

Ю. М. АНДРЕЄВ, О. О. ГОЛОВНЯ, Г. В. ШАБАНОВ

АВТОМАТИЧНИЙ ВИБІР КОНФІГУРАЦІЇ ПРОСТОРОВОГО МАНІПУЛЯТОРА З ШІСТЬМА СТЕПЕНЯМИ СВОБОДИ НА ПІДСТАВІ ЕНЕРГЕТИЧНИХ ВИТРАТ НА ЗАДАНОМУ РУСІ

Розглянута проблема автоматичного вибору конфігурації робота-маніпулятора з усіх можливих на базі оцінки енергетичних витрат в робочому процесі при здійсненні відповідного руху захвату. На прикладі зварювального маніпулятора з шістьма степенями свободи викладено формули для аналітичного комп'ютерного розв'язання оберненої задачі кінематики широкого кола маніпуляторів типу ПУМА. Особливістю такого алгоритму є те, що кожна конфігурація ланок маніпулятора задається індивідуальним значенням одного параметра. Це дозволило за одним описом моделі в спеціальній системі комп'ютерної алгебри КіДиМ (ССКА КіДиМ) автоматично згенерувати в пам'яті комп'ютера декілька конфігурацій. Модифікацією існуючого алгоритму розв'язання оберненої задачі динаміки, що передбачає визначення руху узагальнених координат попереднім вирішенням оберненої задачі кінематики, вдалося об'єднати ці дві задачі в одну. Перша задача дає можливість за заданим рухом захвату отримати закони зміни кутів повороту ланок, причому одразу для всіх конфігурацій. Друга – розрахувати рушійні моменти в кінематичних парах одразу для всіх можливих конфігурацій механізму і обрати оптимальну за мінімумом енергетичних витрат конфігурацію. Після чого за отриманими законами зміни кутів можна реалізувати відповідний рух маніпулятора. Наведені приклади розрахунків механізмів широкого кола типу ПУМА використанням кватерніонів для задання і отримання орієнтацій ланок механізму. Таким чином, отриманий алгоритм не вироджується ні для яких положень робота.

Ключові слова: просторові маніпулятори, пряма і обернена задача кінематики роботів, обернена задача динаміки роботів, аналітичне розв'язання механічних задач роботів, спеціальна система комп'ютерної алгебри.

YU. M. ANDRIEIEV, O. O. HOLOVNIYA, H. V. SHABANOV

AUTOMATIC SELECTION OF A SPATIAL MANIPULATOR CONFIGURATION WITH SIX DEGREES OF FREEDOM BASED ON ENERGY CONSUMPTION FOR A GIVEN MOTION

The problem of automatically selecting the configuration of a robot manipulator from all possible configurations based on the evaluation of energy consumption during the operation process when performing a specific gripping movement is considered. Using the example of a welding manipulator with six degrees of freedom, formulas for the analytical computer solution of the inverse kinematics problem for a wide range of PUMA-type manipulators are presented. A distinctive feature of this algorithm is that each configuration of the manipulator links is defined by an individual value of one parameter. This allowed for the automatic generation of several configurations in the computer's memory using one model description in a specialized computer algebra system, KiDyM (SSCA KiDyM). By modifying the existing algorithm for solving the inverse dynamics problem, which involves determining the movement of generalized coordinates by previously solving the inverse kinematics problem, it was possible to merge these two tasks into one. The first task allows for obtaining the laws of changing the rotation angles of the links for all configurations based on a given gripping motion. The second calculates the driving moments in the kinematic pairs immediately for all possible configurations of the mechanism and selects the optimal one with the minimum energy expenditure. Afterward, the corresponding movement of the manipulator can be implemented according to the obtained laws of angle changes. Examples of calculations for manipulator mechanisms are provided. A significant achievement of the work is the development of an analytical algorithm for solving the inverse kinematics problem for a wide range of PUMA-type manipulators using quaternions to define and obtain the orientations of the mechanism links. Thus, the obtained algorithm does not degenerate for any robot positions.

Key words: spatial manipulators, direct and inverse kinematics problems of robots, inverse dynamics problem of robots, analytical solution of mechanical problems of robots, specialized computer algebra system.

Вступ. Сучасні *роботи-маніпулятори* представляють багатоланкові механізми з відкритим кінематичним ланцюгом. Для таких систем характерною є можливість зайняття заданого положення вихідною ланкою при декількох принципово різних положеннях проміжних ланок. Тому при розв'язанні *задач оберненої кінематики* встає дилема, якій з таких конфігурацій віддати перевагу. Крім необхідності обрання необхідної конфігурації для загального розгляду руху механізму, ця проблема може дуже заважати проведенню циклу розрахунків оберненої задачі кінематики *ітераційними наближеними методами*, наприклад, *методом Ньютона* [1]. Бо можливі випадки, коли алгоритм для одних моментів часу «іде» по одній конфігурації, а для інших – по другій. Діагностувати таку ситуацію дуже складно. Найбільш ефективним рішенням тут, як нам представляється, по-перше, використовувати аналітичне розв'язання задачі, по-друге, мати можливість для виконання заданого руху вихідною ланкою обрати спочатку конфігурацію механізму і при розрахунках дотримуватися її. Для обрання потрібної конфігурації механізму потрібен критерій. Таким чином, завданням, яке вирішується в даній статті, є – на основі *аналітичного алгоритму* розв'язання оберненої задачі для роботів-маніпуляторів *класу ПУМА* [2, 3] і *енергетичного критерію* для обрання оптимальної конфігурації, побудувати і дослідити алгоритм розв'язання оберненої задачі динаміки, в якому паралельно розраховується декілька конфігурацій і обирається найкраща за *критерієм мінімуму роботи рушійних моментів*.

Аналіз останніх досліджень. Перше завдання, що тут вирішується, це – створення аналітичного алгоритму розв'язання задачі оберненої кінематики для конкретного маніпулятора – представника сімейства ПУМА [2]. Питання, що стосуються алгоритмів пошуку та використання рішень обернених завдань кінематики, широко висвітлюються в публікаціях, починаючи з відомої статті *Денавіта і Хартенберга* [4]. Ця стаття задала стандарт у формальному описі механізмів з кінематичними парами п'ятого класу. Практично кожна стаття зазначеного напрямку використовує такий опис (з останніх публікацій, наприклад [5]). Однак, нам здається, що *D – Х нотація* не

завжди є оптимальною у зв'язку з обмеженням, що використовується в ній – обов'язковим позначенням осей кінематичних пар як осей аплікат відповідних систем координат ланок. Це призводить до обліку зайвих поворотів систем координат (далі, СК) на 90° і 180° . У наших алгоритмах та розрахунках використовується просто опис послідовності зсувів та поворотів СК однієї ланки щодо іншої із зазначенням осей перенесення та повороту [6 – 9].

У переважній більшості просторові роботи-маніпулятори зі шістьма степенями свободи (прикладом є класичний робот ПУМА [2, 10]) задовольняють критерію Піпера [3, 11], що полягає в тому, що механізм повинен мати три послідовно розташованих ланки з осями кінематичних пар, які перетинаються в одній точці. Будемо називати таку точку вузловою. Тому в цій статті розглядаються моделі таких пристроїв. Для роботів, що не задовольняють цій умові, але схема яких близька до розглянутої тут, можливо використовувати наближені ітераційні методи і використовувати в якості початкового наближення рішення, що можна отримати пропонуваним методом. Проблема уточнення параметрів моделі може бути розв'язана за допомогою сучасних алгоритмів оптимізації, наприклад метода Левенберга – Марквардта [12].

Питанням розрахунків обернених задач кінематики та обернених задач динаміки приділяється значна увага в літературі [13, 14]. Бо ці задачі є дуже складними для сучасних роботів. Найбільш близько до питань, що розглянуті в даній статті, підходить стаття [14]. Але там не ставиться питання автоматичного обрання оптимальної конфігурації. Автори зупиняються на розрахунку законів зміни кутів розв'язанням оберненої задачі кінематики та на розрахунку моментів в кінематичних парах розв'язанням оберненої задачі динаміки. При цьому вони об'єднують обидві задачі в одну, що також пропонується в даній статті. Але розрахунок робіт рушійних моментів залишається поза увагою авторів статті [14].

Постановка задачі. Ставиться завдання на основі розробленого аналітичного алгоритму розв'язання оберненої задачі кінематики і критерію мінімуму загальної роботи рушійних моментів в кінематичних парах роботів-маніпуляторів типу ПУМА реалізувати алгоритм розв'язання оберненої задачі динаміки і отримання законів руху ланок і діючих в їх з'єднаннях моментів для оптимальної конфігурації.

Пропонується для розв'язання оберненої задачі кінематики шестиступеневого кутового маніпулятора спочатку вирішити орієнтаційну задачу для робочої ланки – захвату. Ця задача в якості початкових даних повинна використовувати закони руху трьох його характерних точок, що будуються з умов руху при виконанні робочого процесу. На підставі таких законів потрібно отримати положення вузлової точки і кватерніон орієнтації захвату. Положення вузлової точки повинно дати можливість отримати кути повороту трьох перших ланок механізму. Вони, в свою чергу, дають кватерніон орієнтації 3-ї ланки, який сумісно з кватерніоном орієнтації захвату повинен дати розв'язання відповідного кватерніонного рівняння кватерніон відносно орієнтації захвату щодо 3-ї ланки. Цей кватерніон виражається через кути трьох останніх ланок, що дозволяє їх розрахувати.

Такий алгоритм дозволяє розраховувати значення узагальнених координат роботів вказаного класу безпосередньо для механізмів, що задовольняють критерію Піпера. Для механізмів, що не задовольняють йому, отримане рішення аналітичним алгоритмом може використовуватись як початкове наближення в методі Ньютона [1]. Точне рішення вийде ітераційним уточненням такого рішення, взятого як початкове наближення для методу Ньютона.

Слід сказати, що проблема вибору оптимальної з енергетичних міркувань конфігурації, що тут розглядається, не обов'язково потребує використання точних розв'язок оберненої задачі кінематики. Тому тут буде розглянуто тільки аналітичне рішення.

Результат розв'язання оберненої задачі кінематики використовується для розрахунку рушійних моментів в задачі оберненої динаміки для всіх можливих конфігурацій, а за ними – механічних робіт кожного моменту і загальній роботі всіх рушійних моментів теж для всіх конфігурацій. Порівняння значень загальних робіт і дає змогу обрати оптимальну конфігурацію за мінімумом енергетичних витрат.

Всі вказані тут пункти розв'язання задачі треба об'єднати в одну задачу для наступної реалізації алгоритму на бортовому комп'ютері.

Алгоритм розв'язання оберненої задачі кінематики. Розглянемо приклад типового маніпулятора-зварювальника (рис. 1), виконаного за поширеною схемою, запропонованою свого часу розробниками маніпулятора ПУМА 560 [2]. Наведений нижче підхід до вирішення поставленого завдання легко переноситься на подібні механізми такого типу. Маніпулятор має шість кутових ступенів свободи, які забезпечуються 6-ма кінематичними обертальними парами 5-го класу (рис. 1) – поворот «колоні» (**C**) здійснюється навколо вертикальної осі на кут φ_1 , поворот «плеча» (**S**) і «ліктя» (**L**) – навколо горизонтальних осей на кути φ_2 та φ_3 , поворот «передпліччя» (**F**) – навколо своєї поздовжньої осі на кут φ_4 , поворот «зап'ястя» (**W**) – навколо осі, яка поперечна «передпліччю» на кут φ_5 , нарешті, поворот «захвату» (**B**) – навколо своєї поздовжньої осі на кут φ_6 , робочий інструмент (**T**) закріплений в захваті.

Позначимо точку перетину осі повороту захвату на кут φ_6 та осі повороту зап'ястя на кут φ_5 буквою **K** (на рис. 1 вона показана білим кольором). Прийемо, що ця точка лежить на осі симетрії початкової ланки робочого

інструменту BE , і що через цю точку проходить і вісь повороту на кут φ_4 передпліччя F . У такому разі існує повністю аналітичне рішення оберненої задачі кінематики маніпулятора, яке буде викладено нижче.

Визначимо для подальшого дві точки: E – точка зламу та D – точка кінця робочого інструменту (рис. 1).

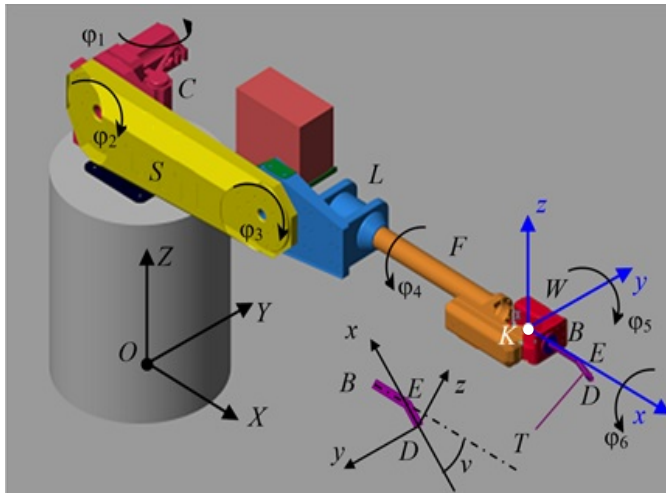


Рис. 1 – Схема розрахункового робота-зварювальника виконанні робочого процесу.

Визначення орієнтації вхідної і вихідної систем координат. СК $Dxyz$ розглядається тут тому, що її положення можна визначити за положенням характерних точок робочого інструмента – K, E, D . Три точки твердого тіла, які не належать одній прямій, задають його положення, бо з площиною їх трикутника можна зв'язати систему координат, яка називається «пов'язаною з тілом СК», або, просто, «пов'язаною». Візьмемо точку D за центр одиничної сфери і розглянемо 2 положення в 2 моменти часу двох деяких точок A і B тіла. Позначимо їх положення на сфері радіус-векторами \vec{r}_{A_0} і \vec{r}_{B_0} – для моменту часу t_0 та \vec{r}_{A_1} і \vec{r}_{B_1} – для моменту часу t_1 . Поставимо у відповідність цим моментам часу і положенням точок A і B кінцевий поворот тіла щодо точки D , що переводить точки і їх радіус-вектори з початкового ($t=t_0$) в кінцеве ($t=t_1$) положення. Знайдемо кватерніон, що буде відповідати такому кінцевому повороту тіла (рис. 2). Тобто, треба знайти вісь та кут кінцевого повороту.

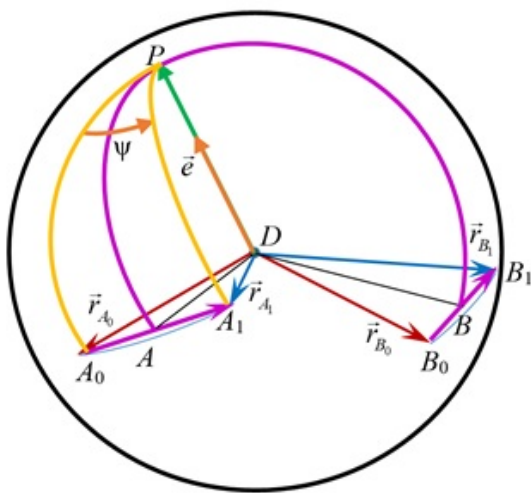


Рис. 2 – До отримання кватерніону орієнтації.

Позначимо координати радіус-векторів

$$\vec{r}_{A_0} = \{x_{A_0}, y_{A_0}, z_{A_0}\}, \quad \vec{r}_{A_1} = \{x_{A_1}, y_{A_1}, z_{A_1}\},$$

$$\vec{r}_{B_0} = \{x_{B_0}, y_{B_0}, z_{B_0}\}, \quad \vec{r}_{B_1} = \{x_{B_1}, y_{B_1}, z_{B_1}\}.$$

Введемо до розгляду вектори

$$\Delta\vec{r}_A = \vec{r}_{A_1} - \vec{r}_{A_0}, \quad \Delta\vec{r}_B = \vec{r}_{B_1} - \vec{r}_{B_0}.$$

Зафіксуємо середини цих векторів і позначимо їх теж буквами A і B . Вектори $\vec{r}_{A_0}, \vec{r}_{A_1}, \Delta\vec{r}_A$ і $\vec{r}_{B_0}, \vec{r}_{B_1}, \Delta\vec{r}_B$ створюють рівнобічні трикутники, в яких відрізки DA та DB є за побудовою медіанами, а, отже, і висотами. Проведемо через точки A і B площини, перпендикулярні площинам трикутників. Будь-яка точка таких площин рівновіддалена від кінців радіус-векторів. Тому лінія перетину цих площин і буде віссю кінцевого повороту. Тоді знайдемо вектор \overline{DP} і орт осі кінцевого повороту:

$$\overline{DP} = \Delta\vec{r}_A \times \Delta\vec{r}_B = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_{A_1} - x_{A_0} & y_{A_1} - y_{A_0} & z_{A_1} - z_{A_0} \\ x_{B_1} - x_{B_0} & y_{B_1} - y_{B_0} & z_{B_1} - z_{B_0} \end{vmatrix}.$$

Кут кінцевого повороту будемо визначати як кут між площинами A_0DP та A_1DP (або між B_0DP та

B_1DP), який знайдемо через скалярне множення нормалей до них. У зв'язку з тим, що в результаті можна отримати кут тільки в діапазоні $[0, \pi]$, то узгоджуємо напрямок вектору \overline{DP} – направимо його в той бік, з якого переміщення точок A і B спостерігалось проти ходи годинникової стрілки. Це значить, що моменти векторів $\overline{A_0A_1}$ і $\overline{B_0B_1}$ відносно осі \overline{DP} повинні бути позитивними. Якщо це буде від'ємною величиною, треба буде змінити напрямок вектору \overline{DP} на протилежний. Знак вказаних моментів можна визначити через один зі змішаних векторних добутоків:

$$\begin{aligned} (\overline{OA_0} \times \overline{A_0A_1}) \cdot \overline{DP} &= (\overline{A_0A_1} \times \overline{DP}) \cdot \overline{OA_0} = (\overline{DP} \times \overline{OA_0}) \cdot \overline{A_0A_1} = \vec{N}_{A_0DP} \cdot \overline{A_0A_1}, \\ (\overline{OB_0} \times \overline{B_0B_1}) \cdot \overline{DP} &= (\overline{B_0B_1} \times \overline{DP}) \cdot \overline{OB_0} = (\overline{DP} \times \overline{OB_0}) \cdot \overline{B_0B_1} = \vec{N}_{B_0DP} \cdot \overline{B_0B_1}. \end{aligned}$$

Таким чином орт осі такого кінцевого повороту отримає вираз («+» берем, коли попередні вирази позитивні):

$$\vec{e} = \pm \frac{\overline{DP}}{|\overline{DP}|}. \quad (1)$$

Для визначення кута кінцевого повороту – кута (рис. 2) між площинами A_0DP та A_1DP (або – між площинами B_0DP та B_1DP) треба знайти для них нормалі. Це буде або

$$\vec{N}_0 = \vec{N}_{A_0DP} = \overline{DP} \times \overline{OA_0}, \quad \vec{N}_1 = \vec{N}_{A_1DP} = \overline{DP} \times \overline{OA_1}, \quad \text{або} \quad \vec{N}_0 = \vec{N}_{B_0DP} = \overline{DP} \times \overline{OB_0}, \quad \vec{N}_1 = \vec{N}_{B_1DP} = \overline{DP} \times \overline{OB_1}$$

в залежності, які з них не дорівнюють нулю. Кут кінцевого повороту визначиться формулою:

$$\psi = \arccos \left(\frac{\vec{N}_0 \cdot \vec{N}_1}{|\vec{N}_0| \cdot |\vec{N}_1|} \right), \quad (2)$$

а шуканий кватерніон – формулою:

$$\Lambda = \cos \frac{\psi}{2} + \vec{e} \sin \frac{\psi}{2}. \quad (3)$$

Відзначимо, що формула (1) та нормалі з формули (2) вироджуються, коли 1) $\Delta \vec{r}_A = 0$, 2) $\Delta \vec{r}_B = 0$, 3) $\Delta \vec{r}_A \times \Delta \vec{r}_B = 0$. Це може бути, коли, відповідно, 1) $A \equiv P$, 2) $B \equiv P$, 3) P знаходиться між точками A і B на колі, що проходить через них.

Таким чином, шляхом задання положень точок D , E , K в робочому процесі, за формулами (1), (2), (3) можна отримати кватерніон (3) орієнтації вхідної СК $Dxyz$. Позначимо його $\Lambda_{(Dxyz)}^{(abs)}$.

Для подальшого нам потрібно задати орієнтацію вихідної СК $Kxyz$. Для перетворення СК $Dxyz$ до $Kxyz$ згідно рис. 1 її треба повернути на кут ν навколо осі Dy і потім – на кут π (180°) навколо нового положення осі Dz . Отримаємо кватерніон цих додаткових поворотів:

$$\Lambda_{\nu\pi} = \left(\cos \frac{\nu}{2} + \vec{j} \sin \frac{\nu}{2} \right) \circ \left(\cos \frac{\pi}{2} + \vec{k} \sin \frac{\pi}{2} \right) = \left(0 + \vec{i} \sin \frac{\nu}{2} + \vec{j} \cdot 0 + \vec{k} \cos \frac{\nu}{2} \right).$$

Тоді кватерніон вихідної СК $Kxyz$ отримає вигляд:

$$\Lambda_{(Kxyz)}^{(abs)} = \Lambda_{(Dxyz)}^{(abs)} \circ \Lambda_{\nu\pi}. \quad (4)$$

Розв'язання транспортної задачі маніпулятора.

Отримана формула (3) дає змогу визначити потрібне з умов здійснення робочого процесу положення точки K в абсолютній системі координат

$$\begin{bmatrix} X_K \\ Y_K \\ Z_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_D \\ Y_D \\ Z_D \end{bmatrix} + \text{Vect} \left(\Lambda_{(Dxyz)}^{(abs)} \circ \begin{bmatrix} 0 \\ x_K \\ y_K \\ z_K \end{bmatrix} \circ \tilde{\Lambda}_{(Dxyz)}^{(abs)} \right), \quad (5)$$

де функція Vect повертає векторну частину кватерніону.

А це дає змогу розв'язати задачу визначення кутів повороту одна відносно іншої перших трьох ланок механізму. Тобто розв'язати транспортну задачу – задачу доставки точки K – перетину осей трьох останніх ланок у розраховане за формулами (3), (5) положення.

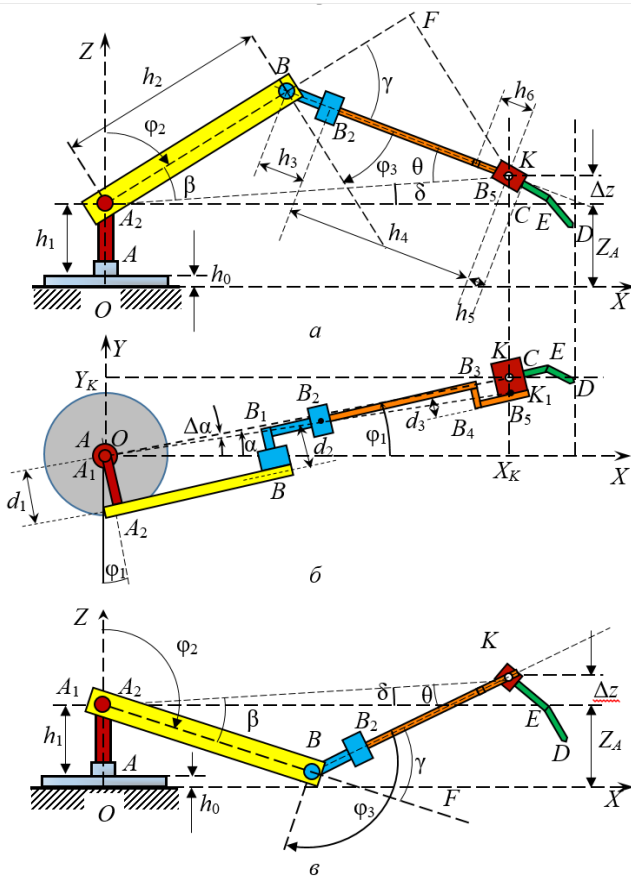


Рис. 3 – До отримання формул для кутів у шарнірах:
 а – проекція верхньої основної конфігурації маніпулятора на вертикальну площину; б – проекція схеми маніпулятора на горизонтальну площину; в – проекція нижньої основної конфігурації маніпулятора на вертикальну площину.

У зв'язку з тим, що основною задачею тут є задача оцінки енергетичних витрат при здійсненні руху маніпулятора, можна знехтувати похибкою перетину трьох осей в одній точці K і прийняти, що осі трьох останніх кінематичних пар перетинаються в одній точці K .

На рис. 3. показано проекції схем маніпулятора: на вертикальну площину «верхньої» основної конфігурації маніпулятора, рис. 3, а, (лікоть – точка B – розташовується при русі вверху) та «нижньої» основної конфігурації маніпулятора, рис. 3, в, (лікоть – внизу), а на рис. 3, б показано проекцію схеми маніпулятора на горизонтальну площину.

Вважаємо відомими розміри ланок маніпулятора $h_0, h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, d_1, d_2, d_3$ (рис. 3) і координати в абсолютній системі відліку X_K, Y_K, Z_K точки K .

Кут φ_1 легко знаходиться з нижньої проекції (рис. 3, б). Для отримання кутів φ_2 та φ_3 треба розв'язати трикутники $\Delta A_1 B_1 K$ на проекціях рис. 3, а та рис. 3, в.

Спочатку знайдемо очевидні розміри

$$\Delta z = Z_K - h_0 - h_1 \text{ та } A_1 K = \sqrt{X_K^2 + Y_K^2 + \Delta z^2}.$$

Тоді відразу знайдемо кути α – кут між вертикальною площиною $A_1 A_2 B_1 B_2 B_3 K E$ і віссю $O X$ (використано функцію atan2 для отримання кута в межах $[-\pi; +\pi]$), δ – кут між прямою $A_1 K$ та горизонтальною площиною, θ і β – кути в трикутниках $\Delta A_1 B_1 K$ за теоремою косинусів (рис. 3), та по них – кут γ :

$$\alpha = \text{atan2}(Y_K, X_K), \delta = \arcsin \frac{\Delta z}{A_1 K}, \theta = \arccos \frac{A_1 K^2 + B_1 K^2 - A_1 B_1^2}{2 B_1 K \cdot A_1 K}, \beta = \arccos \frac{A_1 B_1^2 + A_1 K^2 - B_1 K^2}{2 A_1 B_1 \cdot A_1 K}, \gamma = \beta + \theta. \quad (6)$$

З формул (6) знайдемо кути повороту перших трьох ланок маніпулятора:

$$\varphi_1 = \alpha, \varphi_2 = \frac{\pi}{2} \mp (\beta \pm \delta), \varphi_3 = \pm \gamma - \frac{\pi}{2}, \quad (7)$$

де верхні знаки у формулах відповідають верхній конфігурації, а нижні – нижній.

Таким чином, транспортна задача розв'язана.

Розв'язання орієнтаційної задачі маніпулятора. Отримані кути визначають, крім віддаленості точки K від стійки маніпулятора, орієнтацію у просторі «ліктя» L (рис. 1, $B B_2$ на рис. 3). Запишемо вираз для кватерніону повороту «ліктя» відносно абсолютної СК відповідно до послідовності поворотів на кути (7) множенням кватерніонів елементарних поворотів:

$$\Lambda_{(B_2,xyz)}^{(abs)} = \Lambda_z(\varphi_1) \circ \Lambda_y(\varphi_2) \circ \Lambda_x(\varphi_3) = \Lambda_z(\varphi_1) \circ \Lambda_y(\varphi_2 + \varphi_3), \quad (8)$$

де позначення $\Lambda_\xi(\varphi)$, $\xi = x, y, z$ – тут і далі означають кватерніон елементарного повороту навколо осі ξ на кут, вказаний у дужках. Так кватерніони, що входять до виразу (8), задаються формулами:

$$\Lambda_z(\varphi_1) = \cos\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) + i_3 \sin\left(\frac{\varphi_1}{2}\right); \quad \Lambda_y(\varphi_2 + \varphi_3) = \cos\left(\frac{\varphi_2 + \varphi_3}{2}\right) + i_2 \sin\left(\frac{\varphi_2 + \varphi_3}{2}\right);$$

$$\Lambda_{(B_2,xyz)}^{(abs)} = \cos\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi_2 + \varphi_3}{2}\right) - i_1 \sin\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi_2 + \varphi_3}{2}\right) + i_2 \cos\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi_2 + \varphi_3}{2}\right) + i_3 \sin\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi_2 + \varphi_3}{2}\right). \quad (9)$$

Для отримання орієнтації «захвату» («робочого інструменту») «лікоть» треба повернути на кути φ_4, φ_5 і φ_6 у шарнірах B_2 і двічі – в K (рис. 1, 3). СК $Kxyz$ захвату позначена блакитним кольором на рис. 1. Її орієн-

тація в абсолютній СК може визначитися через задану вище орієнтацію вихідної СК (4), а може через кути поворотів ланок маніпулятора в шарнірах $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6$.

Кватерніон орієнтації $\Lambda_{(Kxyz)}^{(abs)}$ вихідної СК відносно абсолютної представляється в цьому випадку добутком кватерніонів повороту від абсолютної СК $OXYZ$ до СК B_2xyz «ліктя» $\left(\Lambda_{(B_2xyz)}^{(abs)}\right)$ та повороту від СК B_2xyz «ліктя» до СК $Kxyz$ «захвату» $\left(\Lambda_{(Kxyz)}^{(B_2xyz)}\right)$:

$$\Lambda_{(Kxyz)}^{(abs)} = \Lambda_{(B_2xyz)}^{(abs)} \circ \Lambda_{(Kxyz)}^{(B_2xyz)}, \quad (10)$$

де кватерніон повороту від абсолютної СК до СК B_2xyz «ліктя» $\left(\Lambda_{(B_2xyz)}^{(abs)}\right)$ дається формулами (8), (9).

Сформуємо кватерніон повороту СК B_2xyz «ліктя» до СК $Kxyz$ «захвату» за допомогою кватерніонів послідовності поворотів, які здійснюються при такому повороті:

$$\Lambda_{(Kxyz)}^{(B_2xyz)} = \Lambda_x(\varphi_4) \circ \Lambda_y(\varphi_5) \circ \Lambda_x(\varphi_6).$$

Відповідно до цього отримаємо вираз:

$$\begin{aligned} \Lambda_{(Kxyz)}^{(B_2xyz)} = & \cos\left(\frac{\varphi_5}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi_4 + \varphi_6}{2}\right) + i_1 \cos\left(\frac{\varphi_5}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi_4 + \varphi_6}{2}\right) + \\ & + i_2 \sin\left(\frac{\varphi_5}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi_4 - \varphi_6}{2}\right) + i_3 \sin\left(\frac{\varphi_5}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi_4 - \varphi_6}{2}\right). \end{aligned} \quad (11)$$

Таки чином, в рівнянні (10) невідомим буде кватерніон $\Lambda_{(Kxyz)}^{(B_2xyz)}$, бо кватерніони $\Lambda_{(Kxyz)}^{(abs)}$ та $\Lambda_{(B_2xyz)}^{(abs)}$ вже визначені формулами (4) і (9). Запишемо розв'язок рівняння (10):

$$\Lambda_{(Kxyz)}^{(B_2xyz)} = \tilde{\Lambda}_{(B_2xyz)}^{(abs)} \circ \Lambda_{(Kxyz)}^{(abs)}, \quad (12)$$

де $\tilde{\Lambda}_{(B_2xyz)}^{(abs)}$ – спряжений кватерніон (9).

Проста форма шуканого кватерніона (11) дозволяє знайти кути $\varphi_4, \varphi_5, \varphi_6$ останніх ланок маніпулятора.

Позначимо $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – компоненти кватерніона, що отримується праворуч в формулі (12). Тоді знайдемо:

$$\begin{aligned} \lambda_0 = & \cos\left(\frac{\varphi_5}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi_4 + \varphi_6}{2}\right); & \lambda_1 = & \cos\left(\frac{\varphi_5}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi_4 + \varphi_6}{2}\right); \\ \lambda_2 = & \sin\left(\frac{\varphi_5}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi_4 - \varphi_6}{2}\right); & \lambda_3 = & \sin\left(\frac{\varphi_5}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi_4 - \varphi_6}{2}\right). \end{aligned} \quad (13)$$

Звідси, остаточно

$$\begin{aligned} \varphi_4 = & 0.5(\text{atan2}(\lambda_1, \lambda_0) + \text{atan2}(\lambda_3, \lambda_2)); \\ \varphi_5 = & \arccos(\lambda_0^2 + \lambda_2^2 - \lambda_1^2 - \lambda_3^2); \\ \varphi_6 = & 0.5(\text{atan2}(\lambda_1, \lambda_0) - \text{atan2}(\lambda_3, \lambda_2)). \end{aligned} \quad (14)$$

Таким чином, формулами (1) – (5) за заданими законами зміни в часі координат характерних точок механізму – B, E, D , які визначаються з умов виконання роботом рухів захвату з робочим інструментом під час робочого процесу, будуються як функції часу кватерніон вихідної СК $Kxyz$ і координати точки K – вузлової точки маніпулятора. Після цього обернена задача кінематики розпадається на дві, які розв'язуються аналітично – задачу транспортувальну і задачу орієнтаційну. Транспортувальна – задача доставки вузлової точки K до визначеного умовами робочого процесу положення – розв'язується через вирішення відповідних трикутників, що створюють ланки механізму, – знаходяться значення кутів повороту трьох перших ланок за формулами (6), (7) для двох суттєвих з точки зору основної задачі статті конфігурацій маніпулятора. Визначення таких кутів задає не тільки положення, а і орієнтацію третьої ланки (8), (9). Тому орієнтаційна задача, виходячи з відомих кватерніонів – орієнтації вихідної СК і орієнтації 3-ї ланки, буде спеціальне кватерніонне рівняння (10) для визначення кватерніону орієнтації захвату щодо орієнтації третьої ланки. Останній кватерніон (12) виражається через шукані кути останніх трьох ланок (13), звідси і знаходяться ці кути (14).

Алгоритм розв'язання оберненої задачі динаміки. Розроблений в статті алгоритм сформульованої задачі реалізовано і протестовано за допомогою спеціальної системи комп'ютерної алгебри *КиДим* (ССКА *КиДим* [15, 16]). Однією з ключових переваг способу отримання рівнянь механіки (динаміки, статички, кінематики,

кінетостатики, коливань), реалізованого за допомогою вбудованої системи комп'ютерної алгебри в КіДиМ, є представлення *механічної моделі* процесу сукупністю елементів – *силових, інерційних, пружних та дисипативних* [6, 15 – 18]. З них КіДиМ автоматично збирає *математичну модель* процесу. Динамічні рівняння, що отримуються в пам'яті комп'ютера в КіДиМі в аналітичному вигляді для голономних або неголономних дискретних механічних систем n твердих тіл на основі загального варіаційного рівняння механіки, можна представити у вигляді [15, 16]:

$$\sum_{i=1}^n \left\{ \mathbf{W}_{\bar{R}_i}^T m_i \ddot{\bar{r}}_{C_i} + \mathbf{W}_{\bar{M}_i}^T \left(\mathbf{J}_{C_i} \dot{\bar{\omega}}_i^{(i)} + \bar{\omega}_i^{(i)} \times \mathbf{J}_{C_i} \bar{\omega}_i^{(i)} \right) \right\} + \mathbf{W}_D^T [\mathbf{D}] \dot{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{W}_C^T [\mathbf{C}] \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{W}_P^T \mathbf{P}, \quad (15)$$

де $\mathbf{W}_{\bar{R}_i}^T, \mathbf{W}_{\bar{M}_i}^T, \mathbf{W}_D^T, \mathbf{W}_C^T, \mathbf{W}_P^T$ – транспоновані структурні матриці сил інерції, моментів сил інерції i -го тіла ($i = 1, 2, \dots, n$), дисипативних, пружних та інших активних сил системи відповідно; $\bar{r}_{C_i}, \bar{\omega}_i^{(i)}$ – радіус-вектор центру мас та кутова швидкість i -го тіла (радіус-вектор центру мас задається як функція узагальнених координат в абсолютній СК, а кутова швидкість як функція узагальнених координат та узагальнених швидкостей – у зв'язаній головній центральній СК i -го тіла; m_i, \mathbf{J}_{C_i} – маса та діагональний тензор інерції i -го тіла в його зв'язаній головній центральній СК; $[\mathbf{D}]$ – діагональна матриця з елементами – коефіцієнтами дисипації, $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ – матричний вектор, що об'єднує швидкості (лінійні та кутові) тіл, на які діють сили та моменти в'язкого тертя; $[\mathbf{C}]$ – діагональна матриця з елементами – коефіцієнтами жорсткості, $\boldsymbol{\gamma}$ – матричний вектор, що об'єднує деформації (лінійні та кутові) тіл, на які діють сили та моменти сил пружності; \mathbf{P} – матричний вектор, що містить значення (характеристики) активних сил і моментів сил системи – проєкції таких сил і моментів на локальні СК тіл.

Розв'язання оберненої задачі динаміки вказаних систем будується ССКА КіДиМ шляхом розв'язання рівнянь (15) відносно невідомих сил і моментів сил [15, 16], що входять в праву частину лінійно, і назначаються користувачем в вихідних даних. Параметри руху – залежності від часу узагальнених координат і, в нашому випадку, узагальнених швидкостей, також задаються в вихідних даних. Таким чином, шляхом розв'язання системи лінійних рівнянь відносно невідомих сил і моментів, що впливає з системи (15), розраховуються закони зміни в часі цих невідомих.

З наведених описів вирішення обернених задач кінематики і динаміки можна бачити, що рішення цих задач доволі легко можна об'єднати. Саме ця робота і була проведена в рамках розв'язання поставленої проблеми. За заданим рухом вихідної ланки – захвату описаним вище алгоритмом розв'язання оберненої задачі кінематики реалізується визначення кутів повороту ланок $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t), \varphi_4(t), \varphi_5(t), \varphi_6(t)$, які є узагальненими координатами маніпулятора. Це знання дає змогу отримати розв'язання оберненої задачі динаміки (в даному випадку значення моментів $M_1(t), M_2(t), M_3(t), M_4(t), M_5(t), M_6(t)$, що необхідно прикласти в кінематичних парах для здійснення заданого руху).

Залишається тільки розрахувати роботи, що здійснює кожний момент в кінематичній парі, і накопичити загальну роботу їх усіх

$$A = \sum_{i=1}^m A_{M_i} = \sum_{i=1}^m \int_{\varphi_{i0}}^{\varphi_{i1}} M_i d\varphi_i = \sum_{i=1}^m \int_{t_0}^{t_1} M_i(t) \frac{d\varphi_i(t)}{dt} dt = \sum_{i=1}^m \int_{t_0}^{t_1} M_i(t) \omega_i(t) dt, \quad (16)$$

де m – кількість таких пар; M_i – рушійний крутний момент в i -ї парі; φ_i, ω_i – кут і кутова швидкість повороту i -ї ланки відносно $(i-1)$ -ї; $[\varphi_{i0}, \varphi_{i1}], [t_0, t_1]$ – межі зміни такого кута і часу.

З вищезазначеного можна побачити, що весь алгоритм розрахунку робіт рушійних моментів допускає одночасне розрахування конфігурацій маніпулятора. Для цього кожна конфігурація отримує номер, а необхідні параметри механічних моделей конфігурацій, перш за все, кути повороту ланок, рушійні моменти і їх роботи, індексуються відповідно номерам конфігурацій. Кожна конфігурація трактується в такому як деяка підсистема загальної системи, яка об'єднує всі конфігурації [18]. Тоді спеціальна інструкція у вихідних даних

РОЗМНОЖИТИ := i(1,2);

заставляє ССКА КіДиМ за однією записаною в вихідних даних механічною моделлю згенерувати в пам'яті комп'ютера необхідну кількість математичних моделей таких конфігурацій і обчислювати їх паралельно. Таким чином, до кінця діапазону часу розрахунку в пам'яті комп'ютера вже готові значення загальних робіт рушійних моментів для кожної конфігурації, котрі і дають можливість автоматично обрати за критерієм мінімуму загальної роботи оптимальну конфігурацію. Оскільки для кожної конфігурації вже будуть розраховані закони зміни узагальнених координат механізму і значення рушійних моментів, залишається їх тільки реалізувати для обраної конфігурації.

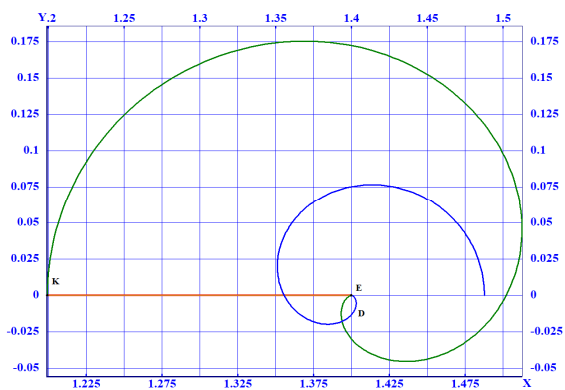
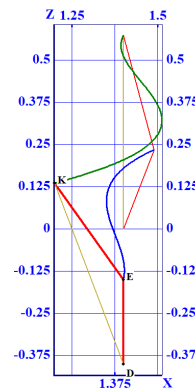
Приклад результатів розрахунку робота-маніпулятора (рис. 1). Для ілюстрації можливостей пропонованого алгоритму у межах підготовки цієї статті було розглянуто таке модельне завдання.

Рух інструменту являє собою прямолінійний вертикальний рух точки D і рух точок E і K траєкторіями, які в проекції на горизонтальну площину представляються спіралями Архімеда з полюсами на осі Dz (рис. 1), причому спіраль точки E згортається, а точки K – розгортається. Початкове положення характеризується вертикальним розташуванням точки K над точкою D , а кінцеве – вертикальним розташуванням точки E над точкою D . Початкова та кінцева швидкість руху інструмента дорівнює нулю. Треба забезпечити плавний відхід із початкового становища та плавний підхід у кінцеве.

Для забезпечення заданого руху інструменту підібрано такі функції координат точок D , E і K :

$$\begin{aligned} \eta_0 &= \frac{\pi}{2} - \nu + \xi; & \eta_1 &= \frac{\pi}{2}; & \eta &= 0,5 \left((\eta_0 + \eta_1) + (\eta_0 - \eta_1) \cos \frac{\pi t}{t_1} \right); \\ r_E &= b \cos \eta; & z_E &= b \sin \eta; & r_K &= c \cos(\nu - \xi + \eta); & z_K &= c \sin(\nu - \xi + \eta); \\ X_D &= 1.4; & Y_D &= 0; & Z_D &= 0.5 Z_{D1} \left[1 - \cos \left(\frac{\pi t}{t_1} \right) \right]; & Z_{D1} &= -0.4; \\ X_E &= X_D + r_E \cos \frac{2\pi t}{t_1}; & Y_E &= Y_D + r_E \sin \frac{2\pi t}{t_1}; & Z_E &= Z_D + z_K; \\ X_K &= X_D + r_K \cos \frac{2\pi t}{t_1}; & Y_K &= Y_D + r_K \sin \frac{2\pi t}{t_1}; & Z_K &= Z_D + z_K; & t &\in [0, t_1]. \end{aligned}$$

Тут ν – кут зламу інструмента, ξ – $\angle DKE$, $a = 0.35$ м та $b = 0.25$ м – розміри інструмента, η – кут прямої DE з вертикаллю, r_E , r_K – поточні відстані точки E та точки K від вертикалі, z_E , z_K – висоти цих точок над точкою D .

Рис. 4 – Рух точок E і K – вид зверху.Рис. 5 – Рух точок E і K – вид збоку.

Такий рух було обрано тому, що він використовувався вже нами для тестування іншого алгоритму розв'язання оберненої задачі кінематики на базі матриць повороту. Там такий рух приводив до виродження кутів, що задавали орієнтацію вхідної СК. Було обрано складну траєкторію руху по спіралі, яка забезпечує змінне навантаження на вузли маніпулятора. Це дозволяє перевірити ефективність алгоритму в умовах, що максимально наближені до реальних динамічних задач. Крім того, на цьому прикладі видна велика різниця в значеннях робіт.

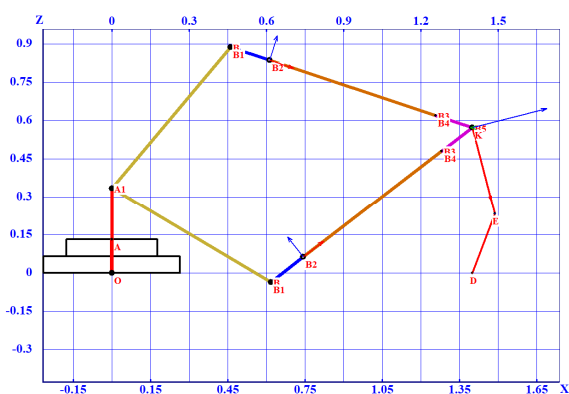


Рис. 6 – Початкове положення робота.

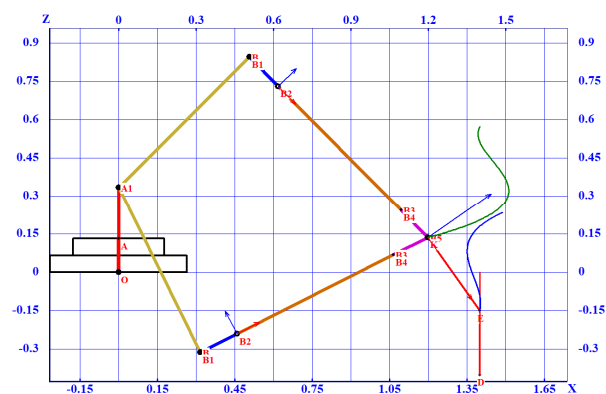


Рис. 7 – Кінцеве положення робота.

Обчислення проводилися для двох конфігурацій маніпулятора: верхньої та нижньої, що найбільш відрізняються одна відносно іншої. Для кожної конфігурації було проведено визначення енергетичних витрат на ви-

конання руху.

Наведемо деякі графіки для демонстрації результатів. На рис. 4 та 5 наведені проєкції траєкторій руху характерних точок робочого інструмента – точок K , E і D , що описують спіралі – точка E – синій колір – згортається, а точка K – зелений колір – розгортається, точка D – рухається вертикально зверху-донизу. На рис. 6 та 7 показано початкове і кінцеве положення механізму. Тут видно, що програма одночасно розраховує і виводить на екран анімацію верхньої та нижньої конфігурації.

Бачимо, що для верхньої конфігурації центри ваги якраз самих важких другого і третього елементів незначно змінюють свою висоту, а для нижньої конфігурації якраз центр ваги другого елемента суттєво знижується, тому в результаті отримується така суттєва різниця в роботах. Крім того, рушійним моментам ще треба долати сили і моменти сил інерції, які побачити на приведених кадрах неможливо.

В табл. 1 наведено числові дані розрахунків робіт окремих моментів і загальної роботи. Тут можна зробити висновок, що нижня конфігурація долає прагнення механізму рухатися донизу з прискоренням, а верхня більш зважена, тому обрати слід для заданого руху робочої ланки верхню конфігурацію – там абсолютне значення загальної роботи рушійних моментів менше.

Таблиця 1 – Робота активних моментів для верхньої та нижньої конфігурацій маніпулятора

Момент на ланці	Робота моменту на конфігурації, Дж		Момент на ланці	Робота моменту на конфігурації, Дж	
	Верхня	Нижня		Верхня	Нижня
M_1	0.688182	0.166543	M_4	10.191	0.184492
M_2	-4.94907	-29.7506	M_5	0.00405835	0.100829
M_3	-4.87331	6.22835	M_6	0.0447697	0.0315224
Загальна робота	1.10566	-23.0389			

Перспективи подальших досліджень. Запропонований в статті підхід представляє собою закінчене в теоретичному плані дослідження. Він реалізований і протестований за допомогою ССКА КіДиМ. Тому подальші роботи в цьому напрямку пов'язані з реалізацією на бортових комп'ютерах маніпуляторів розглянутого класу. Також можливе поширення алгоритму на інші класи робототехнічних систем, наприклад, на андроподібні крокуючі роботи.

Висновки. Принципово новим є запропонований в статті алгоритм аналітичного розв'язання оберненої задачі кінематики широкого кола просторових маніпуляторів з шістьма степенями свободи типу ПУМА з використанням кватерніонів. Аналітичне рішення спирається на поділення загального завдання на три простих, що мають аналітичний розв'язок. Спочатку за заданими координатами трьох точок робочого інструмента визначаються параметри його положення і орієнтації у просторі. Це дозволяє визначити положення вузлової точки і перейти до розв'язання транспортної задачі – визначення кутів перших трьох ланок механізму. Отримані кути задають крім положення вузлової точки орієнтацію в абсолютному просторі 3-ї ланки. Далі порівнюються результати двох послідовностей поворотів цієї ланки, що записуються через кватерніони. Перша послідовність – це повертатись назад до абсолютної СК, і, від неї – до робочої ланки, орієнтація якої в абсолютній СК визначена спочатку. Друга послідовність – це три повороти на три кути останніх ланок до збігання з орієнтацією робочого органу. Таким чином будується кватерніонне рівняння відносно невідомих трьох кутів в останніх кінематичних парах робота. Розв'язання такого рівняння завершує визначення всіх кутів повороту ланок механізму – його узагальнених координат.

Якщо припущення, прийняті вище, не цілком задовольняються в конкретній моделі, запропоноване рішення оберненого завдання кінематики маніпулятора уточнюється методом Ньютона з початковим наближенням, отриманим описаним аналітичним рішенням. В такому випадку аналітичне рішення буде достатньо близьким до точного і гарантовано буде належати обраній конфігурації.

Не зважаючи на те, що алгоритми тут викладено з метою їх реалізації в ССКА КіДиМ, вони мають значення і для реалізації в інших системах.

Список літератури

1. Андреев Ю. М. Алгоритм компенсации возмущений ходьбы двуногого робота решением обратной задачи кинематики // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Динаміка та міцність машин. – Харків : НТУ «ХПІ», 2020. – № 2 (2020). – С. 14 – 21. DOI: 10.20998/2078-9130.2020.1.219622.
2. Фу К., Гонсалес Р., Ли К. Робототехника. – М. : Мир, 1989. – 621 с.
3. Шабанов Г. В., Андреев Ю. М. Аналітичне рішення оберненого і прямого завдання кінематики просторового кутового маніпулятора

- ABB з подальшим 3D – моделюванням // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Динаміка та міцність машин. – Харків : НТУ «ХПІ», 2024. – № 2 (2024). – С. 30 – 38. DOI: 10.20998/2078-9130.2024.2.317116.
4. Denavit J., Hartenberg R. S. A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices // *Journal of Applied Mechanics*. – 1955. – no. 22 (2). – pp. 215 – 221. DOI: 10.1115/1.4011045.
 5. Xiao F., Li G., Jiang D., Xie Y., Yun J., Liu Y., Huang L., Fang Z. An effective and unified method to derive the inverse kinematics formulas of general six-dof manipulator with simple geometry // *Mechanism and Machine Theory*. – 2021. – vol. 159. – p. 104265. DOI: 10.1016/j.mechmachtheory.2021.104265.
 6. Andreev Yu. M., Morachkovsky O. K. Dynamics of holonomic systems of rigid bodies // *Int. Appl. Mech.* – 2005. – Vol. 41. – pp. 817 – 824.
 7. Andrijev Y., Breslavsky D., Pashchenko S., Tatarinova O. Development the Algorithms of Anthropomorphic Robot's Motion Control by Use of AI Algorithms // 2020 IEEE KhPI Week on Advanced Technology, KhPI Week 2020 – Conference Proceedings. – 2020. – pp. 82 – 85. DOI: 10.1109/KhPIWeek51551.2020.9250175.
 8. Andrijev Yu., Breslavsky D., Larin A., Mietielov V. Computer Modelling of UAV Flight // 2021 IEEE 2nd KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek), 13-17 Sept. 2021. – Kharkiv : IEEE, 2021. – P. 455 – 459. DOI: 10.1109/KhPIWeek53812.2021.9569991.
 9. Andrieiev Yu., Breslavsky D., Chystilina H., Ivanchenko K. Algorithm for kinematic design of anthropomorphic robots with a free foot walking control // 2022 IEEE 3rd KhPI Week on Advanced Technology Conference (KhPIWeek), October 3-7. – Kharkiv, Ukraine, 2022. – pp. 324 – 329. – (1-6). DOI: 10.1109/KhPIWeek57572.2022.9916395.
 10. Liu H. S., Zhou W. N., Lai X. B., Zhu S. Q. An efficient inverse kinematic algorithm for a PUMA560-structured robot manipulator // *International Journal of Advanced Robotic Systems*. – 2013. – vol. 10(5). DOI: 10.5772/56403.
 11. Liu H., Zhang Y., Zhu S. Novel inverse kinematic approaches for robot manipulators with Pieper-Criterion based geometry. // *Int. J. Control Autom. Syst.* – 2015. – vol. 13. – pp. 1242 – 1250. DOI: 10.1007/s12555-013-0440-y.
 12. Андреев Ю. М. Реализация и использование алгоритма Левенберга-Марквардта в задачах калибровки роботов-манипуляторов // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Динаміка та міцність машин. – Харків : НТУ «ХПІ», 2021. – № 2 (2021). – С. 86 – 93. DOI: 10.20998/2078-9130.2021.2.249537.
 13. Racz S-G., Crenganiş M., Breaz R-E., Bârsan A., Gîrjob C-E., Biriş C-M., Tera M. Integrating Trajectory Planning with Kinematic Analysis and Joint Torques Estimation for an Industrial Robot Used in Incremental Forming Operations // *Machines*. – 2022. – 10, 531. DOI: 10.3390/machines10070531.
 14. Iakovlev Roman, Sakuta Vladislav, Denisov Alexander, Prapakovich Ryhor. Improving energy efficiency of a robotic system based on multiple analytical solutions for inverse kinematics // MATEC Web of Conferences. – 2017. – 113, 02002. DOI: 10.1051/mateconf/201711302002.
 15. Андреев Ю. М. Численно-аналитическое решение обратной задачи динамики дискретных систем // Восточно-европейский журнал передовых технологий. – Харьков, 2007. – № 2/4 (26). – С. 10 – 13.
 16. Андреев Ю. М., Дзюба В. Л. Удосконалений алгоритм розв'язання обернених задач динаміки робототехнічних пристроїв у ССКА Кі-Дім // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Динаміка та міцність машин. – Харків : НТУ «ХПІ», 2023. – № 2 (2023). – С. 34 – 40. DOI: 10.20998/2078-9130.2023.2.293010.
 17. Андреев Ю. М., Морачковский О. К. Новая система компьютерной алгебры для исследования колебаний структурно-сложных голономных и неголономных систем твердых тел // Надежность и долговечность машин и сооружений: межд. науч.-техн. сб. НАН Украины. – К.: ИПП им. Писаренко Г.С. Ассос. «Надежность машин и сооружений», 2006. – Вып. 26. – С. 11 – 18.
 18. Андреев Ю. М., Морачковский О. К. Метод подсистем для аналитического динамического анализа и синтеза // Физические и компьютерные технологии : 12-я Междунар. конф. : труды. – Харьков : ХНПК «ФЭД», 2006. – С. 123 – 131.

References (transliterated)

1. Andreev Yu. M. Algoritm kompensatsii vozmushheniy khod'by dvnogogo robota resheniem obratnoy zadachi kinematiki [The algorithm for compensating walking disturbances of a bipedal robot by solving the inverse kinematics problem]. *Visnik NTU «KhPI»*. Seriya : *Dinamika ta mitsnist' mashin* [Bulletin of NTU "KhPI". Series: Dynamics and Strength of Machines]. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2020, no. 2 (2020), pp. 14–21. DOI: <https://doi.org/10.20998/2078-9130.2020.1.219622>.
2. Fu K., Gonsales R., Li K. *Robototekhnika* [Robotics]. Moscow, Mir Publ., 1989. 621 p.
3. Shabanov H. V., Andrieiev Yu. M. Analitichne rishennya obernenogo i pryamogo zavdannya kinematyky prostorovogo kutovogo manipulyatora AVV z podal'shym 3D – modelyuvannyam [Analytical solution of the inverse and forward kinematics problem of a spatial angular ABB manipulator with subsequent 3D modeling]. *Visnik NTU «KhPI»*. Seriya : *Dinamika ta mitsnist' mashin* [Bulletin of NTU "KhPI". Series: Dynamics and Strength of Machines]. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2024, no. 2 (2024), pp. 30–38. DOI: 10.20998/2078-9130.2024.2.317116.
4. Denavit J., Hartenberg R. S. A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices. *Journal of Applied Mechanics*. 1955, no. 22 (2), pp. 215–221. DOI: 10.1115/1.4011045.
5. Xiao F., Li G., Jiang D., Xie Y., Yun J., Liu Y., Huang L., Fang Z. An effective and unified method to derive the inverse kinematics formulas of general six-dof manipulator with simple geometry. *Mechanism and Machine Theory*. 2021, vol. 159, p. 104265. DOI: 10.1016/j.Mechmachtheory.2021.104265.
6. Andreev Yu. M., Morachkovsky O. K. Dynamics of holonomic systems of rigid bodies. *Int. Appl. Mech.* 2005, Vol. 41, pp. 817–824.
7. Andrijev Y., Breslavsky D., Pashchenko S., Tatarinova O. Development the Algorithms of Anthropomorphic Robot's Motion Control by Use of AI Algorithms. 2020 IEEE KhPI Week on Advanced Technology, KhPI Week 2020 – Conference Proceedings. 2020, pp. 82–85. DOI: 10.1109/KhPIWeek51551.2020.9250175.
8. Andrijev Yu., Breslavsky D., Larin A., Mietielov V. Computer Modelling of UAV Flight. 2021 IEEE 2nd KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek), 13-17 Sept. 2021. Kharkiv, IEEE Publ., 2021. pp. 455–459. DOI: 10.1109/KhPIWeek53812.2021.9569991.
9. Andrieiev Yu., Breslavsky D., Chystilina H., Ivanchenko K. Algorithm for kinematic design of anthropomorphic robots with a free foot walking control. 2022 IEEE 3rd KhPI Week on Advanced Technology Conference (KhPIWeek), October 3-7. Kharkiv, Ukraine, 2022, pp. 324–329, (1-6). DOI: 10.1109/KhPIWeek57572.2022.9916395.
10. Liu H. S., Zhou W. N., Lai X. B., Zhu S. Q. An efficient inverse kinematic algorithm for a PUMA560-structured robot manipulator. *International Journal of Advanced Robotic Systems*. 2013, vol. 10(5). DOI: <https://doi.org/10.5772/56403>.
11. Liu H., Zhang Y., Zhu S. Novel inverse kinematic approaches for robot manipulators with Pieper-Criterion based geometry. *Int. J. Control Autom. Syst.* 2015, vol. 13, pp. 1242–1250. DOI: 10.1007/s12555-013-0440-y.
12. Andreev Yu. M. Realizatsiya i ispol'zovanie algoritma Levenberga-Markvardta v zadachakh kalibrovki robotov-manipulyatorov [Implementation and application of the Levenberg-Marquardt algorithm in robot manipulator calibration tasks]. *Visnik NTU «KhPI»*. Seriya : *Dinamika ta mitsnist' mashin* [Bulletin of NTU "KhPI". Series: Dynamics and Strength of Machines]. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2021, no. 2 (2021), pp. 86–93. DOI: 10.20998/2078-9130.2021.2.249537.

10.20998/2078-9130.2021.2.249537.

13. Racz S-G., Crenganiş M., Breaz R-E., Bârsan A., Gîrjob C-E., Biriş C-M., Tera M. Integrating Trajectory Planning with Kinematic Analysis and Joint Torques Estimation for an Industrial Robot Used in Incremental Forming Operations. *Machines*. 2022, 10, 531. DOI: 10.3390/machines10070531.
14. Iakovlev Roman, Sakuta Vladislav, Denisov Alexander, Prapakovich Ryhor. Improving energy efficiency of a robotic system based on multiple analytical solutions for inverse kinematics. *MATEC Web of Conferences*. 2017, 113, 02002. DOI: 10.1051/mateconf/201711302002.
15. Andreev Yu. M. Chislennno-analiticheskoe reshenie obratnoy zadachi dinamiki diskretnykh sistem [Numerical-analytical solution of the inverse dynamics problem for discrete systems]. *Vostochno-evropeyskiy zhurnal peredovykh tekhnologiy* [Eastern-European Journal of Advanced Technologies]. Kharkov, 2007. no. 2/4 (26), pp. 10–13.
16. Andrieiev Yu. M., Dziuba V. L. Udoskonalenyi alhorytm rozvyazannya obratnykh zadach dynamiky robototekhnichnykh prystroyiv u SSKA KiDyM [An improved algorithm for solving inverse dynamics problems of robotic devices in the CSKA KiDyM]. *Visnik NTU «KhPI». Seriya : Dinamika ta mitsnist' mashin* [Bulletin of NTU "KhPI". Series: Dynamics and Strength of Machines]. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2023, vol. 2 (2023), pp. 34–40. DOI: 10.20998/2078-9130.2023.2.293010.
17. Andreev Yu. M., Morachkovskij O. K. Novaya sistema komp'yuternoy algebry dlya issledovaniya kolebaniy strukturno-slozhnykh golonomnykh i negolonomnykh sistem tverdykh tel [A new computer algebra system for studying oscillations of structurally complex holonomic and non-holonomic rigid body systems]. *Nadezhnost' i dolgovechnost' mashin i sooruzheniy : mezhd. nauch.-tekhn. sb. NAN Ukrainy* [Reliability and Durability of Machines and Structures: International Scientific and Technical Collection of the NAS of Ukraine]. Kyiv, IPP im. Pisarenko G.S. Assoc. «Nadezhnost' mashin i sooruzheniy» Publ., 2006, Vol. 26, pp. 11 – 18.
18. Andreev Yu. M., Morachkovskij O. K. Metod podsistem dlya analiticheskogo dinamicheskogo analiza i sinteza [The subsystem method for analytical dynamic analysis and synthesis]. *Fizicheskie i komp'yuternye tekhnologii : 12-ya Mezhdunar. konf. : trudy* [Physical and Computer Technologies: 12th International Conference: Proceedings]. Kharkiv, KhNPK "FED" Publ., 2006, pp. 123–131.

Надійшла (received) 30.09.2024

Відомості про авторів / Information about authors

Андрєєв Юрій Михайлович – доктор технічних наук, професор, професор кафедри комп'ютерного моделювання процесів і систем, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (067) 110-16-72; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3213-8496>; e-mail: andrjejev@gmail.com.

Andrieiev Yuriy Mykhailovych – Doctor of Technical Sciences, Professor, Professor at the Department of Computer Modeling of Processes and Systems, National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute», Kharkiv; tel.: (067) 110-16-72; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3213-8496>; e-mail: andrjejev@gmail.com.

Головня Олексій Олександрович – магістрант кафедри комп'ютерного моделювання процесів і систем, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (095) 256-08-17; ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-4465-3474>; e-mail: oleksii.holovnia@infiz.khpi.edu.ua.

Holovnia Oleksii Oleksandrovych – Master Student at the Department of Computer Modeling of Processes and Systems, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Kharkiv; tel.: (095) 256-08-17; ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-4465-3474>; e-mail: oleksii.holovnia@infiz.khpi.edu.ua.

Шабанов Геннадій Вікторович – аспірант кафедри комп'ютерного моделювання процесів і систем, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (050) 596-88-86; ORCID: <https://orcid.org/0009-0003-8555-4693>; e-mail: gennady.shabanov@gmail.com.

Shabanov Hennadii Viktorovich – Graduate Student at the Department of Computer Modeling of Processes and Systems, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Kharkiv; tel.: (050) 596-88-86; ORCID: <https://orcid.org/0009-0003-8555-4693>; e-mail: gennady.shabanov@gmail.com.