left(\frac{\mu+2}{2} + \frac{1}{v+1}\right) \approx 0,959766; \gamma_i = 0,038296 / (a_{i-1})^{0,36}.$$

В розрахунках за формулою (17) провели по 5 ітерацій.

Таблиця 3 – Значення  $a_i$  при  $v = 2,4$ ,  $\mu = 1,2$ 

$i$	$10^3 a_i, \text{ м}$	$i$	$10^3 a_i, \text{ м}$	$i$	$10^3 a_i, \text{ м}$
0	50,000	4	12,785	8	0,889
1	37,623	5	7,955	9	0,238
2	27,422	6	4,510	10	0,021
3	19,207	7	2,231	11	–

Як бачимо, тут вільні коливання складаються з обмеженої кількості розмахів.

У випадку, коли  $\mu = 1,6 > \mu_*$ , кількість розмахів не обмежена. Для такого показника:  $\Gamma\left(\frac{\mu+2}{2}\right) \approx 0,931384$ ;  $\Gamma\left(\frac{\mu+2}{2} + \frac{1}{v+1}\right) \approx 1,043517$ ;  $\gamma_i = 0,149370 \cdot a_{i-1}^{0,32}$  і рівняння (8) має завжди додатні корені. Обчислені значення розмахів на початку руху записано в табл. 4.

Таблиця 4 – Значення  $a_i$  при  $v = 2,4$ ,  $\mu = 1,6$ 

$i$	$10^3 a_i, \text{ м}$	$i$	$10^3 a_i, \text{ м}$	$i$	$10^3 a_i, \text{ м}$
0	50,000	3	27,347	6	16,495
1	40,354	4	22,893	7	14,171
2	33,020	5	19,349	8	12,260

Для порівняння, на рис. 1 і рис. 2 наведено графіки руху осцилятора, отримані чисельним інтегруванням рівняння (1) при  $\mu = 1,2$ .

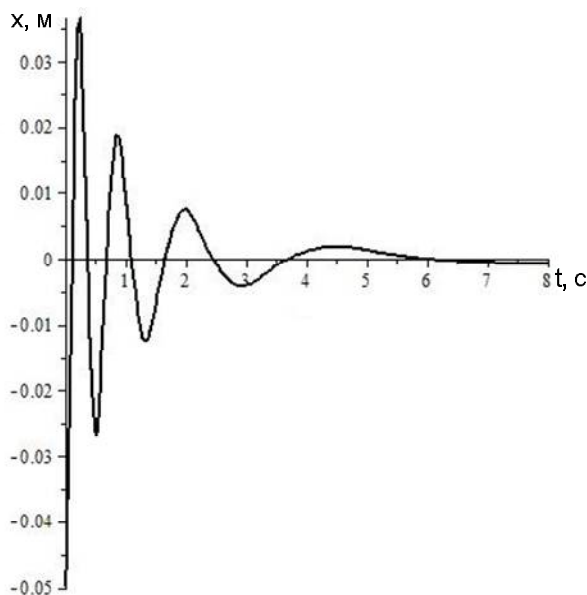
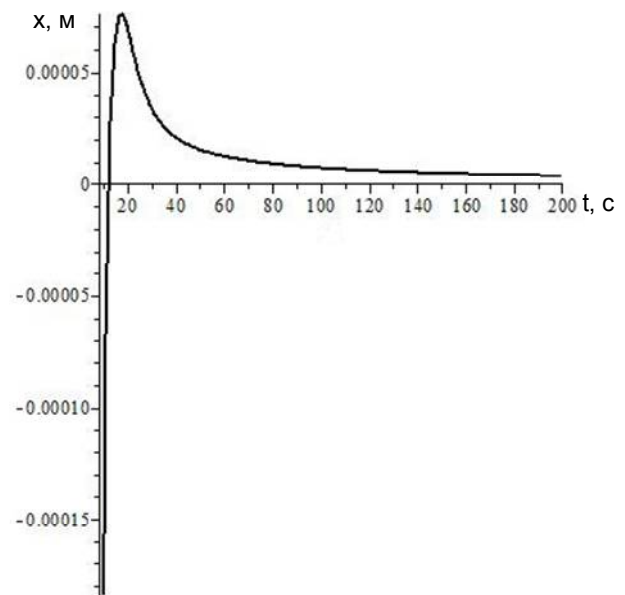
Рис. 1 – Затухаючі коливання при  $\mu = 1,2$ ,  $\nu = 2,4$ .

Рис. 2 – Монотонний рух осцилятора.

На рис. 3 зображено результати чисельного інтегрування рівняння (1) при  $\mu = 1,6$ . Тут кількість циклів не-

скінченна і вільні затухаючі коливання не обмежені в часі.

**Перспективи подальших досліджень.** Викладений спосіб аналізу стосувався руху степенево нелінійних осциляторів без лінійної складової у виразі сили пружності. В теорії нелінійних коливань часто домінуючою є лінійна складова, а нелінійна – помножена на малий параметр. Встановлення умов припинення в'язким опором вільних коливань таких квазілінійних систем становить подальшу перспективу.

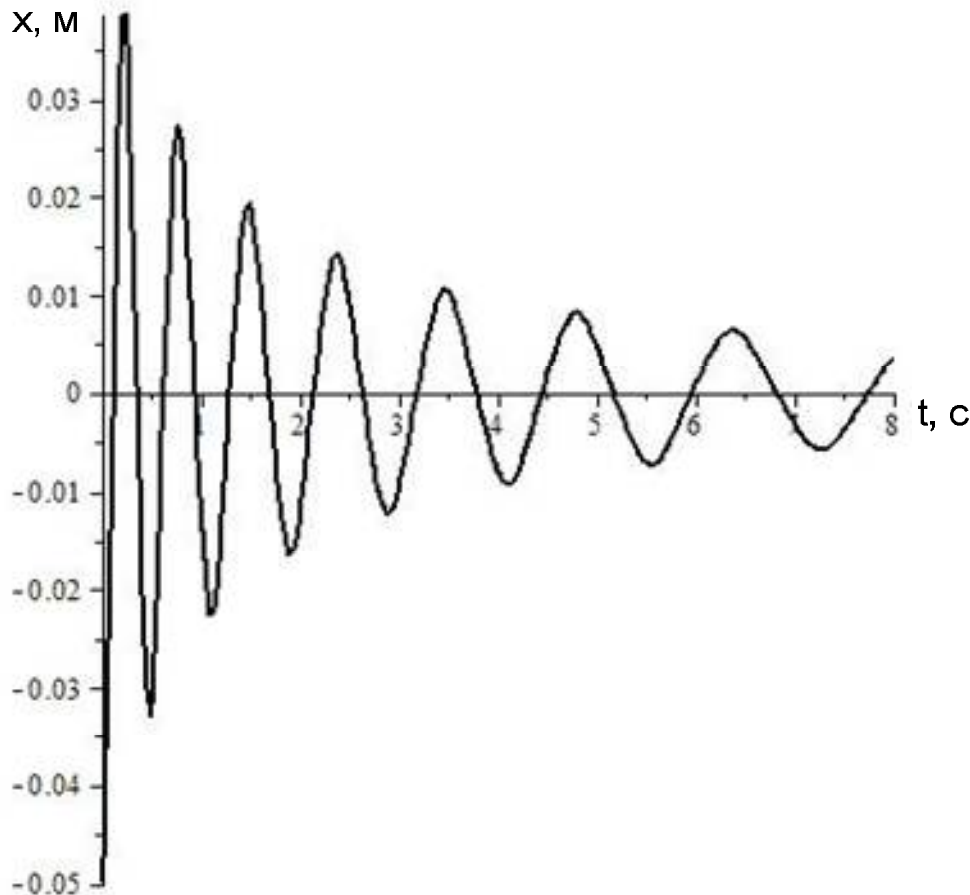


Рис. 3 – Затухаючі коливання при  $\mu=1,6$ ,  $\nu=2,4$ .

**Висновки.** Проведене дослідження показало, що, подібно до дії сили сухого тертя, степенево нелінійний в'язкий опір теж може повністю зупинити коливальний рух осцилятора зі степенево нелінійною характеристикою пружності. Але це відбувається лише за певних співвідношень показників нелінійностей у виразах сил опору і пружності. При виконанні вище встановлених умов вільні затухаючі коливання осцилятора мають скінченну кількість циклів і обмежені в часі.

#### Список літератури

1. Аврамов К. В., Михлин Ю. В. Нелинейная динамика упругих систем. Модели, методы, явления.– Москва – Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2015. – Т. 1. – 716 с.
2. Пукач П. Я. Якісні методи дослідження нелінійних коливальних систем. – Львів : Львівська політехніка, 2014. – 208 с.
3. Ольшанський В. П., Ольшанський С. В., Тищенко Л. М. Динаміка дисипативних осциляторів. – Харків : Міськдрук, 2016. – 264 с.
4. Ольшанський В. П., Ольшанський С. В. Про обмежену тривалість вільних коливань осцилятора з нелінійно в'язким опором // Вісник НТУ «ХП». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХП», 2019. – № 22 (1347). – С. 68 – 75.
5. Ольшанський В. П., Ольшанський С. В. Вплив нелінійної складової в'язкого опору на тривалість вільних коливань осцилятора // Вісник НТУ «ХП». Серія : Динаміка і міцність машин. – Харків : НТУ «ХП», 2019. – № 2. – С. 41 – 47.
6. Ольшанський В. П., Ольшанський С. В. Про можливість застою вільних коливань нелінійно пружного осцилятора з лінійним в'язким опором // Вібрації в техніці та технологіях : Всеукраїнський науково-технічний журнал. – 2019. – № 4 (95). – С. 36 – 44.
7. Пановко Я. Г. Введение в теорию механических колебаний. – М. : Наука, 1980. – 270 с.
8. Василенко М. В., Алексейчук О. М. Теорія коливань і стійкості руху. – Київ : Вища школа, 2004. – 525 с.
9. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям (с формулами, графиками и математическими таблицами). – М. : Наука, 1979. – 832 с.
10. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции. – Москва : Наука, 1977. – 344 с.

11. Драгомирецька Х. Т. Про інтегрування спеціальних Атеб-функцій // Вісник Львівського університету. Серія : Механіко – математична. – 1997. – Вип. 46. – С. 108 – 110.
12. Бабаков И. М. Теория колебаний. – Москва : Дрофа, 2004. – 591 с.

## References (transliterated)

1. Avramov K. V., Mikhlin Yu. V. *Nelineynaya dinamika uprugikh system. Modeli, metody, yavleniya* [Nonlinear dynamics of elastic systems. Models, methods phenomena]. Moscow-Izhevsk, Institute komp'yuternykh issledovaniy Publ., 2015, vol. 1. 716 p.
2. Pukach P. Ya. *Yakisni metody doslidzhennya nelineynykh kolyval'nykh system* [Qualitative methods for studying nonlinear oscillation systems]. Lviv, Lvivs'ka politekhnika, 2014. 288 p.
3. Ol'shans'kyy V. P., Ol'shans'kyy S. V., Tishhenko L. M. *Dynamika dysypatyvnykh ostsyl'yatoriv* [Dynamics of dissipative oscillators]. Kharkiv, Mis'kdruk Publ., 2016. 264 p.
4. Ol'shans'kyy V. P., Ol'shans'kyy S. V. Pro obmezhenу tryvalist' vil'nykh kolyvan' ostsyl'yatora z nelineyno v'yazkym oporom [On limited duration of oscillations of free oscillator with nonlinear viscous resistance]. *Visnyk Natsional'nogo tekhnichnogo universytetu «KhPI». Seriya : Matematichne modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series : Mathematical modeling in engineering and technology]. Kharkiv, NTU "KhPI" Publ., 2019, no. 22 (1347), pp. 68–75.
5. Ol'shans'kyy V. P., Ol'shans'kyy S. V. Vplyv nelineynoyi skladovoyi v'yazkogo oporu na tryvalist' vil'nykh kolyvan' ostsyl'yatora [The influence of the nonlinear component of viscous resistance on the duration of free oscillations of the oscillator]. *Visnyk Natsional'nogo tekhnichnogo universytetu «KhPI». Seriya : Dynamika i matsnist' mashyn* [Bulletin of the NTU "KhPI". Series: Dynamics and strength of machines]. Kharkiv, NTU "KhPI" Publ., 2019, no. 2, pp. 41–47.
6. Ol'shans'kyy V. P., Ol'shans'kyy S. V. Pro mozhyvist' zastoyu vil'nykh kolyvan' nelineyno pruzhnogo ostsyl'yatora z liniynym v'yazkym oporom [On the possibility of stagnation of free oscillations of a nonlinearly elastic oscillator with a linear viscous resistance]. *Vibratsiyi v tekhnitsi ta tekhnologiyakh : Vseukrayins'kyy naukovo-tekhnichnyy zhurnal* [Vibration in engineering and technology : all-Ukrainian scientific and technical journal]. 2019, no. 4 (95), pp. 36–44.
7. Panovko Ya. G. *Vvedenie v teoriyu mekhanicheskikh kolebanii* [Introduction to the theory of mechanical vibrations]. Moscow, Nauka Publ., 1980. 270 p.
8. Vasylenko M. V., Alekseychuk O. M. *Teoriya kolyvan' i stiykosti rukhu* [Theory of vibrations and stability of motion]. Kyiv, Vyshha shkola Publ., 2004. 525 p.
9. Abramovits M., Stigan I. *Spravochnik po spetsial'nym funktsiyam (s formulami, grafikami i matematicheskimi tablitsami)* [Handbook of special functions (with formulas, graphs and mathematical tables)]. Moscow, Nauka Publ., 1979. 832 p.
10. Yanke E., Emde F., Lyosh F. *Spetsial'nye funktsii* [Special functions]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 344 p.
11. Dragomyrets'ka Kh. T. Pro integruvannya spetsial'nykh Ateb-funktsiy [On integration of special Ateb-functions]. *Visnyk Lvivs'kogo universytetu. Seriya : Vtkhaniko-matematychna* [Bulletin of the Lviv University. Series : Mechanics and mathematics]. 1997, vol. 46, pp. 108–110.
12. Babakov I. M. *Teoriya kolebanii* [Theory of fluctuations]. Moscow, Drofa Publ., 2004. 591 p.

Надійшла (received) 09.09.2020

## Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

**Ольшанський Василь Павлович** – доктор фізико-математичних наук, професор, Харківський національний технічний університет сільського господарства імені П. Василенка, м. Харків; тел.: (066) 010-09-55; e-mail: OlshanskiyVP@gmail.com.

**Ольшанский Василий Павлович** – доктор физико-математических наук, профессор, Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства имени П. Василенка, г. Харьков; тел.: (066) 010-09-55; e-mail: OlshanskiyVP@gmail.com.

**Olshanskiy Vasiliy Pavlovich** – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Petro Vasylenko Kharkiv National Technical University of Agriculture, Kharkiv; tel.: (066) 010-09-55; e-mail: OlshanskiyVP@gmail.com.

**Ольшанський Станіслав Васильович** – кандидат фізико-математичних наук, Харківський національний технічний університет сільського господарства імені П. Василенка, м. Харків; тел.: (057) 343-29-41; e-mail: stasolsh77@gmail.com.

**Ольшанский Станислав Васильевич** – кандидат физико-математических наук, Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства имени П. Василенка, г. Харьков; тел.: (057) 343-29-41; e-mail: stasolsh77@gmail.com.

**Olshanskiy Stanislav Vasilevich** – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Petro Vasylenko Kharkiv National Technical University of Agriculture, Kharkiv; tel.: (057) 343-29-41; e-mail: stasolsh77@gmail.com.