

А. П. КОЖУШКО

ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНЕ ТА РОЗРАХУНКОВЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАГАСАННЯ КОЛИВАНЬ РІДИНИ В ЄМНОСТІ З ВІЛЬНОЮ ПОВЕРХНЕЮ

Розкриття питань, пов'язаних з вирішенням задач дослідження руху рідини в конструкціях різноманітної форми, які частково заповнені рідиною, завжди було актуальним. Це пов'язано, зокрема, з необхідністю забезпечення поперечної стійкості руху об'єктів, в яких відбувається транспортування рідини. Сучасні методи та засоби дослідження, які дозволяють описати рух рідини в ємності, доволі складні та вимагають від науковця поглиблених знань. Тому створення математичного алгоритму, який би був простим та забезпечував достатню точність визначення коливального руху в ємності, є доцільним. Кожна розробка нового математичного алгоритму вимагає проведення експериментальних досліджень з її перевірки на адекватність. Метою даної роботи є підтвердження спроможності використання створеного математичного апарату для визначення основних параметрів вільних коливань залежно від рівня наповнення рідиною в прямокутній ємності призматичної форми. Методика проведення експериментального дослідження передбачала перевірку адекватності використання математичних алгоритмів при визначенні частот вільних коливань рідини в ємності шляхом порівняння теоретичних та експериментальних значень періодів коливань, а також визначення декременту загасання для рідини різної в'язкості. Як результат доведено адекватність використання формул, які визначають частоти вільних коливань рідини, максимальна похибка не перевищує 4,35 %. Експериментальним шляхом, а також з застосуванням теоретичних моделей руху в'язкої рідини у так званих парціальних поверхневих прошарках, визначено декремент затухання коливань для трьох рідин різної в'язкості: для води, для 20 % розчину цукру у воді, для рослинної олії. На основі експериментальних досліджень визначено амплітуди та частоти вимушених коливань для різних типів рідин шляхом побудови амплітудно-частотної характеристики. Розрахунковим шляхом показано, як впливає декремент загасання рідини на величину горизонтального зсуву поверхневого шару рідини в цистерні при її транспортуванні колісним трактором.

Ключові слова: ємність, коливання, частота, декремент, амплітуда, вільна поверхня рідини.

А. П. КОЖУШКО

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ И РАСЧЕТНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАТУХАНИЯ КОЛЕБАНИЙ ЖИДКОСТИ В ЕМКОСТЯХ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Раскрытие вопросов, связанных с решением задач исследования движения жидкости в частично заполненных конструкциях различной формы, всегда было актуальным. Это связано, в частности, с необходимостью обеспечения продольной и поперечной устойчивости движения объектов, в которых происходит транспортировка жидкости. Современные методы и средства исследования, которые позволяют описать движение жидкости в емкости, чрезмерно сложны и требуют от ученого углубленных знаний. Поэтому создание математического алгоритма, который бы был простым и при этом обеспечивал достаточную точность определения колебательного движения в емкости, целесообразно. Каждая разработка нового математического алгоритма требует проведения экспериментальных исследований для проверки ее адекватности. Целью данной работы является подтверждение возможности использования созданного математического аппарата для определения основных параметров свободных колебаний в зависимости от уровня наполнения жидкостью в прямоугольной емкости призматической формы. Методика проведения экспериментального исследования предусматривала проверку адекватности использования математических алгоритмов при определении частот свободных колебаний жидкости в емкости путем сравнения теоретических и экспериментальных значений периодов колебаний, а также определение декремента затухания колебаний для жидкости различной вязкости. В результате доказана адекватность формул для определения частот свободных колебаний жидкости в емкости; максимальная погрешность не превышает 4,35%. Экспериментальным путем, а также при использовании теоретических моделей движения вязкой жидкости в так называемых парциальных поверхностных слоях, определены декременты затухания колебаний для трех жидкостей различной вязкости: для воды, для 20% раствора сахара в воде и для растительного масла. На основе экспериментальных исследований определены амплитуды и частоты вынужденных колебаний различных типов жидкостей путем построения амплитудно-частотной характеристики. Расчетным путем показано, как влияет декремент затухания жидкости на величину горизонтального смещения поверхностного слоя жидкости в цистерне при ее транспортировке колесным трактором.

Ключевые слова: емкость, колебания, частота, декремент, амплитуда, свободная поверхность жидкости.

А. П. КОЖУШКО

EXPERIMENTAL AND COMPUTATIONAL STUDY OF LIQUID OSCILLATION DAMPING IN A FREE SURFACE VESSEL

Studying the issues related to solving the problems of the movement of fluid in partially filled structures of various shapes has always been relevant. This is due, in particular, to the need to ensure the longitudinal and lateral stability of the movement of objects in which the liquid is transported. Contemporary methods and research tools that allow describing the movement of liquid in a container are overly complex and require in-depth knowledge from a scientist. Therefore, development of a mathematical algorithm that would be simple and at the same time ensure sufficient accuracy in determining the oscillatory motion in a container is advisable. Each development of a new mathematical algorithm requires experimental research to verify its adequacy. The purpose of this work is to confirm the feasibility of using the created mathematical apparatus for determining the main parameters of free vibrations depending on the level of liquid in a rectangular prismatic container. The experimental research methodology provides for checking the adequacy of the mathematical algorithms in determining the frequencies of free oscillations of liquid in a container by comparing the theoretical and experimental values of the oscillation periods, as well as determining the damping decrement of oscillations for liquids of different viscosity. As a result, the adequacy of the formulas for determining the frequencies of free oscillations of liquid in a container is proved; the maximum error does not exceed 4.35%. The decrements of vibration damping are determined experimentally, as well as using theoretical models of the motion of viscous liquid in the so-called partial surface layers, for three liquids of different viscosity, namely, for water, for 20% sugar and water solution, and for vegetable oil. On the basis of experimental studies, the amplitudes and frequencies of forced vibrations of various types of liquids are determined by constructing an amplitude-frequency characteristic. It is shown by calculation how the damping decrement of the liquid affects the value of the horizontal displacement of the surface layer of the liquid in the tank during its transportation by a wheeled tractor.

Key words: vessel, oscillations, frequency, decrement, amplitude, free liquid surface.

Вступ. В наш час великої популярності набуло дослідження руху рідини в конструкціях різноманітної фо-

© А. П. Кожушко, 2020

рми, які, зазвичай, частково заповнені рідиною. Такі дослідження ведуться в кораблебудуванні, транспортному машинобудуванні, авіаційній та ракетно-космічній техніці. Однією з важливих науково-технічних проблем є забезпечення поздовжньої та поперечної стійкості руху об'єктів з рідиною. Поздовжні та поперечні коливання конструкції об'єктів, частково заповнених рідиною, при інтенсивному русі можуть призвести до збільшення динамічного навантаження, аварійної ситуації тощо; зважаючи на це, виникає необхідність ще на етапі створення нової техніки моделювати складний рух рідини в ємностях та досліджувати її вплив на збереження стійкості.

Аналіз останніх досліджень. Вирішення проблеми дослідження руху об'єкту з рідиною загалом зводиться до визначення властивостей рідини, яка рухається з плином часу в замкнутій ємності. При дослідженні руху часток суцільного середовища зазвичай використовують два методи – *Ейлера* та *Лагранжа* [1, 2]:

Метод Ейлера базується на прив'язуванні всіх змінних величин до координат нерухомого середовища. Тобто в кожній точці простору (x, y, z) вивчаються параметри руху у будь-який момент часу t . Таким чином, швидкість рідини в будь-якій точці простору повинна бути функцією чотирьох змінних – x, y, z, t . Таке формулювання свідчить про те, що траєкторія руху часток не відслідковується. Стан рідини оцінюється лише векторним полем швидкостей. *Метод Лагранжа* ґрунтується на виборі початкових змінних, тобто початкових координат частки рідини в певний момент часу. З плином часу ця частка зміщується в просторі, і координати нерухомого простору представляють собою функції початкових координат частки. Тобто рух рідини за певний час відслідковується за траєкторіями її часток.

На сьогоднішній день існує декілька засобів для вирішення задач з дослідження руху рідини [3]: *модель ідеальної нестискуваної рідини* (рівняння Ейлера); *квазігідродинамічні моделі*; *модель в'язкої нестискуваної рідини* (рівняння Нав'є – Стокса) та інші. Окрім того, існують моделі, які базуються на обчисленні стохастичних диференціальних рівнянь. Їх зазвичай застосовують при дослідженні руху рідини в турбулентному режимі.

Опис та застосування перелічених вище моделей відбувається за допомогою нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними. При обчисленні необхідно також вводити крайові умови. Це обумовлено наявністю твердих стінок та вільної поверхні рідини. Окрім того, суттєві труднощі перед науковцями виникають на етапі перетворення континуальної моделі в модель зі звичайними диференціальними рівняннями. Тому при виборі моделі для дослідження руху рідини необхідно виходити з поставлених задач.

При огляді робіт [4, 5], пов'язаних з моделлю ідеальної нестискуваної рідини, відмітимо, що вона найбільш популярна серед науковців, що і не дивно, адже під терміном *ідеальна* розуміється рідина, яка позбавлена в'язкості та теплопровідності. Оскільки рідина може мати різну в'язкість, що певним чином впливає на рух, то му обирати цю модель як базову при розгляді динаміки складного руху об'єкту не є доречним.

Розглядаючи *систему квазігідродинамічних рівнянь*, звернемо увагу на те, що вони є модифікацією рівнянь Нав'є – Стокса. Відмінність стосується лише врахування складових дисипативної дії. З аналізу робіт [6, 7] встановлено, що відносно мала величина дисипативної дії дає змогу проводити аналіз течії, яка описується класичними моделями гідродинаміки. Але оскільки тертя в замкнутій ємності, яка не є проточною, відсутнє (окрім тертя рідини об стінки ємності при коливаннях), то використовувати таку модель недоцільно.

Отже, при описі руху в'язкої нестискуваної рідини в замкнутій ємності доцільно використовувати математичну модель, яка базується на рівнянні Нав'є – Стокса. Зазначене рівняння має складну математичну природу, оскільки при його розв'язанні необхідно враховувати в'язкість рідини, що накладає певні труднощі при формуванні крайових умов. Тому аналітичний розв'язок до сьогоднішнього дня не знайдено, і більшість науковців застосовують чисельні методи розв'язання [1 – 3, 8]. Як вказано в роботі [8], більшість ефективних чисельних методів розв'язання рівняння Нав'є – Стокса ґрунтується на розв'язках нестационарної задачі для сталого стану течії.

Відомі роботи [1, 9], які ґрунтувалися на відомих припущеннях щодо малих коливань в'язкої рідини в замкнутій ємності. Це дозволило науковцям використовувати лінеаризовані рівняння Нав'є – Стокса, або застосовувати *малі числа Рейнольдса* [10] (тобто досліджувати рідину з великою в'язкістю); при цьому рівняння Нав'є – Стокса зводиться до моделі ідеальної нестискуваної рідини. Виділимо також метод *штучної стисненості* [11], який зводиться до додавання штучного доданка, що дорівнює нулю при розв'язанні у сталому часі. Це один з перших чисельних методів розв'язання в природних фізичних змінних.

Також одним з перших та, як виявилось, найбільш популярних став *метод часток в осередку*. Цей метод ґрунтується на перевагах Ейлерова та Лагранжевого підходів. Тобто розв'язок базується на дослідженні сукупності часток фіксованої маси (підхід Лагранжа), які рухаються скрізь нерухому сітку (підхід Ейлера) [12]. Таким чином, частки визначають природні параметри рідини (швидкість, масу), а сітка встановлює параметри поля (тиск, щільність). Даний метод дозволяє відстежувати динаміку багатоконпонентних середовищ, але недоліком цього методу є те, що він потребує великі обсяги обчислювальних операцій.

На практиці широкого загалу набув *метод розщеплення* [13], який використовує розщеплення фізичних процесів в часовому континуумі, після чого вирішуються стаціонарні задачі. На думку автора [14] цей метод має велику перспективу при моделюванні в'язких потоків, дослідженні течії розрідженого газу та турбулентності.

Як видно з аналізу, обчислення рівняння руху в'язкої нестискуваної рідини в ємності носить велику практичну значимість, тому створення або модернізація вже існуючих чисельних методів продовжується і сьогодні. Подальший розвиток алгоритмів розв'язання шляхом удосконалення розрахункових моделей з використанням апроксимованих функцій більшого порядку призведе на кінцевому етапі до труднощів їх реалізації. Таке спосте-

реження вказує на обмежену здатність їх впровадження в інженерно-конструкторську діяльність при формуванні досліджень руху об'єкту з рідиною.

З вигідної сторони відрізняється робота [15], в якій автори запропонували при розгляді динаміки руху об'єкту з рідким вантажем використовувати комбіновану модель, яка об'єднує рівняння Нав'є – Стокса з рівняннями *поверхневих хвиль Релея*. Такий підхід ґрунтується на так званій *потенціальній постановці задачі*, при якій коливальний рух рідини (за виключенням вузького пристінного шару) вважався безвихровим, та використанні *методу парціальних осциляторів*, який дозволив для низькочастотних коливань замінити континуальну модель рідини дискретною моделлю. Саме такий підхід, на переконання авторів зазначеної роботи, необхідно використовувати в усіх інших технічних застосуваннях, але число осциляторів повинно обиратися з урахуванням основної постановки задач. Крім того, на відміну від розглянутих вище моделей, де важливо врахувати реальну форму ємності, доцільно проводити еквівалентну заміну реальної форми (циліндричної, овальної, *валізної* і т.п.) на форму прямокутного паралелепіпеда. Принципом приведення є збереження розмірів вільної поверхні рідини та маси рідини в цистерні.

Постановка задачі. Окреслений в роботі [15] підхід має великі перспективи щодо вирішення актуальних інженерно-конструкторських задач, тому необхідним є підтвердження доцільності його використання шляхом проведення експериментального дослідження.

В ході експериментальних досліджень вирішувались наступні задачі:

- перевірити адекватність використання математичних алгоритмів при визначенні частот вільних коливань рідини в ємності шляхом порівняння теоретичних та експериментальних значень періодів коливань;
- визначити декремент загасання коливань для рідини різної в'язкості.

Об'єктом експериментальних досліджень є ємність прямокутної форми (рис. 1, *a*) з габаритними значеннями $0,3 \text{ (} D = 2L \text{)} \times 0,2 \text{ (} Ш = 2l \text{)} \times 0,2 \text{ (} B = H \text{)} \text{ м}$, а також три види рідини (рис. 1, *б – з*): 20 % розчин цукру у воді, вода, рослинна (соняшникова) олія.

*a**б**в**з**a**б*

Рис. 1 – Об'єкти експериментальних досліджень:

- a* – ємність; *б* – ємність з 20 % водним розчином цукру (щільність $\rho = 1095 \text{ кг/м}^3$);
- в* – ємність з водою ($\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$); *з* – ємність з рослинною олією ($\rho = 920 \text{ кг/м}^3$).

Рис. 2 – Ареометри, які використовуються:

- a* – ТУ 25-11.1209-75;
- б* – АНТ-1 ДСТУ ГОСТ 18481:2009.

Проведення експериментальних досліджень відбувалось при температурах навколишнього середовища

та рідини +20...25 °С. Дослідження проводилось на рівній твердій поверхні з нахилом, меншим за 1 град, як в поздовжній, так і в поперечній площинах.

Порядок проведення експериментальних досліджень був наступний:

1. Прямокутна ємність встановлюється на дві дерев'яні підставки (висотою 0,025 м), що розміщені на рівній поверхні паралельно одна до одної. При дослідженні поздовжніх коливань підставки встановлювались на грані довжиною 0,2 м, а при дослідженні поперечних коливань – на грані довжиною 0,3 м.

2. Ємність заповнюється конкретною рідиною на висоту $h = 0,15$ м, 0,1 м та 0,05 м.

3. Одна з підставок прибирається, створюючи кінематичне збурення рідини в ємності, та реєструються коливання рідини в трьох серіях дослідів.

Весь процес експериментальних досліджень фіксується на відеокамеру, яка встановлюється на штатив. Кожен з дослідів проводився 5 разів.

В ході випробувань використовується два ареометри:

– для води та 20 % розчину води і цукру – ТУ 25-11.1209-75 (рис. 2, а);

– для рослинної олії – АНТ-1 ДСТУ ГОСТ 18481:2009 (рис. 2, б).

Теоретичні результати досліджень з визначення частоти вільних коливань рідини беруться з роботи [15], де згідно з результатами перетворень та введенням певних допущень (крайових умов) отримано наступні формули для частот вільних коливань у поперечній та поздовжній площинах:

$$v_m = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{g \cdot \frac{0,5+m}{\pi l} \cdot \operatorname{th} \left[\pi \cdot (0,5+m) \cdot \frac{h}{l} \right] \cdot \left(1 + \frac{\sigma}{\rho g} \cdot \left[\frac{\pi \cdot (0,5+m)}{l} \right]^2 \right)}, m = 0, 1, 2, \dots;$$

$$v_k = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{g \cdot \frac{0,5+k}{\pi L} \cdot \operatorname{th} \left[\pi \cdot (0,5+k) \cdot \frac{h}{L} \right] \cdot \left(1 + \frac{\sigma}{\rho g} \cdot \left[\frac{\pi \cdot (0,5+k)}{L} \right]^2 \right)}, k = 0, 1, 2, \dots$$

В наведених рівняннях m та k відповідають певному шару рідини, що коливається; g – прискорення вільного падіння; σ – коефіцієнт поверхневого натягу. Для перевірки адекватності математичної моделі достатнім буде визначення частоти першого шару рідини ($m = 0$ та $k = 0$), який має суттєво більшу масу в порівнянні з іншими шарами рідини. Тоді теоретична частота вільних коливань рідини для першого шару рідини розраховується так:

$$v_{m=0}^T = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{g \cdot \frac{1}{2\pi l} \cdot \operatorname{th} \left[\frac{\pi h}{2l} \right] \cdot \left(1 + \frac{\sigma}{\rho g} \cdot \left[\frac{\pi}{2l} \right]^2 \right)}; \quad (1)$$

$$v_{k=0}^T = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{g \cdot \frac{1}{2\pi L} \cdot \operatorname{th} \left[\frac{\pi h}{2L} \right] \cdot \left(1 + \frac{\sigma}{\rho g} \cdot \left[\frac{\pi}{2L} \right]^2 \right)}. \quad (2)$$

Зважаючи на значення габаритних розмірів ємності ($l = 0.15$ – напівдовжина та $L = 0.1$ – напівширина), обчислюємо частоту вільних коливань; результати зведемо до табл. 1.

Таблиця 1 – Результати теоретичного розрахунку основних частот вільних коливань рідини

| Рідина | Висота наповнення, м | Теоретичне значення частоти вільних коливань рідини v^T , Гц | Коефіцієнт поверхневого натягу рідини σ , Н/м | Щільність рідини ρ , кг/м ³ | Кінематична в'язкість, сСт |
|--------------------------|----------------------|----------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------|---------------------------------------------|----------------------------|
| 20% розчин води та цукру | Поперечні коливання | | 0.0504 [17] | 1095 | 1.79 [18] |
| | 0.15 / 0.1 / 0.05 | 1.959 / 1.893 / 1.6 | | | |
| | Поздовжні коливання | | | | |
| | 0.15 / 0.1 / 0.05 | 1.545 / 1.426 / 1.118 | | | |
| Вода | Поперечні коливання | | 0.07422 | 1000 | 1.00 |
| | 0.15 / 0.1 / 0.05 | 1.959 / 1.893 / 1.601 | | | |
| | Поздовжні коливання | | | | |
| | 0.15 / 0.1 / 0.05 | 1.545 / 1.426 / 1.119 | | | |
| Рослинна олія | Поперечні коливання | | 0.03634 [19] | 920 | 60.30 [20] |
| | 0.15 / 0.1 / 0.05 | 1.959 / 1.893 / 1.6 | | | |
| | Поздовжні коливання | | | | |
| | 0.15 / 0.1 / 0.05 | 1.545 / 1.426 / 1.118 | | | |

Аналізуючи дані з табл. 1, стає відомо, що на основні частоти вільних коливань коефіцієнт поверхневого натягу та щільності рідини (для 3-ох рідин, що досліджуються) не впливають. Причина – мале значення коефіцієнта поверхневого натягу рідини нівелює у наведених формулах свій вплив, а також вплив щільності на частоту відповідних коливань.

Результати експериментальних досліджень з визначення основної частоти вільних коливань рідин. Відлік періодів коливань рідини відбувався у моменти часу, коли вільна поверхня рідини перетинала біля торцевої стінки лінію середнього рівня та рухалася у вертикальному напрямі з максимальною швидкістю, що унеможливило суттєву похибку. Отримані результати експериментального дослідження зведені до табл. 2 – 4.

Таблиця 2 – Поперечні коливання рідини у ємності, рідина – 20 % водний розчин цукру

| № досліду | Період коливань рідини, який відображається кількістю кадрів | | | | | Кіл-ть кадрів, яка припадає на один період | Періоди експер. коливань рідини T_m^E , с | Періоди теор. коливань рідини T_m^T , с | Відхилення, % |
|--------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|--------|--------|--------|--------|--------------------------------------------|---------------------------------------------|-------------------------------------------|---------------|
| | 0 | 2π | 4π | 6π | 8π | | | | |
| Висота наповнення $h = 0.15$ м | | | | | | | | | |
| 1 | 0 | 13 | 25 | 37 | 47 | 11.75 | 0.489 | 0.510 | +3.92 |
| 2 | 0 | 12 | 25 | 38 | 49 | 12.25 | 0.510 | | 0.00 |
| 3 | 0 | 13 | 23 | 36 | 47 | 11.75 | 0.489 | | +3.92 |
| 4 | 0 | 12 | 24 | 36 | 48 | 12.00 | 0.500 | | +1.96 |
| 5 | 0 | 12 | 25 | 38 | 50 | 12.50 | 0.521 | | -2.16 |
| Висота наповнення $h = 0.1$ м | | | | | | | | | |
| 1 | 0 | 13 | 25 | 38 | 51 | 12.75 | 0.531 | 0.528 | -0.57 |
| 2 | 0 | 13 | 25 | 37 | 50 | 12.50 | 0.521 | | -1.33 |
| 3 | 0 | 13 | 26 | 38 | 51 | 12.75 | 0.531 | | -0.57 |
| 4 | 0 | 12 | 25 | 36 | 49 | 12.25 | 0.510 | | +3.41 |
| 5 | 0 | 13 | 26 | 38 | 50 | 12.50 | 0.521 | | +1.33 |
| Висота наповнення $h = 0.05$ м | | | | | | | | | |
| 1 | 0 | 14 | 29 | 44 | 59 | 14.75 | 0.615 | 0.625 | +1.60 |
| 2 | 0 | 16 | 30 | 46 | 61 | 15.25 | 0.635 | | -1.60 |
| 3 | 0 | 15 | 30 | 45 | 60 | 15.00 | 0.625 | | 0.00 |
| 4 | 0 | 16 | 31 | 46 | 62 | 15.50 | 0.645 | | -3.20 |
| 5 | 0 | 15 | 30 | 45 | 61 | 15.25 | 0.635 | | -1.60 |

Таблиця 3 – Поздовжні коливання рідини у ємності, рідина – 20 % водний розчин цукру

| № досліду | Період коливань рідини, який відображається кількістю кадрів | | | | | Кіл-ть кадрів, яка припадає на один період | Періоди експер. коливань рідини T_k^E , с | Періоди теор. коливань рідини T_k^T , с | Похибка, % |
|--------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|--------|--------|--------|--------|--------------------------------------------|---------------------------------------------|-------------------------------------------|------------|
| | 0 | 2π | 4π | 6π | 8π | | | | |
| Висота наповнення $h = 0.15$ м | | | | | | | | | |
| 1 | 0 | 15 | 29 | 45 | 60 | 15.00 | 0.625 | 0.647 | +3.40 |
| 2 | 0 | 15 | 30 | 46 | 62 | 15.50 | 0.646 | | +0.15 |
| 3 | 0 | 16 | 31 | 46 | 61 | 15.25 | 0.635 | | -1.85 |
| 4 | 0 | 16 | 31 | 46 | 62 | 15.50 | 0.646 | | +0.15 |
| 5 | 0 | 16 | 32 | 47 | 63 | 15.75 | 0.656 | | -1.39 |
| Висота наповнення $h = 0.1$ м | | | | | | | | | |
| 1 | 0 | 17 | 34 | 49 | 66 | 16.50 | 0.688 | 0.701 | +1.85 |
| 2 | 0 | 16 | 33 | 50 | 67 | 16.75 | 0.698 | | +0.43 |
| 3 | 0 | 16 | 32 | 49 | 65 | 16.25 | 0.677 | | +3.42 |
| 4 | 0 | 17 | 34 | 50 | 67 | 16.75 | 0.698 | | +0.43 |
| 5 | 0 | 17 | 34 | 51 | 68 | 17.00 | 0.708 | | -0.99 |
| Висота наповнення $h = 0.05$ м | | | | | | | | | |
| 1 | 0 | 22 | 46 | 67 | 87 | 21.75 | 0.906 | 0.894 | -1.34 |
| 2 | 0 | 22 | 45 | 66 | 86 | 21.50 | 0.896 | | -0.22 |
| 3 | 0 | 23 | 45 | 68 | 88 | 22.00 | 0.917 | | -2.57 |
| 4 | 0 | 22 | 46 | 66 | 87 | 21.75 | 0.906 | | -1.34 |
| 5 | 0 | 22 | 45 | 67 | 87 | 21.75 | 0.906 | | -1.34 |

Зауважимо, що під час дослідів відбувалася ресстрація загасаючих коливань, а логарифмічний декремент

загасання d , як відомо, знижує частоту вільних коливань у

$$\sqrt{1 - d^2 / (2\pi)^2}$$

раз. Проте, з огляду на невеликі значення декременту, які будуть представлені у подальших пунктах статті, зазначеним впливом можна знехтувати.

Також відмітимо, що після кінематичного збурення нахил прямокутної ємності склав близько 4° , проте ця обставина помітним чином не вплинула на площу вільної поверхні і, як наслідок, на значення періоду коливань, де спостерігаються відхилення різного знаку.

Таблиця 4 – Поперечні коливання у ємності, рідина – вода

| № досліду | Період коливань рідини, який відображається кількістю кадрів | | | | | Кіл-ть кадрів, яка припадає на один період | Періоди експер. коливань рідини T_m^E , с | Періоди теор. коливань рідини T_m^T , с | Відхилення, % |
|--------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|--------|--------|--------|--------|--------------------------------------------|---------------------------------------------|-------------------------------------------|---------------|
| | 0 | 2π | 4π | 6π | 8π | | | | |
| Висота наповнення $h = 0.15$ м | | | | | | | | | |
| 1 | 0 | 13 | 25 | 37 | 48 | 12.00 | 0.500 | 0.511 | +2.15 |
| 2 | 0 | 12 | 25 | 37 | 49 | 12.25 | 0.510 | | +0.20 |
| 3 | 0 | 12 | 23 | 36 | 48 | 12.00 | 0.500 | | +2.15 |
| 4 | 0 | 13 | 25 | 36 | 49 | 12.25 | 0.510 | | +0.20 |
| 5 | 0 | 12 | 24 | 36 | 47 | 11.75 | 0.489 | | -4.11 |
| Висота наповнення $h = 0.1$ м | | | | | | | | | |
| 1 | 0 | 13 | 26 | 38 | 50 | 12.50 | 0.521 | 0.529 | +1.51 |
| 2 | 0 | 13 | 25 | 37 | 49 | 12.25 | 0.510 | | +3.59 |
| 3 | 0 | 13 | 26 | 38 | 50 | 12.50 | 0.521 | | +1.51 |
| 4 | 0 | 12 | 25 | 37 | 50 | 12.50 | 0.521 | | +1.51 |
| 5 | 0 | 13 | 27 | 38 | 51 | 12.75 | 0.531 | | -0.38 |
| Висота наповнення $h = 0.05$ м | | | | | | | | | |
| 1 | 0 | 15 | 29 | 44 | 60 | 15.00 | 0.625 | 0.625 | 0.00 |
| 2 | 0 | 15 | 30 | 44 | 59 | 14.75 | 0.615 | | +1.60 |
| 3 | 0 | 15 | 30 | 45 | 61 | 15.25 | 0.635 | | -1.60 |
| 4 | 0 | 14 | 30 | 44 | 60 | 15.00 | 0.625 | | 0.00 |
| 5 | 0 | 15 | 29 | 45 | 60 | 15.00 | 0.625 | | 0.00 |

Таблиця 5 – Поздовжні коливання у ємності, рідина – вода

| № досліду | Період коливань рідини, який відображається кількістю кадрів | | | | | Кіл-ть кадрів, яка припадає на один період | Періоди експер. коливань рідини T_k^E , с | Періоди теор. коливань рідини T_k^T , с | Відхилення, % |
|--------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|--------|--------|--------|--------|--------------------------------------------|---------------------------------------------|-------------------------------------------|---------------|
| | 0 | 2π | 4π | 6π | 8π | | | | |
| Висота наповнення $h = 0.15$ м | | | | | | | | | |
| 1 | 0 | 14 | 30 | 44 | 59 | 14.80 | 0.617 | 0.647 | +4.35 |
| 2 | 0 | 16 | 30 | 46 | 61 | 15.25 | 0.635 | | +1.89 |
| 3 | 0 | 16 | 32 | 47 | 63 | 15.75 | 0.656 | | -1.01 |
| 4 | 0 | 16 | 31 | 47 | 62 | 15.50 | 0.646 | | +0.15 |
| 5 | 0 | 15 | 30 | 45 | 61 | 15.25 | 0.635 | | +1.89 |
| Висота наповнення $h = 0.1$ м | | | | | | | | | |
| 1 | 0 | 17 | 33 | 49 | 66 | 16.50 | 0.688 | 0.702 | +2.04 |
| 2 | 0 | 19 | 35 | 50 | 68 | 17.00 | 0.708 | | -0.85 |
| 3 | 0 | 18 | 33 | 50 | 67 | 16.75 | 0.698 | | +0.57 |
| 4 | 0 | 18 | 34 | 51 | 67 | 16.75 | 0.698 | | +0.57 |
| 5 | 0 | 16 | 33 | 49 | 66 | 16.50 | 0.688 | | +2.04 |
| Висота наповнення $h = 0.05$ м | | | | | | | | | |
| 1 | 0 | 22 | 43 | 65 | 85 | 21.25 | 0.885 | 0.894 | +1.02 |
| 2 | 0 | 22 | 44 | 66 | 86 | 21.50 | 0.896 | | -0.22 |
| 3 | 0 | 21 | 43 | 65 | 84 | 21.00 | 0.875 | | +2.40 |
| 4 | 0 | 22 | 44 | 65 | 86 | 21.50 | 0.896 | | -0.22 |
| 5 | 0 | 21 | 44 | 65 | 87 | 21.75 | 0.906 | | 1.01 |

Таблиця 6 – Поперечні коливання у ємності, рідина – рослинна олія

| № досліду | Період коливань рідини, який відображається кількістю кадрів | | | | | Кіл-ть кадрів, яка припадає на один період | Періоди експер. коливань рідини T_m^E , с | Періоди теор. коливань рідини T_m^T , с | Відхилення, % |
|--------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|--------|--------|--------|--------|--------------------------------------------|---------------------------------------------|-------------------------------------------|---------------|
| | 0 | 2π | 4π | 6π | 8π | | | | |
| Висота наповнення $h = 0.15$ м | | | | | | | | | |
| 1 | 0 | 12 | 25 | 37 | 49 | 12.25 | 0.510 | 0.511 | +0.20 |
| 2 | 0 | 12 | 24 | 36 | 48 | 12.00 | 0.500 | | +2.15 |
| 3 | 0 | 13 | 23 | 36 | 47 | 11.75 | 0.489 | | +4.11 |
| 4 | 0 | 13 | 25 | 37 | 49 | 12.25 | 0.510 | | +0.20 |
| 5 | 0 | 12 | 24 | 36 | 48 | 12.00 | 0.500 | | +2.15 |
| Висота наповнення $h = 0.1$ м | | | | | | | | | |
| 1 | 0 | 13 | 25 | 37 | 51 | 12.75 | 0.531 | 0.528 | -0.38 |
| 2 | 0 | 12 | 25 | 37 | 50 | 12.50 | 0.521 | | +1.51 |
| 3 | 0 | 13 | 26 | 38 | 50 | 12.50 | 0.521 | | +1.51 |
| 4 | 0 | 12 | 25 | 38 | 50 | 12.50 | 0.521 | | +1.51 |
| 5 | 0 | 13 | 26 | 37 | 49 | 12.25 | 0.510 | | +3.59 |
| Висота наповнення $h = 0.05$ м | | | | | | | | | |
| 1 | 0 | 15 | 29 | 45 | 59 | 14.75 | 0.615 | 0.625 | +1.60 |
| 2 | 0 | 14 | 29 | 44 | 60 | 15.00 | 0.625 | | 0.00 |
| 3 | 0 | 15 | 30 | 45 | 61 | 15.25 | 0.635 | | -1.60 |
| 4 | 0 | 14 | 30 | 45 | 62 | 15.50 | 0.646 | | -3.36 |
| 5 | 0 | 15 | 30 | 44 | 60 | 15.00 | 0.625 | | 0.00 |

Таблиця 7 – Поздовжні коливання у ємності, рідина рослинна олія

| № досліду | Період коливань рідини, який відображається кількістю кадрів | | | | | Кіл-ть кадрів, яка припадає на один період | Періоди експер. коливань рідини T_k^E , с | Періоди теор. коливань рідини T_k^T , с | Відхилення, % |
|--------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|--------|--------|--------|--------|--------------------------------------------|---------------------------------------------|-------------------------------------------|---------------|
| | 0 | 2π | 4π | 6π | 8π | | | | |
| Висота наповнення $h = 0.15$ м | | | | | | | | | |
| 1 | 0 | 16 | 30 | 47 | 62 | 15.50 | 0.646 | 0.647 | -0.18 |
| 2 | 0 | 15 | 29 | 45 | 60 | 15.00 | 0.625 | | +3.40 |
| 3 | 0 | 16 | 31 | 46 | 62 | 15.5 | 0.646 | | +0.18 |
| 4 | 0 | 15 | 30 | 45 | 60 | 15.00 | 0.625 | | +3.40 |
| 5 | 0 | 16 | 31 | 46 | 61 | 15.25 | 0.635 | | +1.79 |
| Висота наповнення $h = 0.1$ м | | | | | | | | | |
| 1 | 0 | 17 | 33 | 50 | 67 | 16.75 | 0.698 | 0.701 | +0.44 |
| 2 | 0 | 18 | 34 | 50 | 67 | 16.75 | 0.698 | | +0.44 |
| 3 | 0 | 19 | 35 | 51 | 68 | 17.00 | 0.708 | | -1.05 |
| 4 | 0 | 17 | 34 | 49 | 66 | 16.50 | 0.688 | | +1.93 |
| 5 | 0 | 17 | 34 | 50 | 68 | 17.00 | 0.708 | | -1.05 |
| Висота наповнення $h = 0.05$ м | | | | | | | | | |
| 1 | 0 | 21 | 44 | 66 | 88 | 22.00 | 0.917 | 0.894 | -2.57 |
| 2 | 0 | 21 | 45 | 65 | 87 | 21.75 | 0.906 | | -1.34 |
| 3 | 0 | 22 | 44 | 65 | 87 | 21.75 | 0.906 | | -1.34 |
| 4 | 0 | 21 | 44 | 64 | 86 | 21.50 | 0.896 | | -0.22 |
| 5 | 0 | 22 | 45 | 65 | 85 | 21.25 | 0.885 | | +1.01 |

Аналізуючи результати досліджень з табл. 2 – 7, встановлено, що максимальна похибка при поперечних і при поздовжніх коливаннях не перевищує 4,35%. Така величина похибки дає право стверджувати, що математичні алгоритми, які використовуються при теоретичному визначенні частот вільних коливань рідини, є адекватними.

Теоретичне дослідження з визначення декременту загасання вільних коливань рідини в прямокутній ємності призматичної форми. Позначимо довжину, ширину та висоту прямокутного паралелепіпеду, об'єм якого займає рідина, як a , b та h . Рідина має щільність ρ та кінематичну в'язкість ν . Позначимо також власну (кругову) частоту n – того парціального осцилятора символом ω_n , а символом Φ_n – відповідну власну форму потенціалу для поздовжніх коливань, що визначається за формулою:

$$\Phi_n = \Delta u \cdot \sin\left(k\pi \frac{x}{a}\right) \cdot \frac{\operatorname{ch}(k\pi y/a)}{\operatorname{ch}(k\pi h/a)} \cdot \sin(\omega_n t), \quad k = 1, 3, 5;$$

де Δu – амплітуда коливань; числа $k = 1, 3, 5$ відповідають першому, другому та третьому парціальному шару рідини, $k = 2n - 1$.

Обчислимо значення безрозмірної характеристики коливань:

$$R_n = \omega_n \cdot a^2 / \nu,$$

яке в теорії потенціальних коливань рідини, що має вільну поверхню, називають, хоча і не зовсім слушно, числом Рейнольдса, та припустимо, що це число задовольняє умові:

$$R_n > 5 \cdot 10^4. \quad (3)$$

Тоді, як показано в [4], використовуючи для поставленої задачі так званий *енергетичний підхід*, шуканий логарифмічний декремент загасання можна знайти за формулою:

$$\delta_n = \Delta E_n / 2E_n, \quad (4)$$

де ΔE_n – це робота сил тертя за один період коливань,

$$\Delta E_n = \pi \rho \sqrt{\nu / \omega_n} \iint_{\Omega} v_n^2 dS; \quad (5)$$

Ω – тверда поверхня стінок ємності, що змочується рідиною; v_n – амплітуда швидкості руху рідини у стінки; E_n – повна механічна енергія парціального осцилятора,

$$E_n = \frac{\rho}{2} \cdot \iiint_V v_n^2 dV; \quad (6)$$

V – об'єм ємності, що зайнятий рідиною.

В роботі [4] формули (4) – (6) було застосовано для ємності циліндричної форми, де й потенціали Φ_n використовували *циліндричні функції Бесселя*, а поле швидкостей було просторовим.

Зразок це поле є плоским, і тому інтеграл (6) можна спростити до такого вигляду:

$$\iiint_V v_n^2 dV = \frac{b}{2} \cdot \iint_{\Omega_{\sigma}} v_n^2 dS, \quad (7)$$

де Ω_{σ} – це дві бічні стінки ємності, що має довжину a і висоту h .

Крім двох бічних стінок ємність має дві торцеві стінки, з загальною поверхнею Ω_m , та днище $\Omega_{\text{дн}}$, причому має місце рівність:

$$\iint_{\Omega} v_n^2 dS = \iint_{\Omega_{\sigma}} v_n^2 dS + \iint_{\Omega_m} v_n^2 dS + \iint_{\Omega_{\text{дн}}} v_n^2 dS. \quad (8)$$

Обчислимо кожний із інтегралів правої частини (8) окремо.

На дні ємності

$$v_n^2 = \omega_n^2 \cdot \Delta u^2 \cdot \frac{\cos^2(k\pi x/a) \cdot (k\pi/a)^2}{\operatorname{ch}^2(k\pi h/a)};$$

звідки

$$\iint_{\Omega_{\text{дн}}} v_n^2 dS = \omega_n^2 \cdot \Delta u^2 \cdot \frac{(k\pi/a)^2}{\operatorname{ch}^2(k\pi h/a)} \cdot \frac{ab}{2}.$$

На торцях ємності

$$v_n^2 = \omega_n^2 \cdot \Delta u^2 \cdot \frac{\operatorname{ch}^2(k\pi y/a) \cdot (k\pi/a)^2}{\operatorname{ch}^2(k\pi h/a)},$$

звідки

$$\begin{aligned} \iint_{S_{\text{тор}}} v_n^2 dS_{\text{тор}} &= \frac{2\omega_n^2 \cdot \Delta u^2 \cdot (k\pi/a)^2}{\operatorname{ch}^2(k\pi h/a)} \cdot b \cdot \int_0^h \operatorname{ch}^2(k\pi y/a) dy = \frac{\omega_n^2 \cdot \Delta u^2 \cdot (k\pi/a)^2}{\operatorname{ch}^2(k\pi h/a)} \cdot b \cdot \left[h + \frac{\operatorname{sh}(2k\pi h/a)}{2k\pi/a} \right] = \\ &= \omega_n^2 \cdot \Delta u^2 \cdot (k\pi/a)^2 \cdot b \cdot h \cdot \left[\frac{1}{\operatorname{ch}^2(k\pi h/a)} + \frac{\operatorname{th}(k\pi h/a)}{k\pi h/a} \right]. \end{aligned}$$

На бокових стінках ємності швидкість рідини має дві складові – $v_{n,x}$ та $v_{n,y}$, причому:

$$v_{n,x}^2 = \frac{\omega_n^2 \cdot \Delta u^2 \cdot (k\pi/a)^2}{\operatorname{ch}^2(k\pi h/a)} \cdot \cos^2(k\pi x/a) \cdot \operatorname{ch}^2(k\pi y/a);$$

$$v_{n,y}^2 = \frac{\omega_n^2 \cdot \Delta u^2 \cdot (k\pi/a)^2}{\operatorname{ch}^2(k\pi h/a)} \cdot \sin^2(k\pi x/a) \cdot \operatorname{sh}^2(k\pi y/a).$$

Тому:

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega_6} v_{n,x}^2 dS &= \frac{2\omega_n^2 \cdot \Delta u^2 \cdot (k\pi/a)^2}{\operatorname{ch}^2(k\pi h/a)} \cdot \int_{-a/2}^{a/2} \cos^2(k\pi x/a) dx \cdot \int_0^h \operatorname{ch}^2(k\pi y/a) dy = \\ &= a \frac{\omega_n^2 \cdot \Delta u^2 \cdot (k\pi/a)^2}{\operatorname{ch}^2(k\pi h/a)} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[h + \frac{\operatorname{sh}(2k\pi h/a)}{2k\pi/a} \right] = \frac{1}{2} a \cdot h \cdot \omega_n^2 \cdot \Delta u^2 \cdot (k\pi/a)^2 \cdot \left[\frac{\operatorname{th}(k\pi h/a)}{k\pi h/a} + \frac{1}{\operatorname{ch}^2(k\pi h/a)} \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega_6} v_{n,y}^2 dS &= \frac{2\omega_n^2 \cdot \Delta u^2 \cdot (k\pi/a)^2}{\operatorname{ch}^2(k\pi h/a)} \cdot \int_{-a/2}^{a/2} \cos^2(k\pi x/a) dx \cdot \int_0^h \operatorname{sh}^2(k\pi y/a) dy = \\ &= \frac{1}{2} a \cdot h \cdot \omega_n^2 \cdot \Delta u^2 \cdot (k\pi/a)^2 \cdot \left[\frac{\operatorname{th}(k\pi h/a)}{k\pi h/a} - \frac{1}{\operatorname{ch}^2(k\pi h/a)} \right]. \end{aligned}$$

Загальний результат для бічних стінок ємності має вигляд:

$$\iint_{\Omega_6} v_n^2 dS = a \cdot h \cdot \omega_n^2 \cdot \Delta u^2 \cdot (k\pi/a)^2 \cdot \frac{\operatorname{th}(k\pi h/a)}{k\pi h/a},$$

звідки

$$\iint_{\Omega} v_n^2 dS = \omega_n^2 \cdot \Delta u^2 \cdot (k\pi/a)^2 \cdot \left[\frac{ab}{2} \frac{1}{\operatorname{ch}^2(k\pi h/a)} + ah \cdot \frac{\operatorname{th}(k\pi h/a)}{k\pi h/a} + bh \left[\frac{\operatorname{th}(k\pi h/a)}{k\pi h/a} + \frac{1}{\operatorname{ch}^2(k\pi h/a)} \right] \right]$$

і

$$\iiint_V v_n^2 dV = \frac{b}{2} \cdot \iint_{\Omega_6} v_n^2 dS = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot h \cdot \omega_n^2 \cdot \Delta u^2 \cdot (k\pi/a)^2 \cdot \frac{\operatorname{th}(k\pi h/a)}{k\pi h/a}.$$

Підставляємо отримані результати в (4) – (6) і отримуємо шуканий результат:

$$\delta_n = \frac{\Delta E_n}{2E_n} = \left[\frac{\frac{ab}{2} \frac{1}{\operatorname{ch}^2(k\pi/a)} + (a+b)h \cdot \frac{\operatorname{th}(k\pi h/a)}{k\pi h/a} + \frac{bh}{\operatorname{ch}^2(k\pi/a)}}{\frac{\rho abh}{2} \cdot \frac{\operatorname{th}(k\pi h/a)}{k\pi h/a}} \right] \cdot \pi \rho \sqrt{\frac{v}{\omega_n}},$$

звідки

$$\delta_n = \pi \sqrt{\frac{v}{\omega_n (a/2)^2}} \cdot \left[1 + \frac{a}{b} + \frac{(1+(2h/a))k\pi}{\operatorname{sh}(2k\pi h/a)} \right]. \quad (9)$$

Проаналізуємо отриманий результат.

По-перше, він подібний до того, що був знайдений в роботі [4], але присутні й суттєві відмінності; особливо щодо старших тонів коливань.

По-друге, якщо рівень рідини не малий, а також для старшого тону коливань, формула (9) спрощується і приймає наступний вигляд:

$$\delta_n = 2\pi \sqrt{v / (\omega_n \cdot r_*^2)}, \quad (10)$$

де $r_* = \frac{a \cdot b}{a+b}$ – це так званий *еквівалентний радіус призматичної ємності*.

Відмітимо, що в визначення цього розміру довжина та ширина ємності входять симетрично, а частота ω_n залежить від \sqrt{a} , звідки декремент δ_n є пропорційним $\sqrt[4]{a}$. Як наслідок, *поздовжні та поперечні коливання*

мають майже однаковий декремент загасання. Проте, в справедливості цього твердження нас остаточно переконують результати експериментального дослідження декременту, що наведено в наступному пункті.

По-третє, формули (9) і (10) можна застосовувати лише для рідин малої в'язкості, а для таких в'язких, як рослинна олія, лише при використанні великих ємностей (цистерн). Що стосується дослідної ємності малого розміру, то для неї умова (3) щодо числа Рейнольдса виконується лише для води і цукрового розчину.

А для рослинної олії отримаємо іншу умову: $R_1 < 10^4$, тому розвинуту тут теорію розрахунку декременту використовувати не вдається, про що буде сказано далі. Проте, якщо перейти до розміру тракторних цистерн, то ситуація з виконанням умови (3) змінюється на кращу.

До того ж, для цистерн нівелюється суттєвий вплив на величину декременту загасання з боку сили поверхневого натягу рідини (рис. 3).

Якщо число Рейнольдса для призматичної ємності визначити такою ж формулою, як для циліндра, тобто

$$R_n = \omega_n \cdot r_*^2 / \nu,$$

то формула (10) для декременту стане такою:

$$\delta_n = 2\pi / \sqrt{R_n}. \quad (11)$$

Звідки, зважаючи на умову $R_n > 5 \cdot 10^4$ (3), отримуємо нерівність $\delta_n < 0.03$. Зрозуміло, що коли рівень рідини зменшується, то треба використовувати формулу (9), і там декремент зростає (рис. 3).

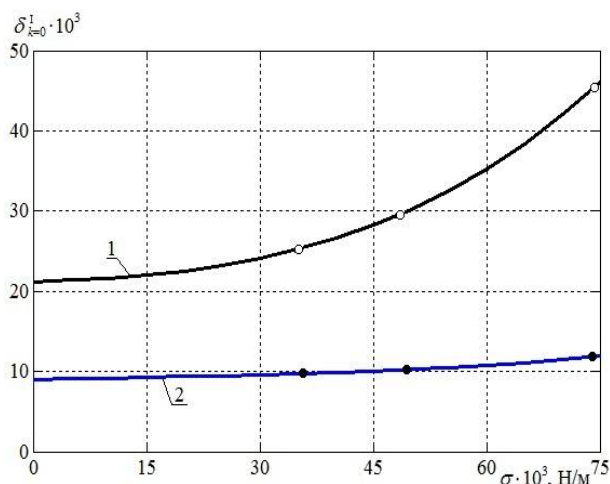


Рис. 3 – Експериментальна залежність логарифмічного декременту загасання від поверхневого натягу рідини [4]: 1 – ємність діаметром 200 мм; 2 – діаметром 518 мм.

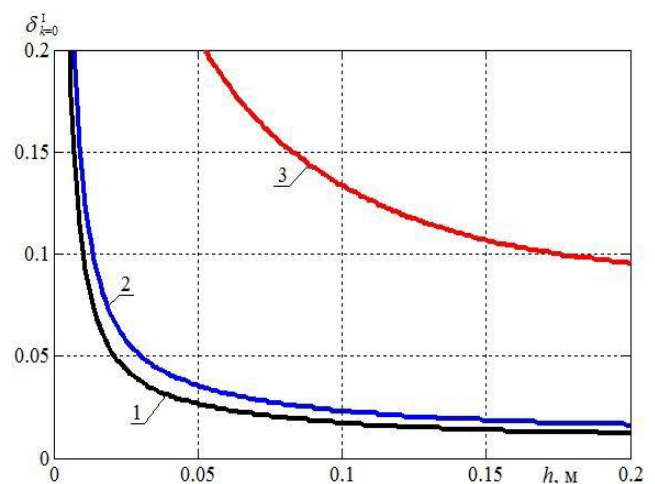


Рис. 4 – Залежність логарифмічного декременту загасання від рівня наповнення h в дослідній ємності розміром $0,3 \times 0,2 \text{ м}$: 1 – вода; 2 – 20 % розчин цукру; 3 – рослинна олія.

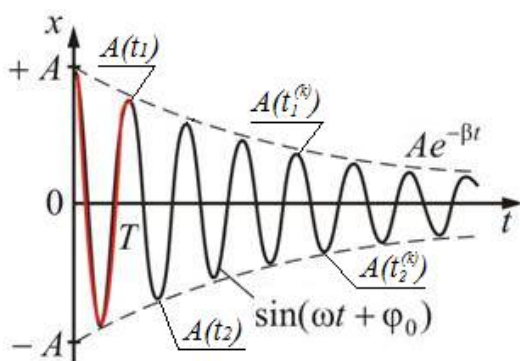


Рис. 5 – Спрощена схема розвитку загасаючих коливань.

де n – кількість хвиль.

При розв'язанні задач динаміки науковці при визначенні дисипативних характеристик, зазвичай, використовують логарифмічний декремент загасання (ЛДЗ), причому

$$D = e^{-\delta} \Rightarrow -\delta = \ln D \Rightarrow \delta = -\ln D. \quad (13)$$

Експериментальне дослідження з визначення декременту загасання для рідин різної в'язкості. Відомо, що величиною декременту характеризується інтенсивність загасання коливань шляхом визначення відношення двох суміжних граничних відхилень системи (рис. 5) від рівноважного стану за умови руху системи в одному напрямку:

$$D = A(t) / A(t+T).$$

Для декількох періодів T коефіцієнт згасання D знаходять за формулою:

$$D = \sqrt[n]{\left| \frac{A(t_1^{(k)}) - A(t_2^{(k)})}{A(t_1) - A(t_2)} \right|}, \quad (12)$$

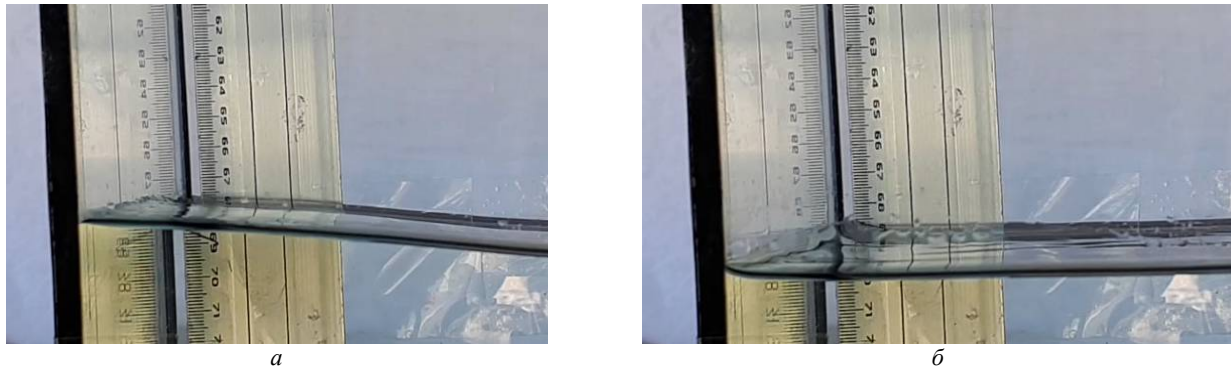


Рис. 6 – Граничні ординати вільної поверхні при наповненні ємності з водою на рівень $h = 0.1$ м:
 a – величина $A(t_1)$; b – величина $A(t_2)$.

Таблиця 8 – Визначення коефіцієнту загасання для 20 % водного розчину цукру

| Ріди-на | Кіл-ть дослідів | Кіл-ть хвиль n | Ординати | | Коеф. загасання D | Ріди-на | Кіл-ть дослідів | Кіл-ть хвиль n | Ординати | | Коеф. Загасання D |
|----------------------------------------|-----------------|------------------|----------|----------|---------------------|---------------------------------------|-----------------|------------------|----------|----------|---------------------|
| | | | $A(t_1)$ | $A(t_2)$ | | | | | $A(t_1)$ | $A(t_2)$ | |
| Висота наповнення ємності $h = 0,15$ м | 1 | 1 | 63,0 | 64,0 | 0,932 | Висота наповнення ємності $h = 0,1$ м | 4 | 1 | 67,6 | 68,6 | 0,935 |
| | | 2 | 63,0 | 63,9 | | | | 2 | 67,7 | 68,5 | |
| | | 3 | 63,0 | 63,9 | | | | 3 | 67,7 | 68,5 | |
| | | 4 | 63,0 | 63,9 | | | | 4 | 67,7 | 68,5 | |
| | | 5 | 63,1 | 63,9 | | | | 5 | 67,7 | 68,5 | |
| | | 6 | 63,1 | 63,8 | | | | 6 | 67,8 | 68,5 | |
| | | 7 | 63,1 | 63,8 | | | | 7 | 67,8 | 68,5 | |
| | | 8 | 63,1 | 63,8 | | | | 8 | 67,8 | 68,4 | |
| | | 9 | 63,1 | 63,8 | | | | 9 | 67,8 | 68,4 | |
| | | 10 | 63,2 | 63,7 | | | | 10 | 67,8 | 68,4 | |
| | | 11 | 63,2 | 63,7 | | | | 11 | 67,9 | 68,4 | |
| | | 12 | 63,2 | 63,7 | | | | 12 | 67,9 | 68,4 | |
| | | 13 | 63,3 | 63,7 | | | | 13 | 67,9 | 68,3 | |
| | 2 | 1 | 62,9 | 63,9 | 0,935 | | | 14 | 67,9 | 68,3 | |
| | | 2 | 63,0 | 63,9 | | | | 15 | 67,9 | 68,3 | |
| | | 3 | 63,0 | 63,9 | | | | 16 | 67,9 | 68,3 | |
| | | 4 | 63,0 | 63,9 | | | | 17 | 67,9 | 68,3 | |
| | | 5 | 63,0 | 63,9 | | | | 18 | 68,0 | 68,3 | |
| | | 6 | 63,0 | 63,9 | | 5 | 1 | 67,6 | 68,6 | 0,929 | |
| | | 7 | 63,1 | 63,9 | | | 2 | 67,6 | 68,5 | | |
| | | 8 | 63,1 | 63,8 | | | 3 | 67,6 | 68,5 | | |
| | | 9 | 63,1 | 63,8 | | | 4 | 67,7 | 68,5 | | |
| | | 10 | 63,1 | 63,8 | | | 5 | 67,7 | 68,5 | | |
| | | 11 | 63,1 | 63,8 | | | 6 | 67,7 | 68,4 | | |
| | | 12 | 63,2 | 63,8 | | | 7 | 67,8 | 68,5 | | |
| | | 13 | 63,2 | 63,7 | | | 8 | 67,7 | 68,5 | | |
| | 14 | 63,2 | 63,7 | 9 | 67,8 | | 68,5 | | | | |
| | 15 | 63,2 | 63,7 | 10 | 67,8 | | 68,4 | | | | |
| | 16 | 63,2 | 63,7 | 11 | 67,8 | | 68,4 | | | | |
| | 17 | 63,3 | 63,7 | 12 | 67,8 | | 68,4 | | | | |
| | 18 | 63,3 | 63,6 | 13 | 67,9 | | 68,3 | | | | |
| | 3 | 1 | 63,0 | 64,0 | 0,939 | 14 | 67,9 | 68,4 | | | |
| | | 2 | 63,0 | 63,9 | | 15 | 67,9 | 68,3 | | | |
| 3 | | 63,0 | 63,9 | 16 | | 67,9 | 68,3 | | | | |
| 4 | | 63,0 | 63,9 | 17 | | 67,9 | 68,3 | | | | |
| 5 | | 63,0 | 63,9 | 18 | | 67,9 | 68,3 | | | | |
| 6 | | 63,1 | 63,9 | 19 | | 67,9 | 68,3 | | | | |
| 7 | | 63,1 | 63,8 | 20 | | 67,9 | 68,3 | | | | |
| 8 | | 63,1 | 63,8 | 21 | | 68,0 | 68,3 | | | | |
| 9 | | 63,1 | 63,8 | 22 | | 68,0 | 68,2 | | | | |
| 10 | | 63,1 | 63,8 | | | | | | | | |
| 11 | | 63,2 | 63,7 | | | | | | | | |

Таблиця 9 – Визначення коефіцієнту загасання для води

| Рідина | Кіл-ть дослідів | Кіл-ть хвиль n | Ординати | | Коеф. загасання D | Рідина | Кіл-ть дослідів | Кіл-ть хвиль n | Ординати | | Коеф. Загасання D |
|----------------------------------------|-----------------|------------------|----------|----------|---------------------|---------------------------------------|-----------------|------------------|----------|----------|---------------------|
| | | | $A(t_1)$ | $A(t_2)$ | | | | | $A(t_1)$ | $A(t_2)$ | |
| Висота наповнення ємності $h = 0,15$ м | 1 | 1 | 63,2 | 64,2 | 0,896 | Висота наповнення ємності $h = 0,1$ м | 4 | 1 | 67,7 | 68,7 | 0,905 |
| | | 2 | 63,3 | 64,1 | | | | 2 | 67,8 | 68,7 | |
| | | 3 | 63,3 | 64,1 | | | | 3 | 67,8 | 68,6 | |
| | | 4 | 63,3 | 64,0 | | | | 4 | 67,8 | 68,6 | |
| | | 5 | 63,3 | 64,0 | | | | 5 | 67,8 | 68,6 | |
| | | 6 | 63,4 | 63,8 | | | | 6 | 67,9 | 68,6 | |
| | | 7 | 63,4 | 63,7 | | | | 7 | 67,9 | 68,5 | |
| | | 8 | 63,4 | 63,7 | | | | 8 | 67,9 | 68,5 | |
| | | 9 | 63,4 | 63,7 | | | | 9 | 68,0 | 68,5 | |
| | | 10 | 63,4 | 63,7 | | | | 10 | 68,0 | 68,5 | |
| | | 11 | 63,4 | 63,7 | | | | 11 | 68,0 | 68,4 | |
| | 2 | 1 | 63,1 | 64,1 | 0,903 | | | 5 | 12 | 68,1 | |
| | | 2 | 63,1 | 64,1 | | | 1 | | 67,7 | 68,7 | |
| | | 3 | 63,2 | 64,0 | | | 2 | | 67,8 | 68,6 | |
| | | 4 | 63,2 | 64,0 | | | 3 | | 67,8 | 68,6 | |
| | | 5 | 63,3 | 64,0 | | | 4 | | 67,8 | 68,6 | |
| | | 6 | 63,3 | 63,9 | | | 5 | | 67,9 | 68,5 | |
| | | 7 | 63,3 | 63,9 | | | 6 | | 67,9 | 68,5 | |
| | | 8 | 63,3 | 63,9 | | | 7 | | 67,9 | 68,5 | |
| | 9 | 63,4 | 63,8 | 8 | 68,0 | | 68,5 | | | | |
| | 3 | 1 | 63,1 | 64,1 | 0,898 | | 6 | 9 | 68,0 | 68,4 | 0,891 |
| | | 2 | 63,1 | 64,0 | | | | 1 | 67,7 | 68,7 | |
| | | 3 | 63,1 | 64,0 | | | | 2 | 67,8 | 68,7 | |
| | | 4 | 63,2 | 64,0 | | | | 3 | 67,8 | 68,7 | |
| | | 5 | 63,2 | 63,9 | | | | 4 | 67,9 | 68,7 | |
| | | 6 | 63,2 | 63,9 | | | | 5 | 67,9 | 68,6 | |
| | | 7 | 63,2 | 63,9 | | | | 6 | 67,9 | 68,6 | |
| | | 8 | 63,3 | 63,8 | | | | 7 | 68,0 | 68,6 | |
| | | 9 | 63,3 | 63,8 | | | | 8 | 68,0 | 68,6 | |
| | | 10 | 63,3 | 63,8 | | | | 9 | 68,0 | 68,5 | |
| 11 | | 63,3 | 63,7 | 10 | | 68,0 | | 68,5 | | | |
| 12 | | 63,4 | 63,7 | 11 | | 68,1 | | 68,5 | | | |
| 13 | | 63,4 | 63,7 | 12 | | 68,1 | | 68,5 | | | |
| 14 | | 63,4 | 63,7 | 13 | | 68,1 | | 68,4 | | | |
| 15 | | 63,4 | 63,6 | 14 | | 68,2 | 68,4 | | | | |

Таблиця 10 – Визначення коефіцієнту загасання для рослинної олії

| Рідина | Кіл-ть дослідів | Кіл-ть хвиль n | Ординати | | Коеф. Загасання D | Рідина | Кіл-ть дослідів | Кіл-ть хвиль n | Ординати | | Коеф. Загасання D |
|----------------------------------------|-----------------|------------------|----------|----------|---------------------|---------------------------------------|-----------------|------------------|----------|----------|---------------------|
| | | | $A(t_1)$ | $A(t_2)$ | | | | | $A(t_1)$ | $A(t_2)$ | |
| Висота наповнення ємності $h = 0,15$ м | 1 | 1 | 64,7 | 63,7 | 0,765 | Висота наповнення ємності $h = 0,1$ м | 4 | 1 | 67,5 | 68,5 | 0,725 |
| | | 2 | 64,3 | 63,7 | | | | 2 | 67,8 | 68,5 | |
| | | 3 | 64,1 | 63,7 | | | | 3 | 68 | 68,5 | |
| | | 4 | 63,8 | 63,7 | | | | 4 | 68,1 | 68,5 | |
| | | 5 | 63,2 | 63,6 | | | | 5 | 68,2 | 68,4 | |
| | | 6 | 63,4 | 63,6 | | | 5 | 1 | 67,5 | 68,5 | |
| | 2 | 1 | 64,7 | 63,7 | 2 | | | 67,7 | 68,5 | | |
| | | 2 | 64,3 | 63,7 | 3 | | | 67,9 | 68,5 | | |
| | | 3 | 64,0 | 63,7 | 4 | | 68,1 | 68,5 | | | |
| | | 4 | 63,7 | 63,7 | 5 | | 68,2 | 68,5 | | | |
| | | 5 | 63,4 | 63,6 | 6 | | 68,3 | 68,5 | | | |
| | 3 | 1 | 64,7 | 63,7 | 0,681 | | 6 | 7 | 68,4 | 68,5 | 0,681 |
| | | 2 | 64,4 | 63,7 | | | | 1 | 67,5 | 68,5 | |
| | | 3 | 64,1 | 63,7 | | | | 2 | 67,7 | 68,5 | |
| | | 4 | 63,8 | 63,7 | | | | 3 | 67,9 | 68,5 | |
| | | 5 | 63,6 | 63,7 | | | | 4 | 68,2 | 68,5 | |
| | | 6 | 63,5 | 63,6 | | | | 5 | 68,3 | 68,5 | |
| | | | | | | | | 6 | 68,4 | 68,5 | |

З табл. 8 знаходимо, що середнє значення ЛДЗ для 20 % водного розчину цукру складає

$$\delta_E^{\text{вода+цук}} = \sum_{i=1}^5 \delta_i^{\text{вода+цук}} / 5 = 0,068 \pm 0,005.$$

З табл. 9 знаходимо, що середнє значення ЛДЗ для води складає

$$\delta_E^{\text{вода}} = \sum_{i=1}^6 \delta_i^{\text{вода}} / 6 = 0,106 \pm 0,007.$$

З табл. 10 знаходимо, що середнє значення ЛДЗ для рослинної олії складає

$$\delta_E^{\text{п-масло}} = \sum_{i=1}^6 \delta_i^{\text{п-масло}} / 6 = 0,335 \pm 0,030.$$

Ширину коридору для значень декременту, що знайдено в експериментах, було визначено з врахуванням точності визначення граничних ординат.

Співставлення теоретичних та експериментальних значень декременту загасання коливань для рідини в призматичній ємності проведено далі, де для цього була використана розроблена теорія врахування залежності декременту від амплітуди коливань.

Визначення формули для опису залежності декременту від амплітуди коливань рідини. Рівняння для зміни потенціалу зміщення парціального шару рідини у поздовжній площині цистерни на її вільній поверхні має вигляд [15]:

$$\rho \ddot{\Phi} + \rho f \dot{\Phi} + \rho g \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \sigma \frac{\partial^3 \Phi}{\partial y \partial x^2} \Big|_{\Gamma} = -\rho [a_{cm,x}(t) + g \cdot \theta_{cm,z}(t)] \cdot x, \quad (14)$$

та по своїй формі нагадує рівняння руху, причому другий доданок $\rho f \dot{\Phi}$ нагадує силу тертя. І ця аналогія вірна не тільки за формою.

Приберемо в (14) праву частину та застосуємо до лівої частини лінійний диференціальний оператор $grad[.]$. Врахуємо, що $grad[\Phi] = u$, де $u(x, y, t)$ – це зміщення точки рідини з положення рівноваги. Отже, для вільних коливань парціального шару отримаємо:

$$\rho \ddot{u} + \rho f \dot{u} + \rho g \frac{\partial u}{\partial y} - \sigma \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x^2} \Big|_{\Gamma} = 0. \quad (15)$$

Якщо тепер всю масу шару привести до вільної поверхні Γ , то з співвідношення (15) з'являється рівняння вільних коливань шару:

$$m \ddot{u} + m f \dot{u} + L[u] = 0, \quad (16)$$

де $L[u]$ – диференціальний оператор, який визначає силу пружності для зв'язку конкретного осцилятора, що має власну частоту ω_n , зі стінками цистерни,

$$L[u] = m_n^p \omega_n^2 u,$$

де m_n^p – маса парціального шару рідини, і рівняння (16) приймає вигляд:

$$m_n^p \ddot{u}_n + m_n^p f_n \dot{u}_n + m_n^p \omega_n^2 u_n = 0. \quad (17)$$

Таким чином, доданок $m_n^p f_n \dot{u}_n$ – це сила тертя, і $\delta_n = \pi f_n / \omega_n$ є логарифмічним декрементом загасання коливань n – того парціального шару рідини.

Дослідимо виникнення сили тертя. Традиційно вважають [4], що оскільки задача вирішується в потенціальній постановці, то це тертя виникає у тонкому пристінному шарі. І це, безумовно, вірно, якщо амплітуда коливань мала, і у відомій формулі для повного тиску:

$$p + 0.5 \rho \dot{u}^2,$$

другим доданком можливо знехтувати.

Відомо, що з цими доданками пов'язують загальні втрати тиску Δp , які виникають по довжині тракту та в місцевих опорах течії:

$$\Delta p = \xi \cdot \frac{\rho}{2} \cdot |\dot{u}| \cdot \dot{u}; \quad \xi = \xi_{\text{расп}} + \xi_{\text{міс}}.$$

У пристінному шарі течія ламінарна, і якщо ширина Δl цього шару не залежить від швидкості, тоді

$$\xi_{\text{расп}} = \Psi / \text{Re},$$

де Re – це число Рейнольдса; Ψ – деяка константа, яку можна знайти у довідниках з гідравліки,

$$\text{Re} = |\dot{u}| \cdot \Delta l / \nu .$$

В результаті в доданку $\xi_{\text{расп}} \cdot \dot{u}$ швидкості скорочуються, і тертя стає лінійним:

$$\Delta p_{\text{расп}} = 0.5 \Psi \cdot \rho \cdot \dot{u} .$$

В роботі [4] виведено залежність коефіцієнта Ψ від частоти парціального осцилятора для випадку коливань вільної поверхні круглої форми. Після співставлення з експериментом вона була дещо скорегована і, в результаті, формула для логарифмічного декременту загасання коливань прийняла такий вигляд:

$$\delta_k^I = \frac{\pi}{\sqrt{R_n}} \left[\frac{\xi_n^2 + 1}{\xi_n^2 - 1} + \frac{2\xi_n}{\text{sh}(2\xi_n \bar{h})} \right], \quad (18)$$

де число R_n для n -того парціального шару рідини знаходиться за формулою:

$$R_n = \omega_n \cdot r_*^2 / \nu ,$$

ν – в'язкість рідини; \bar{h} – відносний рівень наповнення; r_* – радіус циліндра; ξ_k – корінь циліндричної функції Бесселя.

Вище було отримано формулу (9), аналогічну (18), але для ємності призматичної форми.

Що стосується місцевого опору, то для першого парціального шару він виникає при повороті потоку (рис. 7), що набігає на стінку, та характеризується значенням $\xi_{\text{міс}} = 1 \dots 1,2$ [21].

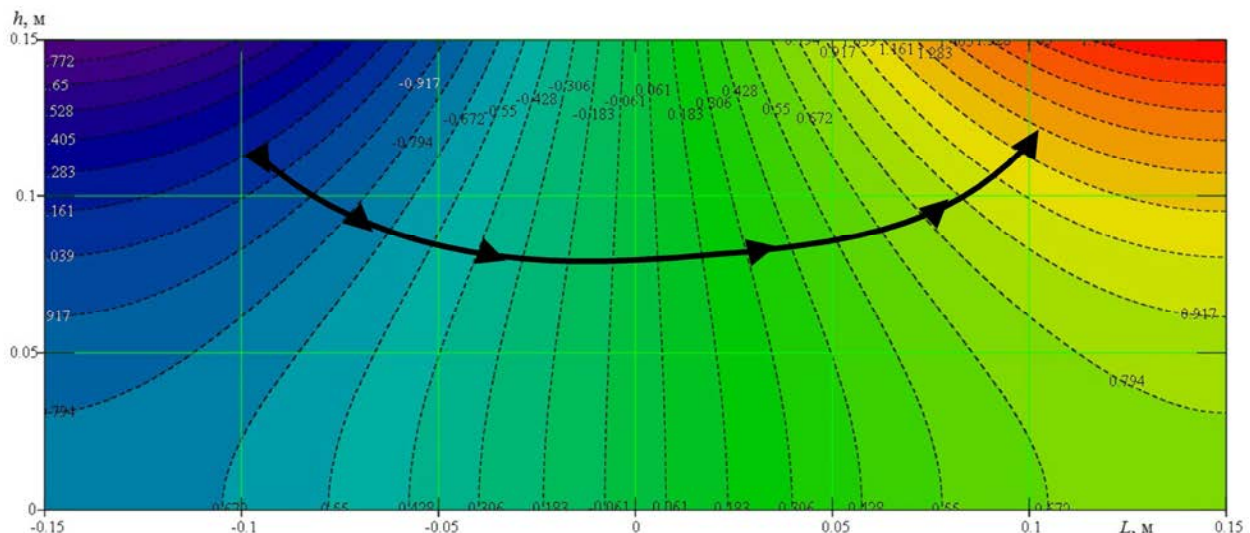


Рис. 7 – Потенціал для візуалізації руху першого парціального шару рідини у дослідній ємності розміром $a \times b = 0.2 \times 0.3$ м.

Знайдемо значення декременту, що відповідає цьому опору для першого парціального шару. Для цього розрахуємо силу тертя, яка діє на шар:

$$F_{\text{тр}} = \xi_{\text{міс}} \cdot \frac{\rho}{2} \cdot |\dot{u}| \cdot \dot{u} \cdot S = (\rho S a) \cdot \frac{\xi_{\text{міс}}}{2a} \cdot |\dot{u}| \cdot \dot{u} = m_n \cdot \frac{\xi_{\text{міс}}}{2a} \cdot |\dot{u}| \cdot \dot{u} ,$$

де a, S – довжина ємності і площа поперечного перерізу для потоку рідини; m_n – маса рідини у парціальному шарі.

Врахуємо, що $u = \Delta u_n \cdot \sin(\omega_n t)$, тому $\dot{u} = \Delta u_n \cdot \omega_n \cdot \cos(\omega_n t)$ і

$$F_{\text{тр}} = m_n \cdot \frac{\xi_{\text{міс}} \cdot \Delta u_n \cdot \omega_n}{2a} \cdot |\cos(\omega_n t)| \cdot \dot{u} .$$

Оскільки

$$\frac{1}{T} \int_0^T |\cos(\omega_n t)| dt = 2/\pi , \quad T = 2\pi/\omega_n ,$$

отримуємо

$$F_{\text{тр}} = m_n \cdot \xi_{\text{міс}} \cdot \Delta u_n \cdot \omega_n \cdot \dot{u} / \pi a ;$$

звідки отримаємо формулу визначення декременту загасання з урахуванням сили місцевого опору:

$$\delta_n^{II} = \left(F_{\text{тр}} \cdot \pi / m_n \cdot \pi \right) \cdot \xi_{\text{міс}} \cdot m_n \cdot \Delta u_n / a = \xi_{\text{міс}} \cdot \Delta u_n / a . \quad (19)$$

Таким чином, встановлено, що величина декременту загасання має перемінне значення і значним чином залежить від амплітуди коливань рідини.

На основі формул (18, 19), а також враховуючи коефіцієнт ζ нарощування декременту, пов'язаний з дією сил поверхневого натягу, стає можливо теоретичним шляхом встановити величину логарифмічного декременту загасання для будь-якої рідини, що коливається в ємності різного розміру:

$$\delta_n = \delta_n^I \zeta + \delta_n^{II} . \quad (20)$$

Що стосується декременту δ_n^{II} при $n > 0$, тобто для другого і третього парціального шару рідини, то скористаємося підказкою, яку надає рис. 8.

Як бачимо, вертикальні пунктирні лінії на рис. 8 потік рідини не пересікає. Тому формула для декременту, що залежить від амплітуди Δu_n коливань, набуває такого остаточного вигляду:

$$\delta_n^{II} = k \cdot \xi_{\text{міс}} \cdot \Delta u_n / a , \quad (21)$$

де для першого, другого і третього парціального шару рідини число $k = 1, 3, 5$, відповідно.

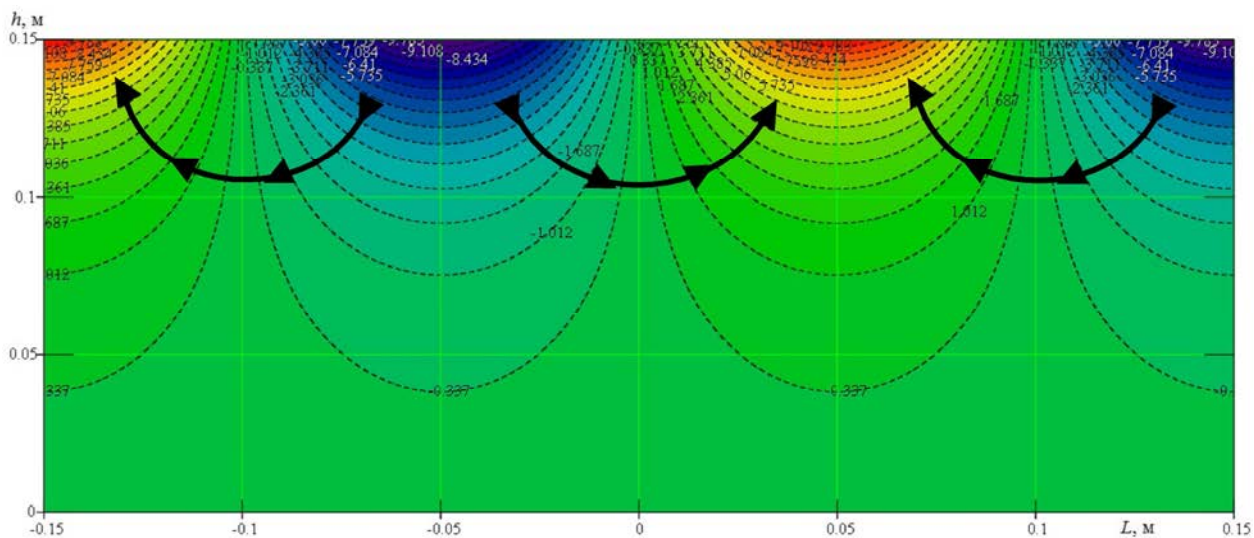


Рис. 8 – Потенціал для візуалізації руху другого парціального шару рідини у дослідній ємності розміром $a \times b = 0.2 \times 0.3$ м.

Співставлення теоретичних та експериментальних значень декременту. Перевіримо результати, що отримані в ході експериментального та теоретичного визначення величини декременту загасання рідини для першого парціального шару, значення наведемо в табл. 11.

Як видно з табл. 11, порівняння результатів теоретичного та експериментального визначенням ЛДЗ має хорошу збіжність для рідин з малою в'язкістю, що дозволяє стверджувати про доцільність використання формули (20) для малих та великих ємностей (цистерн).

Таблиця 11 – Порівняння величин логарифмічного декременту загасання

| Рідина | Величина ЛДЗ $\delta_{n=0}^I$ (рис. 4) | Величина ЛДЗ $\delta_{k=0}^{II}$ | Коефіцієнт нарощування ЛДЗ ζ | Теоретичний ЛДЗ δ_T | Експериментальний ЛДЗ δ_E | Похибка, % |
|------------------|----------------------------------------|----------------------------------|------------------------------------|----------------------------|----------------------------------|------------|
| Вода | 0,024 | 0,04 | 2,00 | 0,088 | $0,106 \pm 0,007$ | -11 |
| 20% розчин цукру | 0,027 | | 1,23 | 0,073 | $0,068 \pm 0,005$ | 0 |
| Рослинна олія | 0,160 | | 1,33 | 0,253 | $0,335 \pm 0,03$ | -17 |

Що стосується рослинної олії, яка має завелику в'язкість, то формулу (20) доцільно використовувати лише для ємностей, які мають великі розміри (наприклад, як у тракторних цистерн). Причому причина появи відносно високої похибки лежить на сталому декременті δ_n^I , а змінний декремент δ_n^{II} , як вважається, і в цьому випадку за формулою (19) було визначено вірно.

Вплив декременту на коливання рідини. Амплітудно-частотна характеристика парціального осцилятора. Для розгляду вільних коливань рідини необхідно сформулювати відповідне рівняння, що описує коливальний рух рідини без врахування зовнішніх факторів:

$$\ddot{y} + f \cdot \omega_0 \cdot \dot{y} + \omega_0^2 \cdot y = 0; \tag{22}$$

$$f = \delta/\pi,$$

де $f \cdot \omega_0$ – коефіцієнт дисипації; ω_0 – власна кругова частота коливань, $\omega_0 = 2\pi/T$.

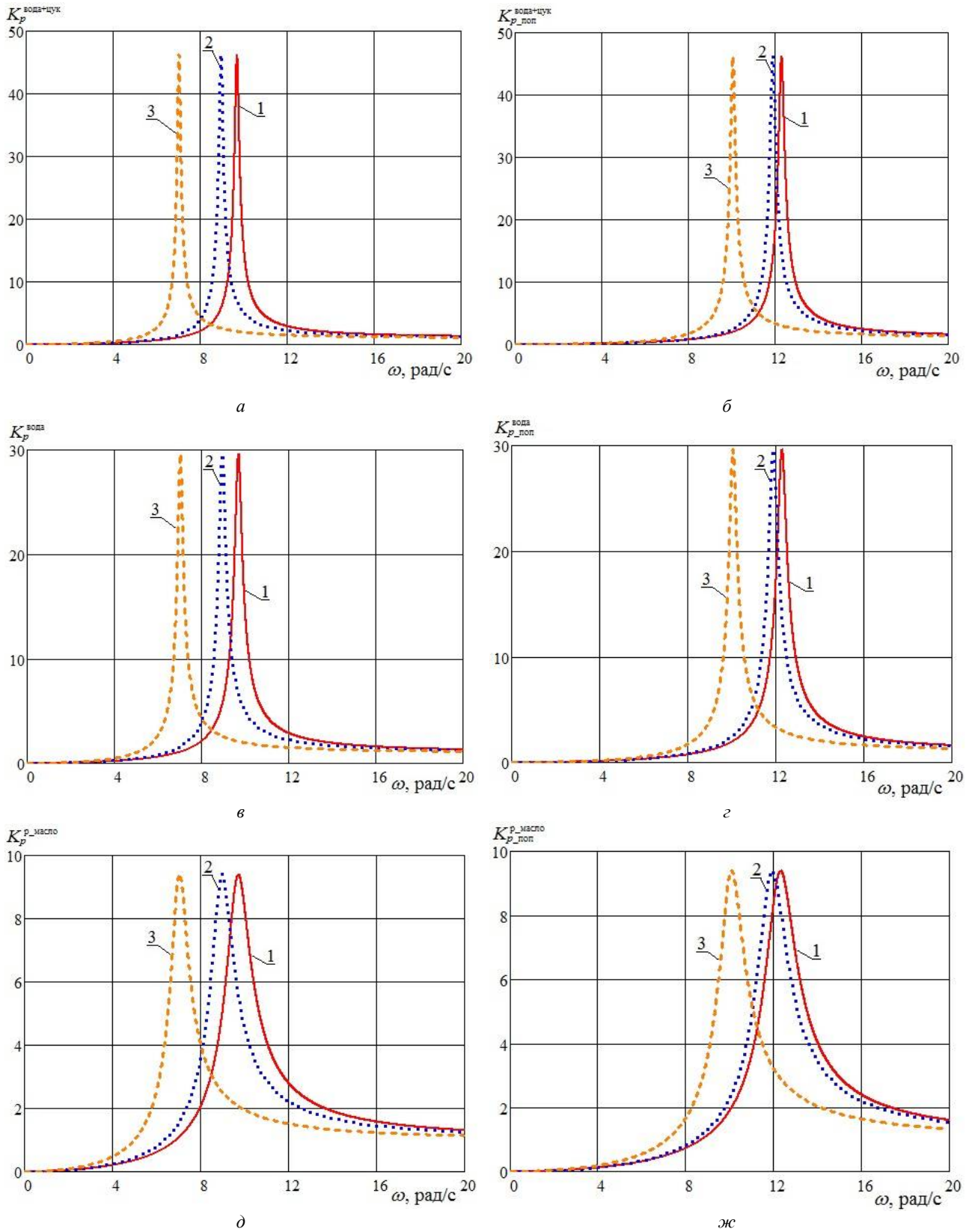


Рис. 9 – Амплітудно-частотні характеристики основного парціального шару рідини:
 а, б – 20% розчину цукру; в, г – води; д, ж – рослинної олії; а, в, д – поздовжні; б, г, ж – поперечні;
 1 – $h = 0,15$ м; 2 – $h = 0,1$ м; 3 – $h = 0,05$ м.

Розв'яжемо рівняння (22) за допомогою експоненти з комплексним показником. Якщо

$$y = e^{i\omega t}, \quad i = \sqrt{-1},$$

тоді

$$-\omega^2 + i(\delta/\pi) \cdot \omega_0 \cdot \omega + \omega_0^2 = 0 \rightarrow \omega^2 - i(\delta/\pi) \cdot \omega_0 \cdot \omega - \omega_0^2 = 0. \quad (23)$$

Розв'язками характеристичного рівняння (23) є два комплексних числа:

$$\omega = i(\delta/2\pi) \cdot \omega_0 \pm \omega_0 \sqrt{1 - (\delta/2\pi)^2}.$$

Зважаючи на отриману формулу та умову $\delta < 0.1$, зробимо висновок про те, що вплив декременту загасання на частоти вільних коливань дуже малий, про що йшлося й вище.

Для розгляду вимушених коливань рідини складемо рівняння, що описує рух основного шару рідини з врахування зовнішніх факторів. Та використаємо для багатогармонійного збурення $F(t)$ комплексний запис:

$$\ddot{y} + f \cdot \omega_0 \cdot \dot{y} + \omega_0^2 \cdot y = F(t); \quad (24)$$

$$F(t) = A_0 \omega_0^2 e^{i\omega t},$$

де A_0 – це амплітудний множник.

Представимо розв'язок (24) у вигляді $y = A \cdot e^{i\omega t}$, тоді

$$-A \cdot \omega^2 + i \cdot A \cdot f \cdot \omega_0 \cdot \omega + A \cdot \omega_0^2 = A_0 \cdot \omega_0^2. \quad (25)$$

Для якісної оцінки результатів амплітудно-частотного аналізу введемо коефіцієнт K_p , який відобразить відношення амплітуди вимушених коливань з амплітудним множником:

$$K_p = |A|/A_0.$$

На рис. 9 наведено амплітудно-частотні характеристики для різних рідин (20 % водного розчину цукру; води; рослинної олії) при дії вимушених коливань в поздовжній та поперечній площинах.

Як видно з рис. 9, максимальні амплітуди вимушених коливань в поперечній та в поздовжній площинах (які визначаються відповідним декрементом загасання) для кожної рідини при однаковій висоті наповнення у практичному сенсі співпадають; в деяких випадках різниця не перевищує 1 %. Наявність різниці пояснено вище.

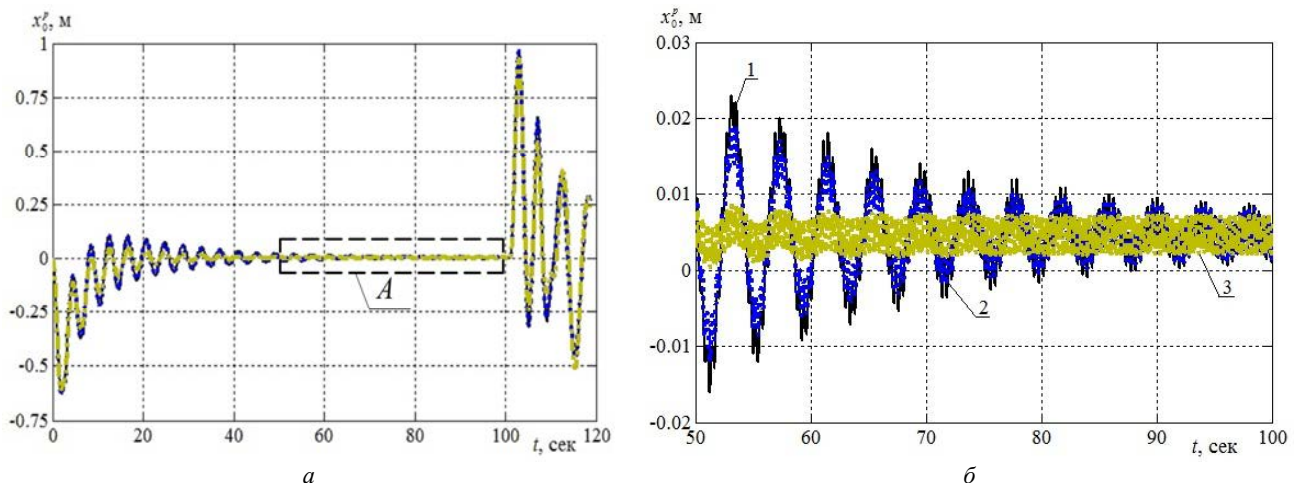


Рис. 10 – Результати моделювання горизонтального зсуву основного парціального шару ($k = 0$) рідини в цистерні:

a – загальний вигляд; b – ділянка A ; 1 – для 20 % розчину цукру ($\delta_1 \approx 0,05$); 2 – для води ($\delta_1 \approx 0,04$);

3 – для рослинної олії ($\delta_1 \approx 0,15$).

Вплив величини декременту загасання на рух рідини в цистерні. Значення декременту загасання рідини різної в'язкості використаємо при обчисленні горизонтальних зсувів поверхневих шарів рідини в причіпній цистерні типу BSA KTW 20, яка транспортується колісним трактором ХТЗ-240К. При моделюванні використаємо математичну модель пов'язаних коливань з роботи [15]. На рис. 10 показано результати моделювання при рівні рідини в цистерні 1,5 м; передавальне число трансмісії – 25,8. Зміни крутного моменту двигуна та коефіцієнтів тертя на етапах розгону та гальмування у цьому розрахунку задано наближеними аналітичними залежностями

ми. Амплітуда мікроколивань нерівностей шляху становила $A_\lambda = 0.02$ м; а довжина хвилі мікроколивань $L_\lambda = 2$ м.

Як видно з графіків на рис. 10, транспортування рослинної олії відбувається значно стабільніше, ніж води, адже величина горизонтального зсуву поверхневого шару олії мінімальна.

Вплив величини змінного декременту загасання на рух рідини при параметричному резонансі. У статті [22], де вивчаються умови для виникнення параметричного резонансу у тракторній цистерні із рідиною, яка має вільну поверхню, зазначалося, що система має можливість відстроюватися від резонансу за рахунок залежності власної частоти парціального осцилятора від його амплітуди коливань. Вище було з'ясовано, що висока амплітуда збільшує декремент загасання, і це, апіорі, обмежує та стримує розвиток параметричного резонансу. Як ця апіорна можливість реалізує себе на практиці показано на рис. 11, де моделюється рух трактора із врахуванням змінного декременту загасання коливань.

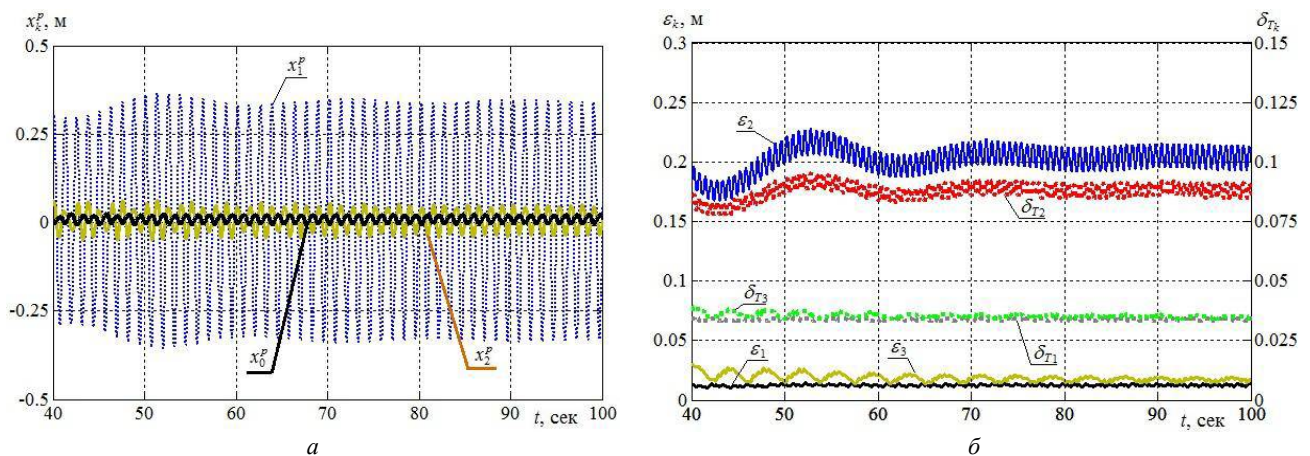


Рис. 11 – Результати математичного моделювання розвитку параметричних коливань у цистерні з рідиною після врахування місцевих опорів руху: а – зміщення парціальних шарів рідини; б – зміни амплітуди ε_k та декременту δ_{Tk} загасання коливань для k – того парціального осцилятора.

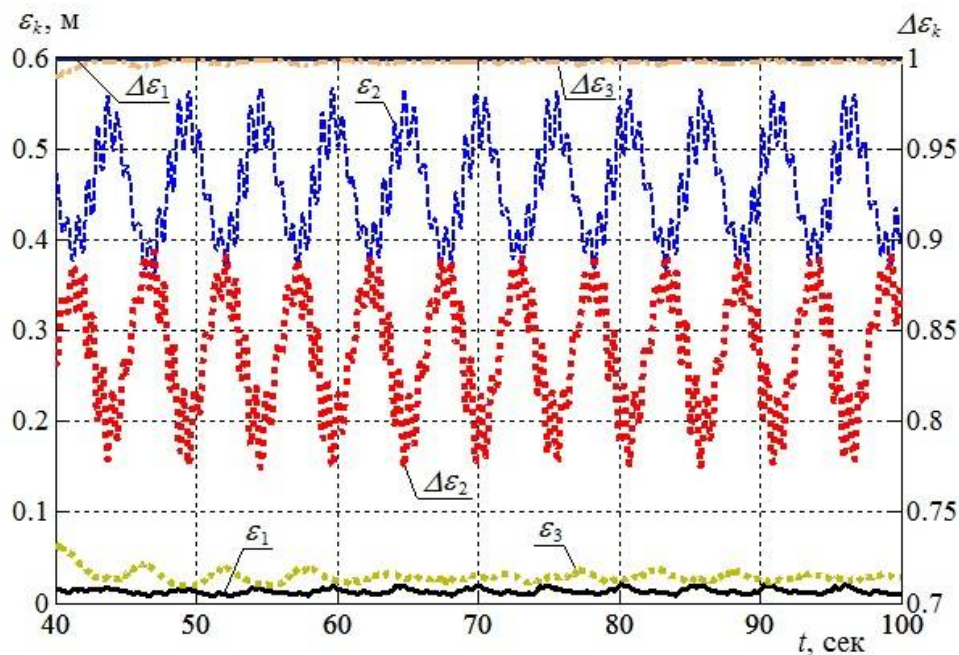


Рис. 12 – Зміни амплітуд коливань ε_k і коефіцієнтів $\Delta\varepsilon_k$ коректування частоти для k – того парціального осцилятора без урахування місцевих опорів руху.

Зауважимо, що графіки рис. 11 доцільно порівняти з графіками рис. 12 (статті [22]), де моделюється та ж сама ситуація, проте без врахування змінного декременту загасання. Як бачимо, врахування місцевих опорів ру-

ху рідини привело до значного вигладжування розрахункових характеристик та ефективно обмежило амплітуду резонансних коливань рідини у тракторній цистерні.

Висновки. Доведено адекватність використання математичних алгоритмів [15], які визначають частоти вільних коливань рідини в ємності шляхом порівняння теоретичних та експериментальних значень періодів коливання рідини; максимальна похибка не перевищує 4,35 %.

Підтверджено, що при значних рівнях наповнення ємності логарифмічний декремент загасання рідини залежить від цього рівня. Проте великий вплив має величина амплітуди коливань рідини, що дозволяє стверджувати про перемінне значення декременту загасання під час руху трактора з цистерною.

На основі теоретичного дослідження отримано формули (17), (20) і (21), за якими можливо встановити величину логарифмічного декременту загасання для рідин різноманітної в'язкості, які коливаються в ємностях різного розміру. Порівнюючи результати теоретичного та експериментального дослідження встановлено, що для мало в'язких рідин похибка застосування цих формул не перевищує 11 %, а для рослинної олії – 17 %.

Список літератури

1. Слезкин Н. А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. – Москва : Гос. изд-во физ.-техн. лит., 1955. – 521 с.
2. Жилин П. А. Рациональная механика сплошных сред : учеб. пособие. – Санкт-Петербург : Изд-во Политехн. ун-та, 2012. – 584 с.
3. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. Изд. 5-е, переработанное. – М. : Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1978. – 736 с.
4. Микишев Г. Н., Рабинович Б. И. Динамика твёрдого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. – Москва : Машиностроение, 1968. – 540 с.
5. Мерзляков А. В., Матыева З. О. Аналитическое решение задачи о малых вынужденных колебаниях идеальной жидкости // Вестник Томского гос. ун-та. Математика и механика. – 2017. – № 48. – С. 70 – 81.
6. Шеретов Ю. В. Динамика сплошных сред при пространственно-временном осреднении. – Москва-Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009. – 400 с.
7. Балашов В. А., Савенков Е. Б. Численное исследование двумерной квазигидродинамической модели течения двухфазной изотермической жидкости с учетом поверхностных эффектов // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. – 2016. – № 13. – 20 с. doi: 10.20948/prepr-2016-13.
8. Бруцкий Е. В., Костин А. Г., Никифорович Е. И., Розумнюк Н. В. Метод численного решения уравнений Навье – Стокса в переменных скорость-давление // Прикладна гідромеханіка. – 2008. – Т. 10, № 2. – С. 13 – 23.
9. Румянцев Б. Н. О движении твердого тела, содержащего полости, заполненные вязкой жидкостью // Прикладная математика и механика. – 1964. – Т. 28. – Вып. 6. – С. 1127 – 1132.
10. Черноусько Ф. Л. Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость. – Москва : Вычислительный центр АН СССР, 1968. – 232 с.
11. Chorin A. J. A numerical method for solving incompressible viscous flow problems // Journal Comp. Phys. – 1997. – Vol 135. – Issue 2. – P. 118 – 125. doi: 10.1006/jcph.1997.5716.
12. Harlow F. H., Welch J. E. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface // Physics Fluids. – 1965. – Vol. 8. – № 12. – P. 2182 – 2189. doi: 10.1063/1.1761178.
13. Ковеня В. М. Алгоритмы расщепления при решении многомерных задач аэрогидродинамики. – Новосибирск : Изд-во СО РАН, 2014. – 280 с.
14. Белоцерковский О. М. Численное моделирование в механике сплошных сред. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва : Физматлит, 1994. – 448 с.
15. Кожушко А. П., Григор'єв О. Л. Математичне моделювання вільних і вимушених коливань рідини в горизонтальній ємності з вільною поверхнею // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2018. – № 3 (1279). – С. 41 – 51.
16. Кожушко А. П., Григор'єв О. Л. Моделювання пов'язаних коливань колісного трактора та цистерни з рідиною на прямому шляху зі складним рельєфом // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2018. – № 27 (1303). – С. 34 – 61.
17. Касымжанова А. Б., Бектасова Г. С., Шевчук Е. П. Исследование динамического коэффициента поверхностного натяжения водных растворов с различной концентрацией // Актуальные научные исследования в современном мире. – 2018. – № 2-1 (34). – С. 84 – 91.
18. Кузнецов А. Л., Будаева В. А., Суворов О. А., Пугачёв И. О., Никифорова А. Л. Изучение физико-химических свойств активированных растворов // Хранение и переработка сельхозсырья, 2015. – № 8. – С. 25 – 27.
19. Игнатова Ю. И., Паю И. В. Исследование качества подсолнечного масла на основе определения коэффициента поверхностного натяжения. – Режим доступа: <https://bit.ly/3mgdTJj>. – Дата обращения : 27 ноября 2020.
20. Нагорнов С. А., Дворецкий Д. С., Романцова С. В., Таров В. П. Техника и технологии производства и переработки растительных масел : учебное пособие. – Тамбов : Изд-во ГОУ ВПО ТГТУ, 2010. – 96 с.
21. Идельчик И. Е. Справочник по гидравлическим сопротивлениям // Под ред. М. О. Штейнберга. — 3-е изд., перераб. и доп. – М. : Машиностроение, 1992. — 672 с.
22. Кожушко А. П., Григор'єв О. Л. Аналіз впливу параметричного резонансу на рух тракторної цистерни при транспортуванні рідкого вантажу // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія : Динаміка і міцність машин. – Харків : НТУ «ХПІ». – 2020. – № 2. – С. 57 – 66.

References (transliterated)

1. Slezkin N. A. *Dinamika вязкой несжимаемой жидкости* [Dynamics of viscous incompressible fluid]. Moscow, Gos. izd-vo fiz.-tekhn. lit. Publ., 1955. 521 p.
2. Zhilin P. A. *Ratsional'naya mekhanika sploshnykh sred : ucheb. posobie* [Rational continuum mechanics: a study guide]. St. Petersburg, Izd-vo politekhn. un-ta Publ., 2012. 584 p.
3. Loytsyanskiy L. G. *Mekhanika zhidkosti i gaza. Izd. 5-e, pererabotannoe* [Mechanics of fluid and gas. Ed. 5th, revised]. Moscow, 1978. 736 p.

4. Mikishev G. N., Rabinovich B. I. *Dinamika tverdogo tela s polostyami, chastichno zapolnennymi zhidkost'yu* [Dynamics of a rigid body with cavities partially filled with liquid]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1968. 532 p.
5. Merzlyakov A. V., Matyeva Z. O. Analiticheskoe reshenie zadachi o mal'kikh vyzhuzhennykh kolebaniyakh ideal'noy zhidkosti [Analytical solution of the problem of small forced vibrations of ideal fluid]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Bulletin of the Tomsk State University. Mathematics and Mechanics]. 2017, no. 48, pp. 70–81.
6. Sheretov Yu. V. *Dinamika sploshnykh sred pri prostranstvenno-vremennom osrednenii* [Dynamics of continuous media with space-time averaging]. Moscow-Izhevsk, NITS "Regulyarnaya I khaoticheskaya dinamika" Publ., 2009. 400 p.
7. Balashov V. A., Savenkov E. B. Chislennoe issledovanie dvumernoy kvazigidrodinamicheskoy modeli techeniya dvukhfaznoy izotermicheskoy zhidkosti s uchedom poverkhnostnykh effektov [Numerical study of a two-dimensional quasi-hydrodynamic model of the flow of a two-phase isothermal fluid taking into account surface effects]. *Preprinty IPM im. M. V. Keldysha* [KIAM Preprints]. 2016, no. 13, 20 p. doi: 10.20948/prepr-2016-13
8. Bruyatskiy E. V., Kostin A. G., Nikiforovich E. I., Rozumnyuk N. V. Metod chislennogo resheniya uravneniy Nav'e – Stoksa v peremennykh skorost'-davlenie [Method for numerical solution of Navier-Stokes equations in velocity-pressure variables]. *Prykladna gidromekhanika* [Applied hydromechanics]. 2008, Iss. 10, no. 2, pp. 13–23.
9. Rummyantsev B. N. O dvizhenii tverdogo tela, sodержashchego polosti, zapolnennye vyazkoy zhidkost'yu [On the motion of a rigid body containing cavities filled with viscous fluid]. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics]. 1964, Iss. 28, vol. 6, pp. 1127–1132.
10. Chernousko F. L. *Dvizhenie tverdogo tela s polostyami, sodержashchimi vyazkuyu zhidkost'* [The motion of a solid with cavities containing viscous fluid]. Moscow, Vychislitel'nyy tsentr AN SSSR Publ., 1968. 232 p.
11. Chorin A. J. A numerical method for solving incompressible viscous flow problems. *Journal Comp. Phys.* 1997, vol. 135, issue 2, pp. 118–125. doi: 10.1006/jcph.1997.5716.
12. Harlow F. H., Welch J. E. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface. *Physics Fluids*. 1965, vol. 8, no. 12, pp. 2182–2189. doi: 10.1063/1.1761178.
13. Kovenya V. M. *Algoritmy rasshepleniya pri reshenii mnogomernykh zadach aerogidrodinamiki* [Splitting algorithms for solving multidimensional problems of aerohydrodynamics]. Novosibirsk, Izd-vo SO RAN Publ., 2014. 280 p.
14. Belotserkovskiy O. M. *Chislennoe modelirovanie v mekhanike sploshnykh sred. : 2-e izd., pererab. i dop* [Numerical modeling in continuum mechanics: 2nd ed., rev. and enl.]. Moscow, Fizmatlit Publ., 1994. 448 p.
15. Kozhushko A. P., Grygor'ev A. L. *Matematychni modelyuvannya vil'nykh i vymushenykh kolyvan' ridyny v goryzontal'niy yemnosti z vil'noyu poverkhneyu* [Mathematical modelling of low-frequency oscillations of viscous fluid in horizontal container with free surface]. *Visnyk Natsional'nogo tekhnichnogo universytetu «KhPI». Seriya : Matematychni modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series : Mathematical modeling in engineering and technology]. 2018, no. 3 (1279), pp. 41–51.
16. Kozhushko A. P., Grygor'ev A. L. *Modelyuvannya pov'yazanykh kolyvan' kolisnogo traktora ta tsysterny z ridynoyu na pryamomu shlyakhu zi skladnym rel'yefom* [Modeling of coupled oscillations of wheeled tractors and tanks with liquid on a straight road with difficult terrain]. *Visnyk Natsional'nogo tekhnichnogo universytetu «KhPI». Seriya : Matematychni modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series : Mathematical modeling in engineering and technology]. 2018, no. 27 (1303), pp. 34–61.
17. Kasymzhanova A. B., Bektasova G. S., Shevchuk E. P. Issledovanie dinamicheskogo koeffitsienta poverkhnostnogo natyazheniya vodnykh rastvorov s razlichnoy kontsentratsiyey [Study of the dynamic coefficient of surface tension of aqueous solutions with different concentrations], *Aktual'nye nauchnye issledovaniya v sovremennom mire* [Actual scientific research in the modern world]. 2018, no. 2-1 (34), pp. 84–91.
18. Kuznetsov A. L., Budaeva V. A., Suvorov O. A., Pugachyov I. O., Nikiforova A. L. *Izuchenie fiziko-khimicheskikh svoystv aktivirovannykh rastvorov* [Study of physicochemical properties of activated solutions], *Khranenie i pererabotka sel'khozsyrya* [Storage and processing of agricultural raw materials]. 2015, no. 8, pp. 25–27.
19. Ignatova Yu. I., Payu I. V. *Issledovanie kachestva podsolnechnogo masla na osnove opredeleniya koeffitsienta poverkhnostnogo natyazheniya* [Research of the quality of sunflower oil based on the determination of the surface tension coefficient]. Available at <https://bit.ly/3mgdTJj> (accessed 27 November 2020).
20. Nagornov S. A., Dvoretzkiy D. S., Romantsova S. V., Tarov V. P. *Tekhnika i tekhnologii proizvodstva i pererabotki rastitel'nykh masel : uchebnoe posobie* [Technique and technology of production and processing of vegetable oils: a tutorial]. Tambov, Izd-vo GOU VPO TGTU Publ., 2010. 96 p.
21. Idel'chik I. E. *Spravochnik po gidravlicheskim soprotivleniyam. pod red. M. O. Shteynberga. 3-e izd., pererab. i dop* [Handbook on hydraulic resistance. Ed. M.O.Steinberg. 3rd ed., rev. and enl.]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1992. 672 p.
22. Kozhushko A. P., Grygor'ev A. L. *Analiz vplyvu parametrychnogo rezonansu na rukh traktornoyi tsysterny pry transportuvanni ridkogo vantazhu* [Analysis of the influence of parametric resonance on the motion of a tractor tank when transporting liquid cargoes]. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya : Dynamika i mitsnist' mashyn* [Bulletin of the NTU "KhPI". Series : Dynamics and strength of machines]. 2020, no. 2, pp. 57–66.

Hadziuvata (received) 30.11.2020

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Кожушко Андрій Павлович – кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-64-64; e-mail: Andreykozhushko7@gmail.com.

Кожушко Андрей Павлович – кандидат технических наук, доцент, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: (057) 707-64-64; e-mail: Andreykozhushko7@gmail.com.

Kozhushko Andriy Pavlovych – Candidate of Technical Sciences (Ph. D.), Senior Lecturer at the Department of Car and Tractor Industry, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute, Kharkiv; tel.: (057) 707-64-64; e-mail: Andreykozhushko7@gmail.com.