

- promyshlennosti s pomoshch'yu matematicheskikh metodov [Determining allergic dermatosis risk factors for chemical-pharmaceutical industry workers using mathematical methods]. *Tezisy dokladov nauchno-prakticheskoy konferentsii «Metagigiena-93»* [Meta hygiene'93. Proc. of the Sci.-Pract. Conf.], 1993, pp. 137–138.
3. Zadeh L. A. Fuzzy sets. *Information and Control*. 1965, no. 8 (3), pp. 338–353.
  4. Shtovba S. D. *Proektirovanie nechetkikh sistem sredstvami MATLAB* [Designing fuzzy systems using MATLAB]. Moscow, Goryachaya liniya-Telekom Publ., 2007. 288 p.
  5. Chikina N. A., Antonova I. V. Izuchenie vliyaniya vnutrennikh faktorov riska na razvitie allergodermatozov u rabochikh khimiko-farmatsevticheskikh predpriyatiy [Studying the influence of internal risk factors on the allergic dermatoses development of chemical and pharmaceutical enterprises workers]. *Vestnik NTU «KhPI». Tematicheskii vypusk : Informatika i modelirovanie* [Bulletin of NTU «KhPI». Series : Informatics and modeling]. Kharkov, NTU «KhPI» Publ., 2007, no. 19, pp. 195–200.
  6. Chikina N. A., Antonova I. V. Matematicheskie modeli adaptatsii k vrednyim usloviyam truda na osnove metoda korrelyatsionnoy adaptometrii [Mathematical models of adaptation to harmful working conditions based on the method of correlation adaptometry]. *Vestnik NTU «KhPI». Tematicheskii vypusk : Informatika i modelirovanie* [Bulletin of NTU «KhPI». Series : Informatics and modeling]. Kharkov, NTU «KhPI» Publ., 2008, no. 49, pp. 184–189.
  7. Povoroznyuk A. I., Chikina N. A., Antonova I. V. Nechetkaya ekspertnaya sistema prognoza riska razvitiya professional'no obuslovlennykh zabolovaniy [Fuzzy expert system for predicting the risk of developing occupationally determined diseases]. *Vestnik NTU «KhPI». Tematicheskii vypusk : Informatika i modelirovanie* [Bulletin of NTU «KhPI». Series : Informatics and modeling]. Kharkov, NTU «KhPI» Publ., 2010, no. 31, pp. 127–132.
  8. Montano D. Chemical and biological work-related risks across occupations in Europe : a review. *Journal of Occupational Medicine and Toxicology*. 2014, no. 9, article 28, doi :10.1186/1745-6673-9-28.
  9. Timoshina D., Lub'yanova I. Suchasni problemy profesiyanoi alergopatologii [Modern problems of occupational allergology]. *Medytsyna pratsi* [Occupational health]. 2011, no. 4, pp. 47–51.
  10. Orekhova O. V., Pavlenko O. I. Profesiyni ryzyky zdorov'ya pratsyuyuchykh yak suchasna kontsepsiya medytsyny pratsi [Occupational health risks of workers as a modern concept of occupational medicine]. *Ukrayin's'kiy zhurnal z problem medytsyny pratsi* [Ukrainian Journal of Occupational Health]. 2017, no. 3(52), pp. 77–87.
  11. Chikina N. A., Antonova I. V. AIS mnogofaktornoy profilaktiki professional'no obuslovlennykh zabolovaniy v usloviyakh vrednogo proizvodstva [The AIS of multifactorial prophylaxis of professionally caused diseases in harmful production]. *Sb. nauch. trudov 3-go Mezhdunarodnogo radioelektronnoho foruma «Prikladnaya elektronika. Sostoyanie i perspektivy razvitiya»* [Applied Electronics. Status and development prospects. Proc. of the 3rd International Radio-Electronic Forum]. Kharkov, 2008, vol. 4, pp. 238–241.
  12. Glants S. *Mediko-biologicheskaya statistika* [Primer of biostatistics]. Moscow, Praktika Publ., 1999. 459 p.
  13. Rumyantsev P. O., Saenko V. A., Rumyantseva U. V., Chekin S. Yu. *Statisticheskie metody analiza v klinicheskoy praktike* [Statistical methods of analysis in clinical practice]. Available at : <http://medstatistic.ru/articles/StatMethodsInClinics.pdf>. (accessed 10.01.2020).
  14. *Otchet o nauchno-issledovatel'skoy rabote «Razrabotka kompleksa meropriyatiy s avtomatizirovannoy sistemoy upravleniya po ranney diagnostike, lecheniyu i profilaktike bol'nykh allergodermatozami sredi rabochikh s vrednymi usloviyami truda»* [Report on the research work «Developing a set of measures for early diagnosis, treatment and prevention of patients with allergic dermatosis among workers with harmful working conditions using an automated control system»]. 1993, no. 01.9.10 050715.

Надійшла (received) 17.01.2020

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

**Чікіна Наталія Олександрівна (Chikina Nataliya Aleksandrovna, Chikina Natalia Aleksandrovna)** – кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-66-93; e-mail: nachikina56@gmail.com.

**Антонова Ірина Володимирівна (Antonova Iryna Vladimirovna, Antonova Iryna Vladimirovna)** – кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (095) 465-98-33; e-mail: antonova2601@gmail.com.

**Солошенко Ельвіра Миколаївна (Soloshenko Elvira Nikolaevna, Soloshenko Elvira Nykolaevna)** – доктор медичних наук, професор, Державна установа «Інститут дерматології та венерології Національної академії медичних наук України», м. Харків; тел.: (050) 648-13-85; e-mail: elvirasolo@ukr.net.

УДК 539.3

doi: 10.20998/2222-0631.2020.1.18

**Е. Г. ЯНЮТИН, А. В. ВОРОПАЙ, П. А. ЕГОРОВ**

**НЕСТАЦИОНАРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ МЕМБРАН И ПЛАСТИН  
В ФОРМЕ ПРЯМОУГОЛЬНОГО РАВНОБЕДРЕННОГО ТРЕУГОЛЬНИКА**

Рассматривается нестационарное деформирование механических объектов (мембран и пластин) имеющих форму прямоугольного равнобедренного треугольника. Для решения задачи используется подход, предложенный Дж. В. Стреттом (лордом Рэлеем) в монографии «Теория звука» и использованный С. П. Тимошенко в задаче о статическом деформировании треугольной пластины. Указанный подход состоит в дополнении треугольной пластины второй (идентичной исходной) до полного квадрата и решении задачи для квадратной мембраны/пластины, к которой кроме возмущающей силы прикладывается дополнительная нагрузка противоположного знака. Таким образом, решение задачи сводится к исследованию колебаний квадратной мембраны, закрепленной по контуру, или квадратной изотропной пластины средней толщины (типа Тимошенко), имеющей шарнирное опирание. Приведены примеры расчетов для треугольной мембраны и пластины средней толщины, которые демонстрируют эффективность предложенного подхода при решении задач нестационарного деформирования.

**Ключевые слова:** треугольная мембрана, пластина средней толщины, нестационарное нагружение, форма прямоугольного равнобедренного треугольника, прогиб.

© Е. Г. Янютин, А. В. Воропай, П. А. Егоров, 2020

**Є. Г. ЯНЮТИН, О. В. ВОРОПАЙ, П. А. ЄГОРОВ**  
**НЕСТАЦІОНАРНІ КОЛИВАННЯ МЕМБРАН І ПЛАСТИН**  
**У ФОРМІ ПРЯМОКУТНОГО РІВНОБЕДРЕНОГО ТРИКУТНИКА**

Розглядається нестационарне деформування механічних об'єктів (мембран і пластин), які мають форму прямокутного рівнобедреного трикутника. Для розв'язання задачі використовується підхід, запропонований Дж. В. Стреттом (лордом Релеем) в монографії «Теорія звуку» і використаний С. П. Тимошенко у задачі про статичне деформування трикутної пластини. Зазначений підхід полягає в доповненні трикутної пластини другою (ідентичною вихідній) до повного квадрату і розв'язанні задачі для квадратної мембрани/пластини, до якої крім збурюючого навантаження прикладається додаткове протилежного знаку. Таким чином, розв'язання задачі зводиться до дослідження коливань квадратної мембрани, яка закріплена по контуру, або квадратної ізотропної пластини середньої товщини (типу Тимошенко), що має шарнірне опирання. Наведені приклади розрахунків для трикутної мембрани і пластини середньої товщини, які демонструють ефективність запропонованого підходу при розв'язанні задач нестационарного деформування.

**Ключові слова:** трикутна мембрана, пластина середньої товщини, нестационарне навантаження, форма прямокутного рівнобедреного трикутника, прогин.

**Y. G. YANYUTIN, A. V. VOROPAY, P. A. YEGOROV**  
**NONSTATIONARY VIBRATIONS OF RECTANGULAR ISOSCELES TRIANGLE SHAPED**  
**MEMBRANES AND PLATES**

Nonstationary deforming of mechanical objects (membranes and plates) having the shape of a rectangular isosceles triangle is considered. To solve the problem, we use the approach proposed by J. V. Strutt (Lord Rayleigh) in the monograph "The Theory of Sound" and used by S. P. Timoshenko in the problem of static deformation of a triangular plate. This approach consists in supplementing the triangular plate with the second one (identical to the original plate) to compose a full square and solving the problem for a square membrane/plate, to which, in addition to the disturbing force, an additional load of the opposite sign is applied. Thus, solving the problem is reduced to the study of vibrations of a square membrane fixed along the contour or of a hinged square isotropic plate of medium thickness (Timoshenko type). Examples of calculations for a triangular membrane and a medium-thickness plate are presented, which demonstrate the effectiveness of the proposed approach in solving problems of nonstationary deformation.

**Key words:** triangular membrane, medium-thickness plate, nonstationary loading, shape of a rectangular isosceles triangle, deflection.

**Введение и анализ последних исследований.** Теория колебаний прямоугольной мембраны может быть использована для изучения колебаний треугольной мембраны. Рекомендации по этому вопросу приведены Дж. В. Стреттом в работе, которая относится к одной из лучших книг по теории колебаний деформируемых объектов [1]. В упомянутой книге он пишет: «Изложенная ... теория квадратных мембран включает в себе гораздо больше, чем мы первоначально имели в виду... Так, например, там, где диагональ квадрата представляет узловую линию, мы получаем решение, примененное к мембране, закрепленная граница которой представляет равнобедренный прямоугольный треугольник».

Позже прием, подсказанный лордом Рэлеем, был использован в монографии [2] при решении задачи о статическом деформировании треугольной пластини.

В настоящее время исследование объектов, имеющих произвольную сложную форму, принято выполнять с использованием численных методов, зачастую метода конечных элементов. Кроме того, широкое распространение получили пакеты прикладных программ ANSYS, NASTRAN, COSMOS и другие, в которых не сложно получить решение прямых задач для рассматриваемых в этой статье треугольных объектов. Однако, всегда представляет интерес получение аналитических решений, которые дают возможность построения решений не только прямых, но и обратных задач механики деформируемого твердого тела.

**Вынужденные колебания мембраны в форме прямоугольного равнобедренного треугольника.** В первой части статьи будет приведено описание решения задачи о вынужденных колебаниях мембраны в виде треугольника (рис. 1, а). Для простоты рассматриваем колебания мембраны, вызванные внешними сосредоточенными воздействиями.

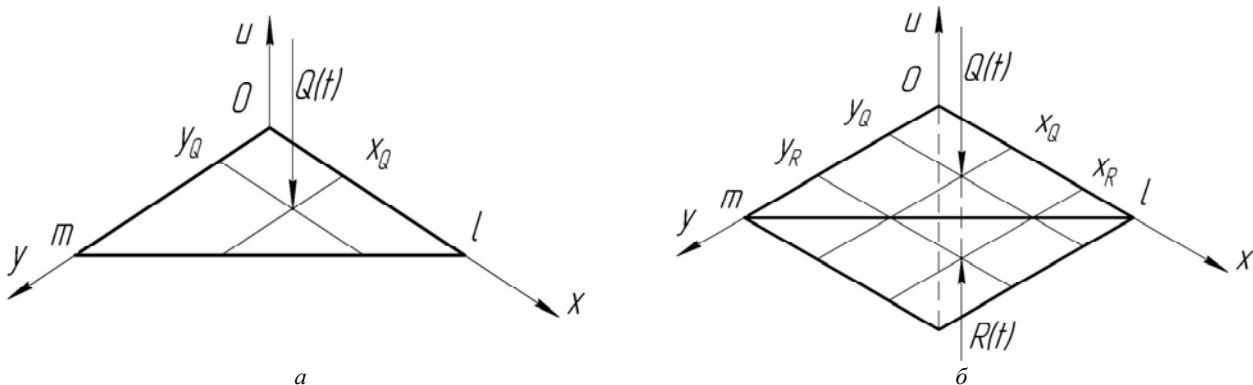


Рис. 1 – Схема исследуемой системы.

Задача о колебаниях мембраны сводится к решению следующего уравнения, подобного приведенному в

[3]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{\rho} Q^*(x, y, t), \quad (1)$$

где  $u = u(x, y, t)$  – отклонения точек мембраны от плоскости  $xOy$ ;  $a^2 = T / \rho$ ;  $T$  – величина натяжения мембраны;  $\rho$  – поверхностная плотность, считающаяся постоянной;  $Q^*(x, y, t)$  – интенсивность поперечной нагрузки, действующей на мембрану.

Система координат  $x$ ,  $y$  и связанная с ней прямоугольная мембрана показаны на рис. 1, б. Поскольку мембрана предполагается квадратной, то длина одной ее стороны равна длине второй:  $m = l$ . Начальные условия предполагаем нулевыми, то есть  $u|_{t=0} = f(x, y) = 0$ ,  $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = F(x, y) = 0$ . Диагонали мембраны лежат на прямых, уравнения которых следующие:

$$y - x = 0, \quad y + x - l = 0. \quad (2)$$

Необходимо обеспечить удовлетворение таких граничных условий:

$$\begin{aligned} u(0, y, t) &= 0 \quad (\text{на первой стороне треугольника}); \\ u(x, 0, t) &= 0 \quad (\text{на второй стороне треугольника}); \\ u(x, l - x, t) &= 0 \quad (\text{на третьей стороне треугольника}). \end{aligned} \quad (3)$$

Укажем, что первые два условия из (3) выполняются автоматически при выборе в качестве основы прямоугольной мембраны. И задача состоит только в удовлетворении третьего условия (3) – равенства нулю прогибов на диагонали  $u(x, l - x, t) = 0$ . Для этого воспользуемся дополнительной силой, приложенной к прямоугольной мембране.

Пусть действующая сила меняется во времени как функция  $Q(t)$ . Эта функция является заданной в случае, если решается прямая задача, и неизвестной, если решается обратная задача (определение изменения во времени возмущающей силы).

Введем в рассмотрение еще одну силу. Первая приложена в точке с координатами  $x_Q$ ,  $y_Q$ , а вторая приложена в точке с координатами  $x_R$ ,  $y_R$ , где  $x_R = l - y_Q$ ,  $y_R = l - x_Q$ . Вторая точка расположена симметрично по отношению к первой относительно прямой  $y + x - l = 0$ . Формулы для указанных сосредоточенных воздействий следующие:

$$\begin{aligned} Q(x, y, t) &= P(t) \delta(x - x_Q) \delta(y - y_Q); \\ R(x, y, t) &= -P(t) \delta(x - x_R) \delta(y - y_R). \end{aligned} \quad (4)$$

Используя аналогичные подходы к решению задачи о вынужденных колебаниях прямоугольной мембраны [4], получим выражение, определяющее процесс колебаний мембраны в форме равнобедренного прямоугольного треугольника:

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{kn}^Q}{\lambda_{kn}} \int_0^t P(\tau) \sin(\lambda_{kn}(t - \tau)) d\tau \cdot \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{l} - \\ &\quad - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{kn}^R}{\lambda_{kn}} \int_0^t P(\tau) \sin(\lambda_{kn}(t - \tau)) d\tau \cdot \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{l}, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\lambda_{kn}^2 = \frac{a^2 \pi^2}{l^2} (k^2 + n^2)$ ;  $C_{kn}^Q = \frac{1}{\rho} \frac{4}{l^2} \sin \frac{k\pi x_Q}{l} \sin \frac{n\pi y_Q}{l}$ ;  $C_{kn}^R = \frac{1}{\rho} \frac{4}{l^2} \sin \frac{k\pi x_R}{l} \sin \frac{n\pi y_R}{l}$ .

Рассмотрим два варианта приложения сосредоточенной силы к мембране. Первый – сила находится на прямой  $y - x = 0$  ( $y = x$ ), и второй вариант – сила приложена в произвольной точке мембраны.

Начнем со случая, когда сосредоточенная сила находится на прямой  $y - x = 0$ .

Покажем, что на прямой  $y + x = l$  соотношение (5) принимает значения равные нулю, то есть на третьей стороне мембраны удовлетворяется условие закрепления.

Для простоты предположим, что функция  $P(t) = qH(t)$  (пропорциональна *единичной функции Хевисайда*). Это упрощение не является принципиальным.

После элементарных для тригонометрических функций преобразований формулу (5) можно будет записать в следующем виде (при условии, что  $y = l - x$ , а  $y_Q = x_Q$ ):

$$u(x, l-x, t) = \frac{q}{\rho a^2 \pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \frac{1 - \cos(\lambda_{kn} t)}{k^2 + n^2} \sin \frac{k\pi x_Q}{l} \sin \frac{n\pi x_Q}{l} \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} [(-1)^{n+1} - (-1)^{k+1}]. \quad (6)$$

Если в соотношении (6)  $n$  и  $k$  одновременно четные, то выражение в квадратных скобках равно нулю. Если  $n$  и  $k$  одновременно нечетные, то выражение в квадратных скобках также равно нулю. Если одно из чисел  $n$  или  $k$  четно, а второе нечетно, то квадратная скобка будет формировать число 2 или  $-2$ .

В последнем случае в бесконечной сумме (6) будут встречаться члены, одинаковые по модулю, но с разными знаками. Следовательно, на третьей стороне треугольника будет иметь место  $u(x, l-x, t) \equiv 0$ .

Рассмотрим более общий случай расположения возмущающей силы, действующей на треугольную мембрану, когда сосредоточенная сила не находится на прямой  $y - x = 0$ . В этом случае вторая сила формирует симметрию в колебаниях мембраны и обеспечивает закрепление сторон треугольника вдоль прямой  $y + x = l$ . Нетрудно показать, что в силу рассмотренных ранее соображений функция (5) при  $y = l - x$  также равна нулю.

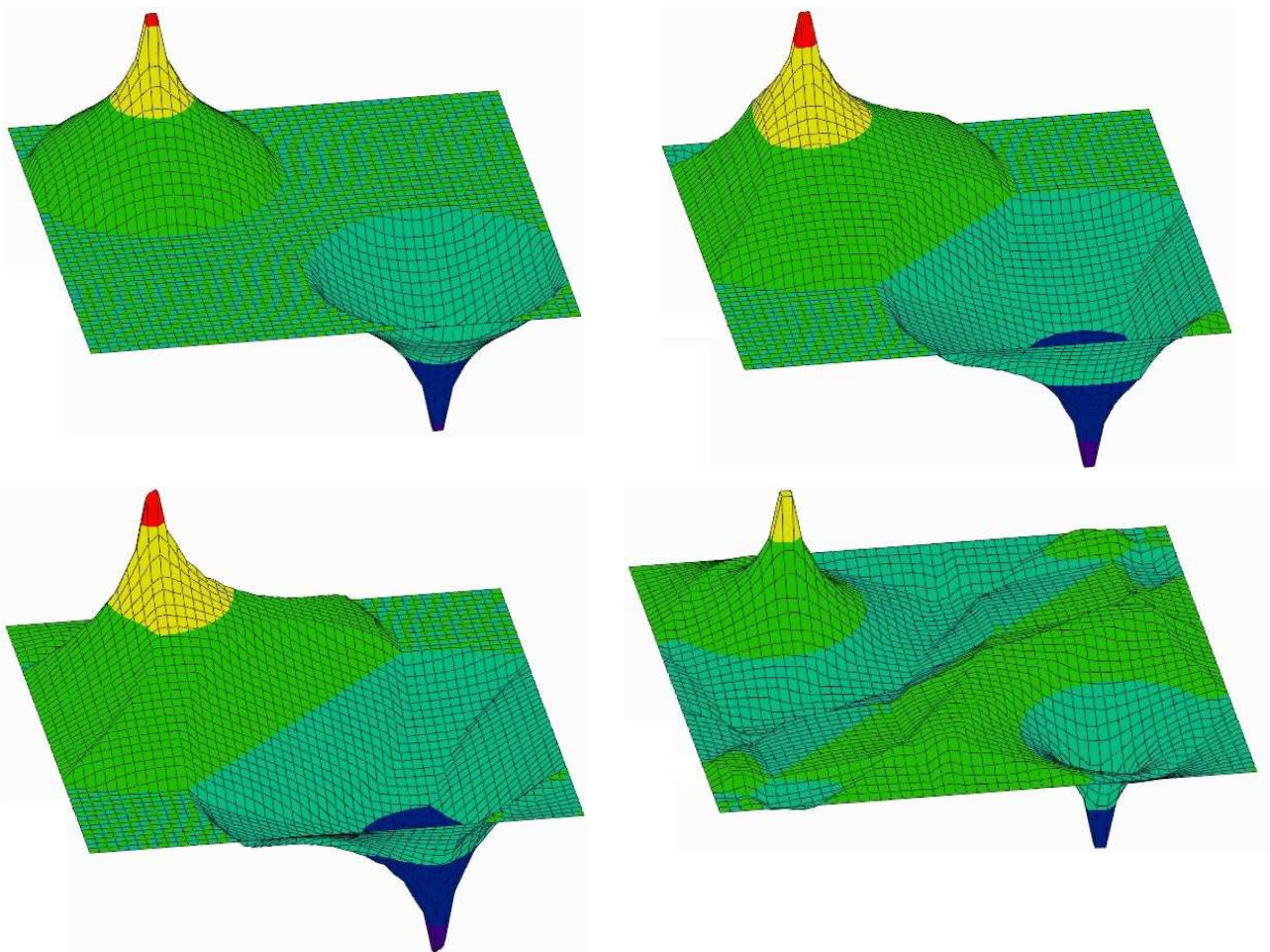


Рис. 2 – Процесс деформирования мембраны в различные моменты времени.

То есть выражение (5) определяет нестационарные колебания мембраны в форме равнобедренного прямоугольного треугольника с закреплением ее вдоль всех сторон.

В качестве исходных данных для численных расчетов по соответствующей прямой задаче приняты следующие характеристики: поверхностная плотность материала мембраны  $\rho = 7.89 \text{ кг/м}^2$ , скорость распространения волн деформации  $a = 268 \text{ м/с}$ , габариты мембраны  $l = 0.4 \text{ м}$ ,  $m = 0.4 \text{ м}$ , координаты точек приложения первой и второй сосредоточенных сил  $x_Q = 0.1 \text{ м}$ ,  $y_Q = 0.1 \text{ м}$ ,  $x_R = 0.3 \text{ м}$ ,  $y_R = 0.3 \text{ м}$ . Величина возмущающей нагрузки  $q = 10^3 \text{ Н}$ . Количество учитываемых членов в соответствующих двойных рядах Фурье принято равным 50 в каждом из двух направлений.

Графики на рис. 2 иллюстрируют процесс деформирования квадратной мембраны в разные моменты вре-

мени. Как видно из приведенных рисунков, перемещения на одной из диагоналей отсутствуют. Соответственно граничные условия для треугольной мембраны выполняются.

Обратные задачи для такой мембраны решаются с помощью подходов, освещенных в [5].

Естественно, поскольку исследуются линейные задачи, то можем легко рассмотреть варианты воздействия на треугольную мембрану двух и более сил. Пусть, например, на мембрану воздействуют две силы, которые во времени меняются как функции  $P_1(t)$  и  $P_2(t)$ , которые приложены и приложены в точках с координатами  $(x_{Q1}, y_{Q1})$  и  $(x_{Q2}, y_{Q2})$  соответственно. При решении задачи достаточно рассмотреть воздействие на соответствующую квадратную мембрану четырех сил, запись соответствующих формул, отражающих поперечные колебания треугольной мембраны, будет аналогичной формуле (5).

**Воздействие на треугольную мембрану произвольной нагрузки.** Пусть область, занимаемая квадратной мембраной, будет обозначена через  $D$ . Она ограничена отрезками прямых:  $x=0$ ;  $y=0$ ;  $x=l$ ;  $y=l$ . Соответственно диагоналями квадрата есть отрезки прямых:  $y=x$ ;  $y+x=l$ . Область  $D$  состоит из двух подобластей  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Подобласть  $\omega_1$  – это левый прямоугольный треугольник с равными катетами длиной  $l$ . Подобласть  $\omega_2$  – правый треугольник с катетами такой же длины. Гипотенуза у этих треугольников общая. Ее длина  $c=l\sqrt{2}$ . Эта гипотенуза лежит на прямой  $x+y=l$ . Пусть в подобласти  $\omega_1$  задана функция  $f_Q(x, y, t)$ , которая определяет нормальную нагрузку, воздействующую на левую треугольную мембрану. Зададим в подобласти  $\omega_2$  функцию  $f_R(x, y, t)$ , которая будет определять аналогичную нагрузку. Функция  $f_R(x, y, t)$  должна быть зеркальным отражением функции  $f_Q(x, y, t)$  относительно прямой  $x+y=l$ , причем

$$f_R(x, y, t) = -f_Q(l-y, l-x, t). \quad (7)$$

Поэтому считаем, что на квадратную мембрану воздействует нагрузка

$$F(x, y, t) = \begin{cases} f_Q(x, y, t), & \text{если } x, y \in \omega_1; \\ f_R(x, y, t), & \text{если } x, y \in \omega_2. \end{cases} \quad (8)$$

Уравнение для колебания квадратной мембраны следующее:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{\rho} F(x, y, t). \quad (9)$$

Для решения этого уравнения, по существу, достаточно уметь разложить каждую часть (9) в двойной ряд Фурье, то есть надо уметь определить коэффициенты в следующем разложении:

$$F(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_{kn}(t) \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{l}\right), \quad (10)$$

где предполагается, что  $F(x, y, t)$  определяется формулой (8), а  $F_{kn}(t)$  (в случае рассмотрения прямых задач) – заданные функции времени.

Помножим (10) на  $\sin\left(\frac{k_1\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{n_1\pi y}{l}\right)$  и проинтегрируем полученные соотношения по  $x$  и по  $y$  в пределах  $(0, l)$ :

$$\int_0^l \int_0^l F(x, y, t) \sin\left(\frac{k_1\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{n_1\pi y}{l}\right) dx dy = \frac{l^2}{4} F_{k_1 n_1}(t). \quad (11)$$

В дальнейшем от величин  $k_1$  и  $n_1$  можно перейти к величинам  $k$  и  $n$ .

Повторный интеграл, стоящий в левой части (11), можно записать в виде двойного по области  $D$ , то есть

$$\iint_D F(x, y, t) \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{l}\right) dx dy = \frac{l^2}{4} F_{kn}(t). \quad (12)$$

Преобразуем соотношение (12), используя свойство аддитивности двойного интеграла. Будем иметь:

$$\begin{aligned} \iint_D F(x, y, t) \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{l}\right) dx dy &= \iint_{\omega_1} f_Q(x, y, t) \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{l}\right) dx dy - \\ &- \iint_{\omega_2} f_Q(l-y, l-x, t) \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{l}\right) dx dy. \end{aligned} \quad (13)$$

В каждом из двух интегралов по подобластям  $\omega_1$  и  $\omega_2$  перейдем к повторным интегралам, используя пра-

вила вычисления двойных интегралов. Формула (13) примет вид:

$$\iint_D F(x, y, t) \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{l}\right) dx dy = \int_0^l \left( \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) \int_0^{l-x} f_Q(x, y, t) \sin\left(\frac{n\pi y}{l}\right) dy \right) dx - \int_0^l \left( \sin\left(\frac{n\pi y}{l}\right) \int_{l-y}^l f_Q(l-y, l-x, t) \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) dx \right) dy. \quad (14)$$

Целесообразно записать соотношение (14) в следующей форме (с такими переобозначениями:  $x = \alpha$ ;  $y = \beta$ ):

$$F_{kn}(t) = \frac{4}{l^2} \left[ \int_0^l \left( \sin\left(\frac{k\pi\alpha}{l}\right) \int_0^{l-\alpha} f_Q(\alpha, \beta, t) \sin\frac{n\pi\beta}{l} d\beta \right) d\alpha - \int_0^l \left( \sin\left(\frac{n\pi\beta}{l}\right) \int_{l-\beta}^l f_Q(l-\beta, l-\alpha, t) \sin\left(\frac{k\pi\alpha}{l}\right) d\alpha \right) d\beta. \quad (15)$$

Удобно использовать для построения дальнейшего решения уравнения (9) *преобразование Лапласа*. Укажем, что в приведенных ниже соотношениях выражения записанные в пространстве изображений обозначены дополнительным верхним индексом  $L$  и параметром Лапласа  $s$ , например,  $u_{kn}^L(s)$ . Если принять, что начальные условия нулевые, то решение уравнения (9), можно записать в пространстве изображений в виде:

$$u^L(x, y, s) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{kn}^L(s) \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{l}\right), \quad (16)$$

где функция  $u_{kn}^L(s)$  будет иметь форму

$$u_{kn}^L(s) = \frac{4}{\rho l^2} \frac{\Phi_{kn}^L(s)}{s^2 + \frac{a^2}{l^2}(k^2 + n^2)},$$

причем

$$\Phi_{kn}^L(s) = \int_0^l \left( \sin\left(\frac{k\pi\alpha}{l}\right) \int_0^{l-\alpha} f_Q^L(\alpha, \beta, s) \sin\left(\frac{n\pi\beta}{l}\right) d\beta \right) d\alpha - \int_0^l \left( \sin\left(\frac{n\pi\beta}{l}\right) \int_{l-\beta}^l f_Q^L(l-\beta, l-\alpha, s) \sin\left(\frac{k\pi\alpha}{l}\right) d\alpha \right) d\beta.$$

На основании соотношения (16) нетрудно получить формулу для коэффициентов разложения в двойной ряд Фурье функции, являющейся разложением  $F(x, y, t)$  в (9). Тогда решение уравнения (9) можно записать:

$$u_{kn}(t) = \frac{4}{a\rho l} \frac{1}{\sqrt{k^2 + n^2}} \int_0^t \Phi_{kn}(\tau) \sin\left(\frac{a}{l} \sqrt{k^2 + n^2} (t - \tau)\right) d\tau, \quad (17)$$

причем

$$\Phi_{kn}(\tau) = \int_0^l \left( \sin\left(\frac{k\pi\alpha}{l}\right) \int_0^{l-\alpha} f_Q(\alpha, \beta, \tau) \sin\left(\frac{n\pi\beta}{l}\right) d\beta \right) d\alpha - \int_0^l \left( \sin\left(\frac{n\pi\beta}{l}\right) \int_{l-\beta}^l f_Q(l-\beta, l-\alpha, \tau) \sin\left(\frac{k\pi\alpha}{l}\right) d\alpha \right) d\beta. \quad (18)$$

Первый повторный интеграл в (18) отвечает двойному интегралу по подобласти  $\omega_1$ , а второй – по подобласти  $\omega_2$ .

При рассмотрении задачи идентификации произвольной нагрузки  $F(x, y, t)$ , воздействующей на треугольную мембрану, можно воспользоваться подходом, изложенном в работе [6], в которой строятся решения задач об отыскании нагрузки на осесимметричную деформирующуюся цилиндрическую оболочку конечной длины.

**Колесания пластин в форме прямоугольного равнобедренного треугольника.** Аналогично вышеизложенному материалу для мембран можно решать подобные задачи и для пластин в форме прямоугольного равнобедренного треугольника, имеющего шарнирное опирание по контуру. Причем указанный подход можно применять как для тонких пластин (*модели Кирхгоффа*), так и для пластин средней толщины (в рамках *гипотез Тимошенко*). В силу ограничений, накладываемых на работу форматом научной статьи (так как решение задач для прямоугольных пластин подробно описано в монографиях [5, 6] и необходимо лишь воспользоваться предложенным здесь подходом, для введения дополнительных сил), опустим теоретический материал. Приведем результаты численных расчетов для треугольных пластин, подтверждающих идеи, *высказанные Рэлеем и Тимошенко*, а также изложенный выше материал для треугольных мембран.

При расчетах срединная плоскость пластины была связана с плоскостью  $xOy$  декартовой системы координат. Считалось, что возмущающая нагрузка приложена в точке  $(x_Q, y_Q)$ , а дополнительная нагрузка – в точке

$(x_R, y_R)$ . При вычислениях принимались следующие значения:

- модуль упругости  $E = 2.07 \cdot 10^{11}$  Па; коэффициент Пуассона  $\nu = 0.3$ ; плотность  $\rho = 7890$  кг/м<sup>3</sup>;
- толщина пластины  $h = 0.4$  м; длина и ширина  $l = m = 0.4$  м;
- число членов в соответствующих двойных рядах Фурье  $50 \times 50$ .

На рис. 3 приведен график изменения во времени возмущающей нестационарной нагрузки. По вертикальной оси отложена нестационарная сила в ньютонах, по горизонтали – время в секундах.

На рис. 4 приведена схема расположения точек на пластине в плане.

Координаты точек:

- $x_Q = 0.2$  м,  $y_Q = 0.1$  м – приложения возмущающей силы (сосредоточенной нагрузки)  $Q(x, y, t)$ ;
- $x_R = 0.3$  м,  $y_Q = 0.2$  м – приложения дополнительной силы (сосредоточенной нагрузки)  $R(x, y, t)$ ;
- $y_m = 0.2$  м,  $y_m = 0.2$  м – центра пластины.

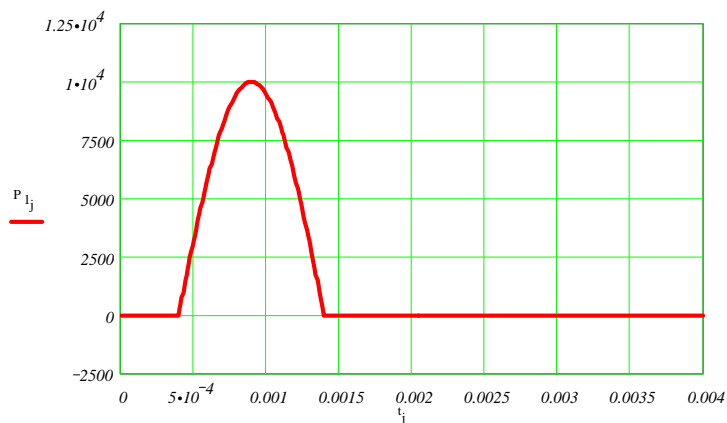


Рис. 3 – Возмущающая нагрузка.

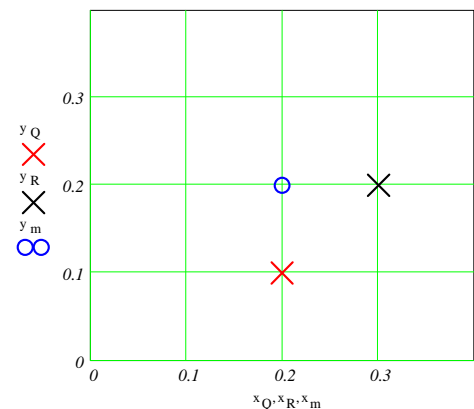


Рис. 4. – Схема нагружения пластины.

На рис. 5 показаны графики изменения прогибов во времени в трёх точках пластины согласно схеме нагружения (рис. 4).

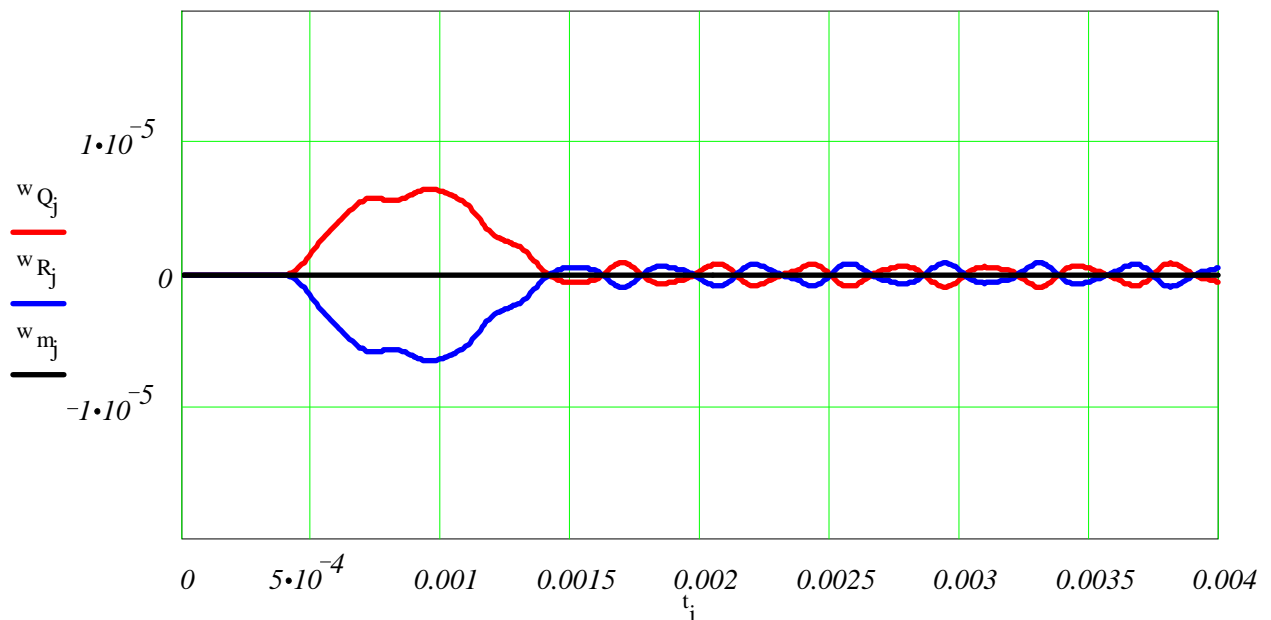


Рис. 5 – Изменение прогибов пластины во времени.

Из рис. 5 видно, что прогиб под действующей на треугольную пластину возмущающей нагрузкой полностью совпадает с прогибом в точке приложения дополнительной нагрузки, но имеет противоположный знак, а прогиб в центре пластины (эта точка лежит на границе треугольной пластины, которая совпадает с диагональю квадратной пластины) равен нулю.

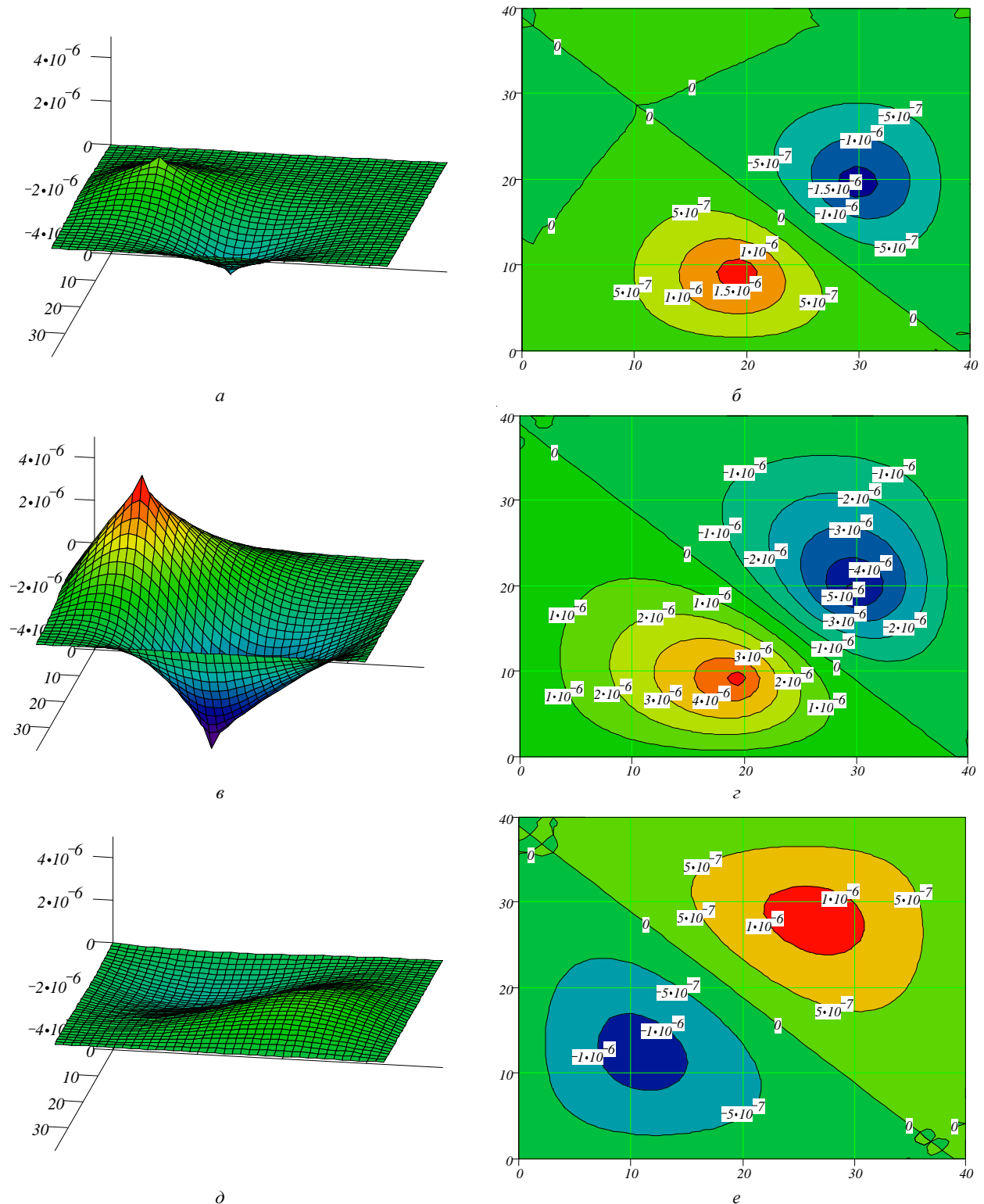


Рис. 6 – Эпюры распределения прогибов пластины во времени: а, б –  $t = 0.512$  мс; в, в –  $t = 0.8$  мс; д, е –  $t = 2.24$  мс.

На рис. 6 показано распределение прогибов по поверхности квадратной пластины для трёх моментов времени: а и б –  $t = 0.000512$  с; в и в –  $t = 0.0008$  с; д и е –  $t = 0.00224$  с. Укажем, что для удобства просмотра и анализа: слева (рис. 6, а, в, д) показаны трёхмерные эпюры распределения прогиба по пластине, а справа (рис. 6, б, в, е) изображены контурные графики с линиями уровня.

На группе рисунков 6 можно видеть, что колебания квадратной пластины антисимметричны относительно диагонали. Следует отметить, что на контурных графиках чётко видно нулевую линию уровня, которая почти совпадает с диагональю квадратной пластины, делящей её на две треугольные. То, что нулевая линия уровня не



совпадает с диагональю и не является абсолютно прямой (на некоторых ее участках наблюдается небольшая кривизна), обусловлено особенностями отображения контурных графиков (*Contour Plot*) в приложении MathCAD, потому что закрашивание областей выполняется с некоторым допуском по изменению величин, а сами контурные линии (*Contour Lines*) проводятся между областями разных цветов. В том, что для приведенного расчета прогиб, например, в самом центре квадратной пластины равен нулю в любой момент времени, можно убедиться, посмотрев на рис. 5. Также укажем, что в результате численного эксперимента подтверждено отсутствие прогибов пластины в различных точках, принадлежащих диагонали. Графики для этих точек не приведены ввиду малой информативности.

**Выводы.** На основе подхода, предложенного лордом Рэлеем и примененного С. П. Тимошенко при решении задачи о статическом деформировании треугольной пластины, в настоящей работе решены задачи нестационарного деформирования треугольной мембраны и пластины средней толщины.

Однако, использование описанного подхода применимо только для треугольных мембран и шарнирно закрепленных треугольных пластин, имеющих форму равнобедренного прямоугольного треугольника (половина квадрата с диагональной стороной).

К сожалению, указанный подход не применим для прямоугольного треугольника с неравными катетами (половиной прямоугольной пластины). Возможно, существуют подобные, но более сложные подходы для исследования пластин, являющихся половиной прямоугольной (не квадратной) пластины для статических задач. Однако, в динамических задачах такие подходы, по-видимому, не работают, что обусловлено сложной волновой картиной нагружения и невозможностью компенсации перемещений точек пластины, вызванных отраженными волнами.

#### Список литературы

1. Стретт Дж. В. (Лорд Рэлей). Теория звука. – М.: ГИТТЛ, 1955. – Т. 1. – 503 с.
2. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. – М.: Наука, 1966. – 636 с.
3. Араманович И. Г., Левин В. И. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1969. – 288 с.
4. Янютин Е. Г., Егоров П. А. Нестационарные колебания мембраны, несущей несколько сосредоточенных масс // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – 2012. – № 54 (960). – С. 209 – 216.
5. Янютин Е. Г., Янчевский И. В., Воронай А. В., Шарпата А. С. Задачи импульсного деформирования элементов конструкций. Монография. – Харьков: ХНАДУ, 2004. – 392 с.
6. Янютин Е. Г., Воронай А. В., Поваляев С. И., Янчевский И. В. Идентификация нагрузок при импульсном деформировании тел. Монография в 2-х частях. Часть II. – Харьков: Изд-во ХНАДУ, 2010. – 212 с.

#### References (transliterated)

1. Strett Dzh. V. (Lord Reley). *Teoriya zvuka* [The Theory of Sound]. Moscow, GITTL Publ., 1955. Vol. 1. 503 p.
2. Timoshenko S. P., Voynovskiy-Kriger S. *Plastiny i obolochki* [Plates and shells]. Moscow, Nauka Publ., 1966. 636 p.
3. Aramanovich I. G., Levin V. I. *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow, Nauka Publ., 1969. 288 p.
4. Yanyutin YE. G., Yegorov P. A. Nestsatsionarnye kolebaniya membrany, nesushhey neskol'ko sosredotochennykh mass [Nonstationary vibrations of membrane loaded by several concentrated masses]. *Visnyk Natsional'noho tekhnichnoho universytetu "KhPI". Seriya: Matematichne modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of the National Technical University «KhPI». Series: Mathematical modeling in engineering and technology]. 2012, no. 54 (960), pp. 209–216.
5. Yanyutin YE. G., Yanchevskiy I. V., Voropay A. V., Sharapata A. S. *Zadachi impul'snogo deformirovaniya elementov konstruksiy. Monografiya* [Problems of pulse deforming of structural elements. Monograph]. Kharkov, KhNADU Publ., 2004. 392 p.
6. Yanyutin YE. G., Voropay A. V., Povalyaev S. I., Yanchevskiy I. V. *Identifikatsiya nagruzok pri impul'snom deformirovanii tel. Monografiya v 2-kh chastyakh. Chast' II* [Load identification in pulse deforming of solids. Monograph in two parts. Part II]. Kharkov, Izd-vo KhNADU Publ., 2010. 212 p.

Received (надійшла) 26.01.2020

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

**Янютін Євген Григорович (Янютин Евгений Григорьевич, Yanyutin Yevgen Grigorovich)** – доктор технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (097) 715-58-44; e-mail: e.yanyutin@gmail.com.

**Воронай Олексій Валерійович (Воронай Алексей Валериевич, Voropay Alexey Valerievich)** – доктор технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (050) 524-92-52; e-mail: voropay.alexey@gmail.com.

**Єгоров Павло Анатолійович (Егоров Павел Анатольевич, Yegorov Pavlo Anatoliyovich)** – кандидат технічних наук, доцент, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, м. Харків; тел.: (066) 225-33-51; e-mail: egorovpa@online.com.