УДК 519.6: 621.382.233 **DOI: 10.20998/2222-0631.2023.02(5).03**

А. Я. БОМБА, І. П. МОРОЗ

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ У P-I-N-ДІОДІ МЕТОДАМИ ТЕОРІЇ ЗБУРЕНЬ

Робота присвячена розробці математичної моделі динамічного процесу формування електронно-діркової плазми активної області ($i-$ області) напівпровідникового $p-i-n-$ діода у режимі прямого включення із поданням на діод гармонічного сигналу. Основою моделі є нелінійна нестаціонарна сингулярно збурена крайова задача для системи рівнянь неперервності електронно-діркових струмів та рівняння Пуассона. Алгоритм пошуку розподілів концентрації носіїв заряду у плазмі та потенціалу будується на основі асимптотичного методу примежових поправок та методу Фур'є. У ході виконання досліджень запропоновано методику проведення декомпозиції нелінійної задачі, що грунтується на розвитку методів теорії збурень. Вихідна нелінійна задача приводиться до рекурентної послідовності лінійних стаціонарних крайових задач, які розв'язуються класичними і частково оригінальними аналітико-числовими методами. Виділення примежових поправок у розв'язку задачі забезпечує, зокрема, на відміну від класичного наближення амбіполярної дифузії, адекватний опис поведінки напруженості електричного поля в активній області $p-i-n-$ діодів. Отримані результати досліджень надають можливість висвітлити особливості формування імпедансних характеристик $p-i-n-$ структур. Результати роботи глибше розкривають природу фізичних процесів у досліджуваній технічній системі та спрямовані на удосконалення методики моделювання і проектування відповідних керуючих пристроїв напівпровідникової електроніки.

Ключові слова: метод збурень, сингулярно збурена нестаціонарна крайова задача, асимптотичний ряд, примежова функція, напівпровідниковий $p-i-n-$ діод, електронно-діркова плазма.

А. Я. БОМБА, И. П. МОРОЗ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В P-I-N-ДИОДЕ МЕТОДАМИ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

Работа посвящена разработке математической модели динамического процесса формирования электронно-дырочной плазмы в активной области ($i-$ области) полупроводникового $p-i-n-$ диода в режиме прямого смещения с подачей на диод гармонического сигнала. Основой модели является нелинейная нестационарная сингулярно возмущенная краевая задача для системы уравнений непрерывности электронно-дырочных токов и уравнения Пуассона. Алгоритм поиска распределений концентрации носителей заряда в плазме и потенциала строится на основе асимптотического метода пограничных функций и метода Фурье. В ходе выполнения исследований предложена методика проведения декомпозиции нелинейной задачи, которая основывается на развитии методов теории возмущений. Исходная нелинейная задача приводится к рекуррентной последовательности линейных стационарных краевых задач, решаемых классическими и частично оригинальными аналитико-числовыми методами. Выделение приграничных поправок в решении задачи обеспечивает, в частности, в отличие от классического приближения амбиполярной диффузии, адекватное описание поведения напряженности электрического поля в активной области $p-i-n-$ диодов. Полученные результаты исследований позволяют выявить особенности формирования импедансных характеристик $p-i-n-$ структур. Результаты работы глубже раскрывают природу физических процессов в исследуемой технической системе и направлены на усовершенствование методики моделирования и проектирования соответствующих управляющих полупроводниковых устройств.

Ключевые слова: метод возмущений, сингулярно возмущённая нестационарная краевая задача, асимптотический ряд, пограничная функция, полупроводниковый $p-i-n-$ диод, электронно-дырочная плазма.

A. Ya. BOMBA, I. P. MOROZ

SIMULATION OF DYNAMIC PROCESSES IN A P-I-N DIODE BY THE METHODS OF PERTURBATION THEORY

In the paper a mathematical model of the dynamic process of the electron-hole plasma formation in the active region ($i-$ region) of a semiconductor $p-i-n-$ diode in the direct bias mode with a harmonic signal fed on the diode is developed. The basis of the model is a nonlinear nonstationary singularly perturbed boundary value problem for a system of continuity equations of electron-hole currents and Poisson's equation. The algorithm for searching the charge carrier concentration distributions and the potential distribution is based on the asymptotic method of boundary functions and the Fourier method. In the course of the research, a technique for decomposing a nonlinear problem based on the development of perturbation theory methods was proposed. The initial nonlinear problem is reduced to a recurrent sequence of linear stationary boundary value problems, solved by classical and partially original analytical-numerical methods. The identification of the boundary functions in the solution of the problem provides, in particular, in contrast to the classical approximation of ambipolar diffusion, an adequate description of the electric field strength behavior in the active region of $p-i-n-$ diodes. The obtained research results shed light on the peculiarities of the formation of the impedance characteristics of $p-i-n-$ structures. The results of the work reveal more deeply the nature of the physical processes in the studied technical system and are aimed at improving the methodology for modeling and designing control semiconductor devices.

Key words: perturbation method, singularly perturbed nonstationary boundary value problem, asymptotic series, boundary function, semiconductor $p-i-n-$ diode, electron-hole plasma.

Вступ і загальна постановка задачі. В основу принципу роботи *напівпровідникового* $p-i-n-$*діода* покладено можливість управління *провідністю електронно-діркової плазми*, яка формується в *активній області* ($i-$ *області*) діода. Для дослідження електропровідних характеристик $i-$ області $p-i-n-$діодів широко використовується *дифузійно-дрейфова модель* [1 – 4], яку формують *рівняння неперервності* електронного та діркового струмів та *рівняння Пуассона* з відповідними граничними умовами. Для одновимірного випадку ($\Omega=\{(x):$

© А. Я. Бомба, І. П. Мороз, 2023

$0 < x < w\}$), доцільність розгляду якого обумовлена особливостями геометричної будови пристрою, постановка модельної задачі має наступний вигляд:

$$\begin{cases} \mu^2 \dfrac{\partial E}{\partial x} = \left(p - n + N_d\right); \\ B_n \dfrac{\partial n}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \dfrac{\partial n}{\partial x} E + n \dfrac{\partial E}{\partial x} - A_n n; \\ B_p \dfrac{\partial p}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \dfrac{\partial p}{\partial x} E - p \dfrac{\partial E}{\partial x} - A_p p. \end{cases} \tag{1}$$

В (1) використано позначення: $E(x,t)$, $n(x,t)$, $p(x,t)$ – шукані функції напруженості електричного поля, розподілів концентрацій електронів і дірок в активній області $p-i-n-$діода відповідно (використовується нормування $\tilde{x} = \dfrac{x}{w}$, $\tilde{E} = \dfrac{Eew}{kT}$, $\tilde{n} = \dfrac{n}{N_i}$, $\tilde{p} = \dfrac{p}{N_i}$; у викладках символ « ~ » опускається); $\mu^2 = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 kT}{e^2 w^2 N_i}$ (малий параметр $\mu \sim 10^{-6} \div 10^{-8}$); ε – відносна діелектрична стала; ε_0 – діелектрична стала; w – характерний розмір активної області діода; e – заряд електрона; N_i – концентрація носіїв заряду у власному напівпровіднику; k – *стала Больцмана*; T – температура ($^\circ K$); $A_n = \dfrac{w^2}{D_n \tau_n^*}$, $A_p = \dfrac{w^2}{D_p \tau_p^*}$, $B_n = \dfrac{w^2}{D_n}$, $B_p = \dfrac{w^2}{D_p}$, D_n, D_p – коефіцієнти дифузії дірок та електронів відповідно; τ_n^*, τ_p^* – характерні часи рекомбінації носіїв заряду в об'ємі активної області (у даній математичній моделі є сталими, які залежать, як і коефіцієнти дифузії, від обраного матеріалу напівпровідника); $N_d(x)$ – профіль легування.

На межах активної області під дією струму прямого зміщення J (J – густина струму), прикладеної різниці потенціалів U та нестаціонарного сигналу (змінюється за *гармонічним законом*: $J^{\sim}(t) = J_m e^{j\omega t}$, $U^{\sim}(t) = U_m e^{j\omega t}$, де J_m, U_m – амплітуди коливань відповідно струму і напруги, ω – кругова частота коливань, $j^2 = -1$) відбувається *інжекція* носіїв заряду в активну область [1, 2]. При цьому потоки носіїв заряду мають дифузійні та рекомбінаційні компоненти. Відповідно, використовуємо граничні умови наступного виду:

$$\left.\frac{\partial n}{\partial x} - \gamma_n w n\right|_{x=0} = \frac{\left(J + J^{\sim}(t)\right)}{eD_n} \frac{w}{N_i}, \quad \left.-\frac{\partial p}{\partial x} - \gamma_p w p\right|_{x=0} = 0; \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial n}{\partial x} - \gamma_n w n\right|_{x=1} = 0, \quad \left.-\frac{\partial p}{\partial x} - \gamma_p w p\right|_{x=1} = \frac{\left(J + J^{\sim}(t)\right)}{eD_p} \frac{w}{N_i},$$

$$E\big|_{x=0} = 0, \quad E\big|_{x=1} = 0, \quad \int_0^1 E dx = U + U^{\sim}(t), \tag{3}$$

де γ_n, γ_n – коефіцієнти рекомбінації носіїв заряду на інжекційних контактах.

Розглядається процес на великих проміжках часу ($-\infty < t < \infty$) без початкових умов.

У літературних джерелах зустрічаються постановки задач, аналогічні до (1) – (3) (наприклад, [2]). Зазвичай у процесі аналізу таких задач з системи рівнянь вилучають нелінійні члени (наближення *амбіполярної дифузії*). Внаслідок цього втрачається частина інформації про властивості досліджуваної системи. У постановці (1) – (3) задача є сингулярно збуреною, і це є підставою для застосування *методів теорії збурень* для її розв'язання [5 – 12]. Зазначимо також, що раніше виконувались дослідження математичних моделей подібних технічних систем, зокрема $p-n-$діодів [11], які відрізняються від (1) – (3) постановками задач.

Мета дослідження полягає у аналізі моделі нестаціонарного процесу формування електронно-діркової плазми в активній області $p-i-n-$діодів під дією гармонічного сигналу методами теорії збурень, а також у виявленні основних складових цього процесу.

Схема декомпозиції розв'язку. Розв'язок задачі (1) – (3) зручно шукати у наступному вигляді:

$$E = E(x,t) = \sum_{s=0}^{\infty} E_s(x) e^{js\omega t}, \quad n = n(x,t) = \sum_{s=0}^{\infty} n_s(x) e^{js\omega t}, \quad p = p(x,t) = \sum_{s=0}^{\infty} p_s(x) e^{js\omega t}. \tag{4}$$

Після підстановки (4) в (1) – (3) отримуємо задачу для пошуку стаціонарних компонент розв'язків (при

$N_d\left(x\right)=0$):

$$\begin{cases} \mu^2 \dfrac{dE_0}{dx} = \left(p_0 - n_0\right), \\ \dfrac{d^2 n_0}{dx^2} + \dfrac{dn_0}{dx} E_0 + n_0 \dfrac{dE_0}{dx} - A_n n_0 = 0, \\ \dfrac{d^2 p_0}{dx^2} - \dfrac{dp_0}{dx} E_0 - p_0 \dfrac{dE_0}{dx} - A_p p_0 = 0; \end{cases} \tag{5}$$

$$\left.\frac{dn_0}{dx} - \gamma_n w n_0\right|_{x=0} = \frac{J}{eD_n}\frac{w}{N_i}, \quad \left.-\frac{dp_0}{dx} - \gamma_p w p_0\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\frac{dn_0}{dx} - \gamma_n w n_0\right|_{x=1} = 0, \quad \left.\frac{dp_0}{dx} - \gamma_p w p_0\right|_{x=1} = -\frac{J}{eD_p}\frac{w}{N_i},$$

$$E_0\big|_{x=0} = 0, \quad E_0\big|_{x=1} = 0, \quad \int_0^1 E_0 dx = U \tag{6}$$

та задачу для пошуку компонент розв'язку, що відповідають основній коливальній гармоніці (слабкий ефект, як показують експериментальні дані [2], породжений другою та вищими гармоніками, у досліджуваній системі розглядатись не буде):

$$\begin{cases} \mu^2 \dfrac{dE_1}{dx} = \left(p_1 - n_1\right), \\ \dfrac{d^2 n_1}{dx^2} + \dfrac{dn_0}{dx} E_1 + n_0 \dfrac{dE_1}{dx} + \dfrac{dn_1}{dx} E_0 + n_1 \dfrac{dE_0}{dx} - A_n n_1 - B_n j\omega n_1 = 0, \\ \dfrac{d^2 p_1}{dx^2} - \dfrac{dp_0}{dx} E_1 - p_0 \dfrac{dE_1}{dx} - \dfrac{dp_1}{dx} E_0 - p_1 \dfrac{dE_0}{dx} - A_p p_1 - B_p j\omega p_1 = 0; \end{cases} \tag{7}$$

$$\left.\frac{dn_1}{dx} - \gamma_n w n_1\right|_{x=0} = \frac{J_m}{eD_n}\frac{w}{N_i}, \quad \left.-\frac{dp_1}{dx} - \gamma_p w p_1\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\frac{dn_1}{dx} - \gamma_n w n_1\right|_{x=1} = 0, \quad \left.\frac{dp_1}{dx} - \gamma_p w p_1\right|_{x=1} = -\frac{J_m}{eD_p}\frac{w}{N_i},$$

$$E_1\big|_{x=0} = 0, \quad E_1\big|_{x=1} = 0, \quad \int_0^1 E_1 dx = U_m. \tag{8}$$

Сингулярно збурені задачі (5) – (6) та (7) – (8) пропонуємо розв'язувати методом примежових поправок [8]. Системи рівнянь (5), (7) (аналогічно до [8]) подамо у наступному вигляді:

$$\mu^2 \frac{dE_0}{dx} = F_{E0}\left(p_0\left(x\right), n_0\left(x\right)\right), \quad \frac{d^2 n_0}{dx^2} - A_n n_0 = F_{n0}\left(n_0\left(x\right), E_0\left(x\right)\right), \quad \frac{d^2 p_0}{dx^2} - A_p p_0 = F_{p0}\left(p_0\left(x\right), E_0\left(x\right)\right); \tag{9}$$

$$\mu^2 \frac{dE_1}{dx} = F_{E1}\left(p_1\left(x\right), n_1\left(x\right)\right), \quad \frac{d^2 n_1}{dx^2} - A_n^* n_1 = F_{n1}\left(n_0\left(x\right), E_0\left(x\right), n_1\left(x\right), E_1\left(x\right)\right),$$

$$\frac{d^2 p_1}{dx^2} - A_p^* p_1 = F_{p1}\left(p_0\left(x\right), E_0\left(x\right), p_1\left(x\right), E_1\left(x\right)\right), \tag{10}$$

де $A_n^* = A_n + j\omega B_n$, $A_p^* = A_p + j\omega B_p$.

За аналогією із [5 – 8] розв'язки задач (5) – (6) та (7) – (8) пропонуємо шукати у наступному вигляді:

$$n_l\left(x\right) = N_l\left(x\right) + \underline{N}_l\left(\underline{\xi}\right) + \overline{N}_l\left(\overline{\xi}\right); \quad p_l\left(x\right) = P_l\left(x\right) + \underline{P}_l\left(\underline{\xi}\right) + \overline{P}_l\left(\overline{\xi}\right);$$

$$E_l\left(x\right) = \tilde{E}_l\left(x\right) + \underline{E}_l\left(\underline{\xi}\right) + \overline{E}_l\left(\overline{\xi}\right), \tag{11}$$

де $N_l\left(x\right)$, $P_l\left(x\right)$, $\tilde{E}_l\left(x\right)$ – регулярні компоненти розв'язків; $\underline{N}_l\left(\underline{\xi}\right)$, $\underline{P}_l\left(\underline{\xi}\right)$, $\underline{E}_l\left(\underline{\xi}\right)$, $\overline{N}_l\left(\overline{\xi}\right)$, $\overline{P}_l\left(\overline{\xi}\right)$, $\overline{E}_l\left(\overline{\xi}\right)$ – примежові поправки відповідно в околах точок $x=0$ та $x=1$ ($\underline{\xi} = \dfrac{x}{\mu}$, $\overline{\xi} = \dfrac{1-x}{\mu}$ – *регуляризуючі розтяги*); $l = 0, 1$.

Підстановка (11) у (9), (10) та виділення регулярних складових рівнянь і примежових поправок способом, аналогічним викладеному у [13], дозволяє переписати системи рівнянь (9), (10) так, що, зокрема, рівняння Пуассона для стаціонарних і нестаціонарних компонент набувають вигляду:

$$\mu^2 \frac{d\left(\tilde{E}_l\left(x\right) + \underline{E}_l\left(\underline{\xi}\right) + \overline{E}_l\left(\overline{\xi}\right)\right)}{dx} = F_{El}\left(P_l\left(x\right) + \underline{P}_l\left(\underline{\xi}\right) + \overline{P}_l\left(\overline{\xi}\right), N_l\left(x\right) + \underline{N}_l\left(\underline{\xi}\right) + \overline{N}_l\left(\overline{\xi}\right)\right) =$$

$$= \tilde{F}_{El}\left(x\right) + \underline{F_{E}}_{l}\left(\underline{\xi}\right) + \overline{F_{E\,l}}\left(\overline{\xi}\right), \quad l = 0, 1, \tag{12.1}$$

де

$$\tilde{F}_{El}\left(x\right) = F_{El}\left(P_l\left(x\right), N\left(x\right)\right) = P_l\left(x\right) - N_l\left(x\right);$$

$$\underline{F_{E}}_{l}\left(\underline{\xi}\right) = F_{El}\left(P_l\left(\mu\underline{\xi}\right) + \underline{P}_l\left(\underline{\xi}\right), N_l\left(\mu\underline{\xi}\right) + \underline{N}_l\left(\underline{\xi}\right)\right) - F_{El}\left(P_l\left(\mu\underline{\xi}\right), N_l\left(\mu\underline{\xi}\right)\right) = \underline{P}_l\left(\underline{\xi}\right) - \underline{N}_l\left(\underline{\xi}\right),$$

$$\overline{F_{E\,l}}\left(\overline{\xi}\right) = F_{El}\left(P_l\left(1-\mu\overline{\xi}\right) + \overline{P}_l\left(\overline{\xi}\right), N_l\left(1-\mu\overline{\xi}\right) + \overline{N}_l\left(\overline{\xi}\right)\right) - F_{El}\left(P_l\left(1-\mu\overline{\xi}\right), N_l\left(1-\mu\overline{\xi}\right)\right) = \overline{P}_l\left(\overline{\xi}\right) - \overline{N}_l\left(\overline{\xi}\right).$$

Відповідно, рівняння неперервності стаціонарного струму електронів має наступну структуру:

$$\frac{d^2\left(N_0\left(x\right) + \underline{N}_0\left(\underline{\xi}\right) + \overline{N}_0\left(\overline{\xi}\right)\right)}{dx^2} - A_n\left(N_0\left(x\right) + \underline{N}_0\left(\underline{\xi}\right) + \overline{N}_0\left(\overline{\xi}\right)\right) =$$

$$= F_{n0}\left(N_0\left(x\right) + \underline{N}_0\left(\underline{\xi}\right) + \overline{N}_0\left(\overline{\xi}\right), \tilde{E}_0\left(x\right) + \underline{E}_0\left(\underline{\xi}\right) + \overline{E}_0\left(\overline{\xi}\right)\right) = \tilde{F}_{n0}\left(x\right) + \underline{F}_{n0}\left(\underline{\xi}\right) + \overline{F}_{n0}\left(\overline{\xi}\right), \tag{12.2}$$

де

$$\tilde{F}_{n0}\left(x\right) = F_{n0}\left(N_0\left(x\right), E_0\left(x\right)\right) = -\frac{d}{dx}\left(N_0\left(x\right)\tilde{E}_0\left(x\right)\right);$$

$$\underline{F_{n}}_{0}\left(\underline{\xi}\right) = F_{n0}\left(N_0\left(\mu\underline{\xi}\right) + \underline{N}_0\left(\underline{\xi}\right), \tilde{E}_0\left(\mu\underline{\xi}\right) + \underline{E}_0\left(\underline{\xi}\right)\right) - F_{n0}\left(N_0\left(\mu\underline{\xi}\right), \tilde{E}_0\left(\mu\underline{\xi}\right)\right) =$$

$$= -\frac{1}{\mu}\frac{d}{d\underline{\xi}}\left(\left(N_0\left(\mu\underline{\xi}\right) + \underline{N}_0\left(\underline{\xi}\right)\right)\left(\tilde{E}_0\left(\mu\underline{\xi}\right) + \underline{E}_0\left(\underline{\xi}\right)\right)\right) + \frac{1}{\mu}\frac{d}{d\underline{\xi}}\left(N_0\left(\mu\underline{\xi}\right)\tilde{E}_0\left(\mu\underline{\xi}\right)\right) =$$

$$= -\frac{1}{\mu}\frac{d}{d\underline{\xi}}\left(\underline{N}_0\left(\underline{\xi}\right)\tilde{E}_0\left(\mu\underline{\xi}\right) + N_0\left(\mu\underline{\xi}\right)\underline{E}_0\left(\underline{\xi}\right) + \underline{N}_0\left(\underline{\xi}\right)\underline{E}_0\left(\underline{\xi}\right)\right);$$

$$\overline{F_{n\,0}}\left(\overline{\xi}\right) = F_{n0}\left(N_0\left(1-\mu\overline{\xi}\right) + \overline{N}_0\left(\overline{\xi}\right), \tilde{E}_0\left(1-\mu\overline{\xi}\right) + \overline{E}_0\left(\overline{\xi}\right)\right) - F_{n0}\left(N_0\left(1-\mu\overline{\xi}\right), \tilde{E}_0\left(1-\mu\overline{\xi}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{\mu}\frac{d}{d\overline{\xi}}\left(\left(N_0\left(1-\mu\overline{\xi}\right) + \overline{N}_0\left(\overline{\xi}\right)\right)\left(\tilde{E}_0\left(1-\mu\overline{\xi}\right) + \overline{E}_0\left(\overline{\xi}\right)\right)\right) - \frac{1}{\mu}\frac{d}{d\overline{\xi}}\left(N_0\left(1-\mu\overline{\xi}\right)\tilde{E}_0\left(1-\mu\overline{\xi}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{\mu}\frac{d}{d\overline{\xi}}\left(\overline{N}_0\left(\overline{\xi}\right)\tilde{E}_0\left(1-\mu\overline{\xi}\right) + N_0\left(1-\mu\overline{\xi}\right)\overline{E}_0\left(\overline{\xi}\right) + \overline{N}_0\left(\overline{\xi}\right)\overline{E}_0\left(\overline{\xi}\right)\right).$$

Аналогічно до (12.2) подаємо рівняння неперервності стаціонарного струму дірок:

$$\frac{d^2\left(P_0\left(x\right) + \underline{P}_0\left(\underline{\xi}\right) + \overline{P}_0\left(\overline{\xi}\right)\right)}{dx^2} - A_p\left(P_0\left(x\right) + \underline{P}_0\left(\underline{\xi}\right) + \overline{P}_0\left(\overline{\xi}\right)\right) =$$

$$= F_{p0}\left(P_0\left(x\right) + \underline{P}_0\left(\underline{\xi}\right) + \overline{P}_0\left(\overline{\xi}\right), \tilde{E}_0\left(x\right) + \underline{E}_0\left(\underline{\xi}\right) + \overline{E}_0\left(\overline{\xi}\right)\right) = \tilde{F}_{p0}\left(x\right) + \underline{F}_{p0}\left(\underline{\xi}\right) + \overline{F}_{p0}\left(\overline{\xi}\right), \tag{12.3}$$

де

$$\tilde{F}_{p0}\left(x\right) = F_{p0}\left(P_0\left(x\right), E_0\left(x\right)\right) = \frac{d}{dx}\left(P_0\left(x\right)\tilde{E}_0\left(x\right)\right);$$

$$\underline{F}_{p0}\left(\underline{\xi}\right) = F_{p0}\left(P_0\left(\mu\underline{\xi}\right) + \underline{P}_0\left(\underline{\xi}\right), \tilde{E}_0\left(\mu\underline{\xi}\right) + \underline{E}_0\left(\underline{\xi}\right)\right) - F_{p0}\left(P_0\left(\mu\underline{\xi}\right), \tilde{E}_0\left(\mu\underline{\xi}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{\mu}\frac{d}{d\underline{\xi}}\left(\left(P_0\left(\mu\underline{\xi}\right) + \underline{P}_0\left(\underline{\xi}\right)\right)\left(\tilde{E}_0\left(\mu\underline{\xi}\right) + \underline{E}_0\left(\underline{\xi}\right)\right)\right) - \frac{1}{\mu}\frac{d}{d\underline{\xi}}\left(P_0\left(\mu\underline{\xi}\right)\tilde{E}_0\left(\mu\underline{\xi}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{\mu}\frac{d}{d\underline{\xi}}\left(\underline{P}_0\left(\underline{\xi}\right)\tilde{E}_0\left(\mu\underline{\xi}\right) + P_0\left(\mu\underline{\xi}\right)\underline{E}_0\left(\underline{\xi}\right) + \underline{P}_0\left(\underline{\xi}\right)\underline{E}_0\left(\underline{\xi}\right)\right);$$

$$\overline{F}_{p0}\left(\overline{\xi}\right) = F_{p0}\left(P_0\left(1-\mu\overline{\xi}\right) + \overline{P}_0\left(\overline{\xi}\right), \tilde{E}_0\left(1-\mu\overline{\xi}\right) + \overline{E}_0\left(\overline{\xi}\right)\right) - F_{p0}\left(P_0\left(1-\mu\overline{\xi}\right), \tilde{E}_0\left(1-\mu\overline{\xi}\right)\right) =$$

$$= -\frac{1}{\mu}\frac{d}{d\overline{\xi}}\left(\left(P_0\left(1-\mu\overline{\xi}\right) + \overline{P}_0\left(\overline{\xi}\right)\right)\left(E_0\left(1-\mu\overline{\xi}\right) + \overline{E}_0\left(\overline{\xi}\right)\right)\right) + \frac{1}{\mu}\frac{d}{d\overline{\xi}}\left(P_0\left(1-\mu\overline{\xi}\right)E_0\left(1-\mu\overline{\xi}\right)\right) =$$

$$= -\frac{1}{\mu}\frac{d}{d\overline{\xi}}\left(\overline{P}_0\left(\overline{\xi}\right)\tilde{E}_0\left(1-\mu\overline{\xi}\right) + P_0\left(1-\mu\overline{\xi}\right)\overline{E}_0\left(\overline{\xi}\right) + \overline{P}_0\left(\overline{\xi}\right)\overline{E}_0\left(\overline{\xi}\right)\right).$$

Рівняння неперервності змінного струму електронів і дірок записуємо у наступному вигляді:

$$\frac{d^2\left(N_1\left(x\right) + \underline{N}_1\left(\underline{\xi}\right) + \overline{N}_1\left(\overline{\xi}\right)\right)}{dx^2} - A_n^*\left(N_1\left(x\right) + \underline{N}_1\left(\underline{\xi}\right) + \overline{N}_1\left(\overline{\xi}\right)\right) =$$

$$=F_{n1}\left(N_0(x)+\underline{N}_0(\underline{\xi})+\overline{N}_0(\overline{\xi}),\,\tilde{E}_0(x)+\underline{E}_0(\underline{\xi})+\overline{E}_0(\overline{\xi}),\,N_1(x)+\underline{N}_1(\underline{\xi})+\overline{N}_1(\overline{\xi}),\,\tilde{E}_1(x)+\underline{E}_1(\underline{\xi})+\overline{E}_1(\overline{\xi})\right)=$$
$$=\tilde{F}_{n1}(x)+\underline{F}_{n1}(\underline{\xi})+\overline{F}_{n1}(\overline{\xi}), \tag{12.4}$$

де

$$\tilde{F}_{n1}(x)=F_{n1}\left(N_0(x),\,E_0(x),\,N_1(x),\,E_1(x)\right)=-\frac{d}{dx}\left(N_0(x)\tilde{E}_1(x)\right)-\frac{d}{dx}\left(N_1(x)\tilde{E}_0(x)\right),$$

$$\underline{F}_{n1}(\underline{\xi})=F_{n1}\left(N_0(\mu\underline{\xi})+\underline{N}_0(\underline{\xi}),\,\tilde{E}_0(\mu\underline{\xi})+\underline{E}_0(\underline{\xi}),\,N_1(\mu\underline{\xi})+\underline{N}_1(\underline{\xi}),\,\tilde{E}_1(\mu\underline{\xi})+\underline{E}_1(\underline{\xi})\right)-$$
$$-F_{n0}\left(N_0(\mu\underline{\xi}),\,\tilde{E}_0(\mu\underline{\xi}),\,N_1(\mu\underline{\xi}),\,\tilde{E}_1(\mu\underline{\xi})\right)=$$
$$=-\frac{1}{\mu}\frac{d}{d\underline{\xi}}\left(\left(N_0(\mu\underline{\xi})+\underline{N}_0(\underline{\xi})\right)\left(\tilde{E}_1(\mu\underline{\xi})+\underline{E}_1(\underline{\xi})\right)\right)+\frac{1}{\mu}\frac{d}{d\underline{\xi}}\left(N_0(\mu\underline{\xi})\tilde{E}_1(\mu\underline{\xi})\right)-$$
$$-\frac{1}{\mu}\frac{d}{d\underline{\xi}}\left(\left(N_1(\mu\underline{\xi})+\underline{N}_1(\underline{\xi})\right)\left(\tilde{E}_0(\mu\underline{\xi})+\underline{E}_0(\underline{\xi})\right)\right)+\frac{1}{\mu}\frac{d}{d\underline{\xi}}\left(N_1(\mu\underline{\xi})\tilde{E}_0(\mu\underline{\xi})\right)=$$
$$=-\frac{1}{\mu}\frac{d}{d\underline{\xi}}\left(\underline{N}_0(\underline{\xi})\tilde{E}_1(\mu\underline{\xi})+N_0(\mu\underline{\xi})\underline{E}_1(\underline{\xi})+\underline{N}_0(\underline{\xi})\underline{E}_1(\underline{\xi})\right)-$$
$$-\frac{1}{\mu}\frac{d}{d\underline{\xi}}\left(\underline{N}_1(\underline{\xi})\tilde{E}_0(\mu\underline{\xi})+N_1(\mu\underline{\xi})\underline{E}_0(\underline{\xi})+\underline{N}_1(\underline{\xi})\underline{E}_0(\underline{\xi})\right),$$

$$\overline{F}_{n1}(\overline{\xi})=F_{n1}\left(N_0(1-\mu\overline{\xi})+\overline{N}_0(\overline{\xi}),\,\tilde{E}_0(1-\mu\overline{\xi})+\overline{E}_0(\overline{\xi}),\,N_1(1-\mu\overline{\xi})+\overline{N}_1(\overline{\xi}),\,\tilde{E}_1(1-\mu\overline{\xi})+\overline{E}_1(\overline{\xi})\right)-$$
$$-F_{n1}\left(N_0(1-\mu\overline{\xi}),\,\tilde{E}_0(1-\mu\overline{\xi}),\,N_1(1-\mu\overline{\xi}),\,\tilde{E}_1(1-\mu\overline{\xi})\right)=$$
$$=\frac{1}{\mu}\frac{d}{d\overline{\xi}}\left(\left(N_0(1-\mu\overline{\xi})+\overline{N}_0(\overline{\xi})\right)\left(\tilde{E}_1(1-\mu\overline{\xi})+\overline{E}_1(\overline{\xi})\right)\right)-\frac{1}{\mu}\frac{d}{d\overline{\xi}}\left(N_0(1-\mu\overline{\xi})\tilde{E}_1(1-\mu\overline{\xi})\right)+$$
$$+\frac{1}{\mu}\frac{d}{d\overline{\xi}}\left(\left(N_1(1-\mu\overline{\xi})+\overline{N}_1(\overline{\xi})\right)\left(\tilde{E}_0(1-\mu\overline{\xi})+\overline{E}_0(\overline{\xi})\right)\right)-\frac{1}{\mu}\frac{d}{d\overline{\xi}}\left(N_1(1-\mu\overline{\xi})\tilde{E}_0(1-\mu\overline{\xi})\right)=$$
$$=\frac{1}{\mu}\frac{d}{d\overline{\xi}}\left(\overline{N}_0(\overline{\xi})\tilde{E}_1(1-\mu\overline{\xi})+N_0(1-\mu\overline{\xi})\overline{E}_1(\overline{\xi})+\overline{N}_0(\overline{\xi})\overline{E}_1(\overline{\xi})\right)+$$
$$+\frac{1}{\mu}\frac{d}{d\overline{\xi}}\left(\overline{N}_1(\overline{\xi})\tilde{E}_0(1-\mu\overline{\xi})+N_1(1-\mu\overline{\xi})\overline{E}_0(\overline{\xi})+\overline{N}_1(\overline{\xi})\overline{E}_0(\overline{\xi})\right);$$

$$\frac{d^2\left(P_1(x)+\underline{P}_1(\underline{\xi})+\overline{P}_1(\overline{\xi})\right)}{dx^2}-A_p^*\left(P_1(x)+\underline{P}_1(\underline{\xi})+\overline{P}_1(\overline{\xi})\right)=$$
$$=F_{p0}\left(P_0(x)+\underline{P}_0(\underline{\xi})+\overline{P}_0(\overline{\xi}),\,\tilde{E}_0(x)+\underline{E}_0(\underline{\xi})+\overline{E}_0(\overline{\xi}),\,P_1(x)+\underline{P}_1(\underline{\xi})+\overline{P}_1(\overline{\xi}),\,\tilde{E}_1(x)+\underline{E}_1(\underline{\xi})+\overline{E}_1(\overline{\xi})\right)=$$
$$=\tilde{F}_{p1}(x)+\underline{F}_{p1}(\underline{\xi})+\overline{F}_{p1}(\overline{\xi}), \tag{12.5}$$

де

$$\tilde{F}_{p1}(x)=F_{p1}\left(P_0(x),\,E_0(x),\,P_1(x),\,E_1(x)\right)=\frac{d}{dx}\left(P_0(x)\tilde{E}_1(x)\right)+\frac{d}{dx}\left(P_1(x)\tilde{E}_0(x)\right);$$

$$\underline{F}_{p1}(\underline{\xi})=F_{p1}\left(P_0(\mu\underline{\xi})+\underline{P}_0(\underline{\xi}),\,\tilde{E}_0(\mu\underline{\xi})+\underline{E}_0(\underline{\xi}),\,P_1(\mu\underline{\xi})+\underline{P}_1(\underline{\xi}),\,\tilde{E}_1(\mu\underline{\xi})+\underline{E}_1(\underline{\xi})\right)-$$
$$-F_{p0}\left(P_0(\mu\underline{\xi}),\,\tilde{E}_0(\mu\underline{\xi}),\,P_1(\mu\underline{\xi}),\,\tilde{E}_1(\mu\underline{\xi})\right)=$$
$$=\frac{1}{\mu}\frac{d}{d\underline{\xi}}\left(\left(P_0(\mu\underline{\xi})+\underline{P}_0(\underline{\xi})\right)\left(\tilde{E}_1(\mu\underline{\xi})+\underline{E}_1(\underline{\xi})\right)\right)-\frac{1}{\mu}\frac{d}{d\underline{\xi}}\left(P_0(\mu\underline{\xi})\tilde{E}_1(\mu\underline{\xi})\right)+$$
$$+\frac{1}{\mu}\frac{d}{d\underline{\xi}}\left(\left(P_1(\mu\underline{\xi})+\underline{P}_1(\underline{\xi})\right)\left(\tilde{E}_0(\mu\underline{\xi})+\underline{E}_0(\underline{\xi})\right)\right)-\frac{1}{\mu}\frac{d}{d\underline{\xi}}\left(P_1(\mu\underline{\xi})\tilde{E}_0(\mu\underline{\xi})\right)=$$
$$=\frac{1}{\mu}\frac{d}{d\underline{\xi}}\left(\underline{P}_0(\underline{\xi})\tilde{E}_1(\mu\underline{\xi})+P_0(\mu\underline{\xi})\underline{E}_1(\underline{\xi})+\underline{P}_0(\underline{\xi})\underline{E}_1(\underline{\xi})\right)+$$
$$+\frac{1}{\mu}\frac{d}{d\underline{\xi}}\left(\underline{P}_1(\underline{\xi})\tilde{E}_0(\mu\underline{\xi})+P_1(\mu\underline{\xi})\underline{E}_0(\underline{\xi})+\underline{P}_1(\underline{\xi})\underline{E}_0(\underline{\xi})\right);$$

$$\overline{F}_{p1}\left(\overline{\xi}\right)=F_{p1}\left(P_0\left(1-\mu\overline{\xi}\right)+\overline{P}_0\left(\overline{\xi}\right),\tilde{E}_0\left(1-\mu\overline{\xi}\right)+\overline{E}_0\left(\overline{\xi}\right),P_1\left(1-\mu\overline{\xi}\right)+\overline{P}_1\left(\overline{\xi}\right),\tilde{E}_1\left(1-\mu\overline{\xi}\right)+\overline{E}_1\left(\overline{\xi}\right)\right)-$$

$$-F_{p1}\left(P_0\left(1-\mu\overline{\xi}\right),\tilde{E}_0\left(1-\mu\overline{\xi}\right),P_1\left(1-\mu\overline{\xi}\right),\tilde{E}_1\left(1-\mu\overline{\xi}\right)\right)=$$

$$=-\frac{1}{\mu}\frac{d}{d\overline{\xi}}\left(\left(P_0\left(1-\mu\overline{\xi}\right)+\overline{P}_0\left(\overline{\xi}\right)\right)\left(\tilde{E}_1\left(1-\mu\overline{\xi}\right)+\overline{E}_1\left(\overline{\xi}\right)\right)\right)+\frac{1}{\mu}\frac{d}{d\overline{\xi}}\left(P_0\left(1-\mu\overline{\xi}\right)\tilde{E}_1\left(1-\mu\overline{\xi}\right)\right)-$$

$$-\frac{1}{\mu}\frac{d}{d\overline{\xi}}\left(\left(P_1\left(1-\mu\overline{\xi}\right)+\overline{P}_1\left(\overline{\xi}\right)\right)\left(\tilde{E}_0\left(1-\mu\overline{\xi}\right)+\overline{E}_0\left(\overline{\xi}\right)\right)\right)+\frac{1}{\mu}\frac{d}{d\overline{\xi}}\left(P_1\left(1-\mu\overline{\xi}\right)\tilde{E}_0\left(1-\mu\overline{\xi}\right)\right)=$$

$$=-\frac{1}{\mu}\frac{d}{d\overline{\xi}}\left(\overline{P}_0\left(\overline{\xi}\right)\tilde{E}_1\left(1-\mu\overline{\xi}\right)+P_0\left(1-\mu\overline{\xi}\right)\overline{E}_1\left(\overline{\xi}\right)+\overline{P}_0\left(\overline{\xi}\right)\overline{E}_1\left(\overline{\xi}\right)\right)-$$

$$-\frac{1}{\mu}\frac{d}{d\overline{\xi}}\left(\overline{P}_1\left(\overline{\xi}\right)\tilde{E}_0\left(1-\mu\overline{\xi}\right)+P_1\left(1-\mu\overline{\xi}\right)\overline{E}_0\left(\overline{\xi}\right)+\overline{P}_1\left(\overline{\xi}\right)\overline{E}_0\left(\overline{\xi}\right)\right).$$

Невідомі $N_l\left(x\right)$, $P_l\left(x\right)$, $\tilde{E}_l\left(x\right)$, $\underline{N}_l\left(\underline{\xi}\right)$, $\underline{P}_l\left(\underline{\xi}\right)$, $\underline{E}_l\left(\underline{\xi}\right)$, $\overline{N}_l\left(\overline{\xi}\right)$, $\overline{P}_l\left(\overline{\xi}\right)$, $\overline{E}_l\left(\overline{\xi}\right)$ пропонуємо шукати у вигляді асимптотичних рядів:

$$\begin{pmatrix} n_l\left(x,\mu\right)\\ p_l\left(x,\mu\right)\\ E_l\left(x,\mu\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum\limits_{i=0}^{m}\mu^i n_{li}\left(x\right)\\ \sum\limits_{i=0}^{m}\mu^i p_{li}\left(x\right)\\ \sum\limits_{i=0}^{m}\mu^i E_{li}\left(x\right)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\sum\limits_{i=0}^{m}\mu^i \underline{N}_{li}\left(\underline{\xi}\right)\\ \sum\limits_{i=0}^{m}\mu^i \underline{P}_{li}\left(\underline{\xi}\right)\\ \sum\limits_{i=-1}^{m}\mu^i \underline{E}_{li}\left(\underline{\xi}\right)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\sum\limits_{i=0}^{m}\mu^i \overline{N}_{li}\left(\overline{\xi}\right)\\ \sum\limits_{i=0}^{m}\mu^i \overline{P}_{li}\left(\overline{\xi}\right)\\ \sum\limits_{i=-1}^{m}\mu^i \overline{E}_{li}\left(\overline{\xi}\right)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}R_{\ln(m)}\left(x,\mu\right)\\ R_{lp(m)}\left(x,\mu\right)\\ R_{lE(m)}\left(x,\mu\right)\end{pmatrix}, \tag{13}$$

де $R_{lE(m)}\left(x,\mu\right)$, $R_{\ln(m)}\left(x,\mu\right)$, $R_{lp(m)}\left(x,\mu\right)$ – залишкові члени.

Виконаємо підстановку (13) у (12.1 – 12.5) та відповідні граничні умови з наступним розкладом отриманих рівнянь за степенями малого параметра μ. Аналогічний алгоритм перетворень застосовуємо до граничних умов (6), (8). В результаті прирівнювання членів рівняння з однаковими степенями малого параметра отримаємо наступну послідовність задач для визначення головних членів асимптотики:

$$\begin{cases} p_{0,0}\left(x\right)-n_{0,0}\left(x\right)=0,\\ \dfrac{d^2n_{0,0}\left(x\right)}{dx^2}-A_n n_{0,0}\left(x\right)=-\dfrac{d}{dx}\left(n_{0,0}\left(x\right)E_{0,0}\left(x\right)\right),\\ \dfrac{d^2p_{0,0}\left(x\right)}{dx^2}-A_p p_{0,0}\left(x\right)=\dfrac{d}{dx}\left(p_{0,0}\left(x\right)E_{0,0}\left(x\right)\right);\end{cases}$$

$$\left.\frac{dn_{0,0}\left(x\right)}{dx}-\gamma_n w n_{0,0}\left(x\right)\right|_{x=0}=\frac{J}{eD_n}\frac{w}{N_i},\quad \left.-\frac{dp_{0,0}\left(x\right)}{dx}-\gamma_p w p_{0,0}\left(x\right)\right|_{x=1}=\frac{J}{eD_p}\frac{w}{N_i}; \tag{14.1}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{E}_{0,-1}\left(\underline{\xi}\right)}{d\underline{\xi}}=\underline{P}_{0,0}\left(\underline{\xi}\right)-\underline{N}_{0,0}\left(\underline{\xi}\right),\\ \dfrac{d^2\underline{N}_{0,0}\left(\underline{\xi}\right)}{d\underline{\xi}^2}=-\dfrac{d}{d\underline{\xi}}\left(\left(n_{0,0}\left(0\right)+\underline{N}_{0,0}\left(\underline{\xi}\right)\right)\underline{E}_{0,-1}\left(\underline{\xi}\right)\right),\\ \dfrac{d^2\underline{P}_{0,0}\left(\underline{\xi}\right)}{d\underline{\xi}^2}=\dfrac{d}{d\underline{\xi}}\left(\left(p_{0,0}\left(0\right)+\underline{P}_{0,0}\left(\underline{\xi}\right)\right)\underline{E}_{0,-1}\left(\underline{\xi}\right)\right);\end{cases}$$

$$\lim_{\underline{\xi}\to\infty}\underline{E}_{0,-1}\left(\underline{\xi}\right)=E_0^*\left(U\right),\quad \left.\frac{d\underline{N}_{0,0}\left(\underline{\xi}\right)}{d\underline{\xi}}\right|_{\underline{\xi}=0}=0,\quad \lim_{\underline{\xi}\to\infty}\underline{N}_{0,0}\left(\underline{\xi}\right)=0,\quad \left.\frac{d\underline{P}_{0,0}\left(\underline{\xi}\right)}{d\underline{\xi}}\right|_{\underline{\xi}=0}=0,\quad \lim_{\underline{\xi}\to\infty}\underline{P}_{0,0}\left(\underline{\xi}\right)=0; \tag{14.2}$$

$$\begin{cases} -\dfrac{d\overline{E}_{0,-1}\left(\overline{\xi}\right)}{d\overline{\xi}} = \overline{P}_{0,0}\left(\overline{\xi}\right) - \overline{N}_{0,0}\left(\overline{\xi}\right), \\ \dfrac{d^2\overline{N}_{0,0}\left(\overline{\xi}\right)}{d\overline{\xi}^2} = \dfrac{d}{d\overline{\xi}}\left(\left(n_{0,0}(1) + \overline{N}_{0,0}\left(\overline{\xi}\right)\right)\overline{E}_{0,-1}\left(\overline{\xi}\right)\right), \\ \dfrac{d^2\overline{P}_{0,0}\left(\overline{\xi}\right)}{d\overline{\xi}^2} = -\dfrac{d}{d\overline{\xi}}\left(\left(p_{0,0}(1) + \overline{P}_{0,0}\left(\overline{\xi}\right)\right)\overline{E}_{0,-1}\left(\overline{\xi}\right)\right); \end{cases}$$

$$\lim_{\overline{\xi}\to\infty} \overline{E}_{0,-1}\left(\overline{\xi}\right) = E_0^*(U), \quad \left.\frac{d\overline{N}_{0,0}\left(\overline{\xi}\right)}{d\overline{\xi}}\right|_{\overline{\xi}=1} = 0, \quad \lim_{\overline{\xi}\to\infty} \overline{N}_{0,0}\left(\overline{\xi}\right) = 0, \quad \left.\frac{d\overline{P}_{0,0}\left(\overline{\xi}\right)}{d\overline{\xi}}\right|_{\overline{\xi}=1} = 0, \quad \lim_{\overline{\xi}\to\infty} \overline{P}_{0,0}\left(\overline{\xi}\right) = 0; \qquad (14.3)$$

$$\begin{cases} p_{1,0}(x) - n_{1,0}(x) = 0, \\ \dfrac{d^2 n_{1,0}(x)}{dx^2} - A_n^* n_{1,0}(x) = -\dfrac{d}{dx}\left(n_{0,0}(x) E_{1,0}(x) + n_{1,0}(x) E_{0,0}(x)\right), \\ \dfrac{d^2 p_{1,0}(x)}{dx^2} - A_p^* p_{1,0}(x) = \dfrac{d}{dx}\left(p_{0,0}(x) E_{1,0}(x) + p_{1,0}(x) E_{0,0}(x)\right); \end{cases}$$

$$\left.\frac{dn_{1,0}(x)}{dx} - \gamma_n w n_{1,0}(x)\right|_{x=0} = \frac{J_m}{eD_n}\frac{w}{N_i}, \quad \left.-\frac{dp_{1,0}(x)}{dx} - \gamma_p w p_{1,0}(x)\right|_{x=1} = \frac{J_m}{eD_p}\frac{w}{N_i}; \qquad (14.4)$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{E}_{1,-1}\left(\underline{\xi}\right)}{d\underline{\xi}} = \underline{P}_{1,0}\left(\underline{\xi}\right) - \underline{N}_{1,0}\left(\underline{\xi}\right), \\ \dfrac{d^2\underline{N}_{1,0}\left(\underline{\xi}\right)}{d\underline{\xi}^2} = -\dfrac{d}{d\underline{\xi}}\left(\left(n_{0,0}(0) + \underline{N}_{0,0}\left(\underline{\xi}\right)\right)\underline{E}_{1,-1}\left(\underline{\xi}\right) + \left(n_{1,0}(0) + \underline{N}_{1,0}\left(\underline{\xi}\right)\right)\underline{E}_{0,-1}\left(\underline{\xi}\right)\right), \\ \dfrac{d^2\underline{P}_{1,0}\left(\underline{\xi}\right)}{d\underline{\xi}^2} = \dfrac{d}{d\underline{\xi}}\left(\left(p_{0,0}(0) + \underline{P}_{0,0}\left(\underline{\xi}\right)\right)\underline{E}_{1,-1}\left(\underline{\xi}\right) + \left(p_{1,0}(0) + \underline{P}_{1,0}\left(\underline{\xi}\right)\right)\underline{E}_{0,-1}\left(\underline{\xi}\right)\right); \end{cases}$$

$$\lim_{\underline{\xi}\to\infty} \underline{E}_{1,-1}\left(\underline{\xi}\right) = E_1^*(U_m), \quad \left.\frac{d\underline{N}_{1,0}\left(\underline{\xi}\right)}{d\underline{\xi}}\right|_{\underline{\xi}=0} = 0, \quad \lim_{\underline{\xi}\to\infty} \underline{N}_{1,0}\left(\underline{\xi}\right) = 0, \quad \left.\frac{d\underline{P}_{1,0}\left(\underline{\xi}\right)}{d\underline{\xi}}\right|_{\underline{\xi}=0} = 0, \quad \lim_{\underline{\xi}\to\infty} \underline{P}_{1,0}\left(\underline{\xi}\right) = 0; \qquad (14.5)$$

$$\begin{cases} -\dfrac{d\overline{E}_{1,-1}\left(\overline{\xi}\right)}{d\overline{\xi}} = \overline{P}_{1,0}\left(\overline{\xi}\right) - \overline{N}_{1,0}\left(\overline{\xi}\right), \\ \dfrac{d^2\overline{N}_{1,0}\left(\overline{\xi}\right)}{d\overline{\xi}^2} = \dfrac{d}{d\overline{\xi}}\left(\left(n_{0,0}(1) + \overline{N}_{0,0}\left(\overline{\xi}\right)\right)\overline{E}_{1,-1}\left(\overline{\xi}\right) + \left(n_{1,0}(1) + \overline{N}_{1,0}\left(\overline{\xi}\right)\right)\overline{E}_{0,-1}\left(\overline{\xi}\right)\right), \\ \dfrac{d^2\overline{P}_{1,0}\left(\overline{\xi}\right)}{d\overline{\xi}^2} = -\dfrac{d}{d\overline{\xi}}\left(\left(p_{0,0}(1) + \overline{P}_{0,0}\left(\overline{\xi}\right)\right)\overline{E}_{1,-1}\left(\overline{\xi}\right) + \left(p_{1,0}(1) + \overline{P}_{1,0}\left(\overline{\xi}\right)\right)\overline{E}_{0,-1}\left(\overline{\xi}\right)\right); \end{cases}$$

$$\lim_{\overline{\xi}\to\infty} \overline{E}_{1,-1}\left(\overline{\xi}\right) = E_1^*(U_m), \quad \left.\frac{d\overline{N}_{1,0}\left(\overline{\xi}\right)}{d\overline{\xi}}\right|_{\overline{\xi}=1} = 0, \quad \lim_{\overline{\xi}\to\infty} \overline{N}_{1,0}\left(\overline{\xi}\right) = 0, \quad \left.\frac{d\overline{P}_{1,0}\left(\overline{\xi}\right)}{d\overline{\xi}}\right|_{\overline{\xi}=1} = 0 \quad \lim_{\overline{\xi}\to\infty} \overline{P}_{1,0}\left(\overline{\xi}\right) = 0. \qquad (14.6)$$

Крайові задачі (14.1) – (14.6) утворюють рекурентну послідовність для визначення розподілів концентрації носіїв заряду та напруженості електричного поля в активній області $p-i-n-$діода у вигляді асимптотичних рядів (13). Аналогічну форму мають постановки задач для пошуку 1-го і наступних членів асимптотики. У результаті приходимо до розщеплення вихідної задачі, що забезпечує можливість проведення розпаралелювання обчислювального процесу.

Аналіз результатів. Аналіз отриманої послідовності задач показує, що природу процесів в $i-$області

$p-i-n-$діода в основному описують головні члени асимптотики (як і в [9, 14]). Причому регулярні складові відображають поведінку дифузійно-дрейфових потоків носіїв заряду в об'ємі $i-$області структури, їх рекомбінацію та формування електронно-діркової плазми, а примежові поправки – формування області просторового заряду в зонах $p-i-$ та $i-n-$контактів, які, фактично, визначають розподіл електростатичного поля в активній області $p-i-n-$діодів та поверхневі рекомбінаційні процеси.

Розв'язки задач (14.1) – (14.6), як показано у роботі [14], можна знайти в аналітичному вигляді у випадку, коли спостерігається низький рівень інжекції. Відповідні співвідношення мають наступний вигляд:

$$p_{0,0}(x)=n_{0,0}(x)=C_1\exp\left(-\frac{x}{L}\right)+C_2\exp\left(\frac{x}{L}\right),$$

де

$$C_2=\frac{B\left(1+\gamma_n wL\right)-A\left(1+\gamma_p wL\right)e^{-\frac{1}{L}}}{\left(1+\gamma_n wL\right)\left(1+\gamma_p wL\right)e^{\frac{1}{L}}-\left(1-\gamma_n wL\right)\left(1+\gamma_p wL\right)e^{-\frac{1}{L}}},\quad C_1=\frac{-A\left(1+\gamma_n wL\right)+\left(1-\gamma_n wL\right)C_2}{\left(1+\gamma_n wL\right)},\quad A=\frac{J}{2eD_n}\frac{wL}{N_i},$$

$$B=-\frac{J}{eD_p}\frac{wL}{N_i},\quad \frac{1}{L^2}=\frac{1}{2}\left(A_n+A_p\right);$$

$$\underline{E}_{0,-1}(x)=-E_{0\infty}th\left(\frac{E_{0\infty}x}{2\mu}\right),\quad \underline{N}_{0,0}(x)=\frac{E_{0\infty}{}^2}{2}\left(1-th^2\left(\frac{E_{0\infty}x}{2\mu}\right)\right),\quad \underline{P}_{0,0}=0 \text{ при } 0\le x\le\frac{1}{2};$$

$$\overline{E}_{0,-1}(x)=-E_{0\infty}th\left(\frac{E_{20\infty}(1-x)}{2\mu}\right)\ \overline{P}_{0,0}(x)=\frac{E_{0\infty}{}^2}{2}\left(1-th^2\left(\frac{E_{0\infty}(1-x)}{2\mu}\right)\right),\quad \overline{N}_{0,0}=0 \text{ при } \frac{1}{2}\le x\le 1;$$

$E_{20\infty}$ – стала, яка має зміст напруженості силового поля в об'ємі активної області і визначається з умови:

$$\int_0^{1/2}E_{20\infty}th\left(\frac{E_{20\infty}x}{2\mu}\right)dx-\int_{1/2}^{1}E_{20\infty}th\left(\frac{E_{20\infty}(x-1)}{2\mu}\right)dx=U.$$

Відмітимо, що постановка задачі (14.1) та її розв'язок повністю співпадають з відповідними даними моделі амбіполярної дифузії [1, 2]. Результати розв'язання задач (14.1) – (14.3), які детально викладені у [14], підтверджуються даними якісного аналізу досліджуваної технічної системи та даними експериментальних досліджень [15].

Задача (14.4), що описує поведінку амплітуд коливань концентрацій носіїв заряду і напруженості електростатичного поля, такого ж типу, як і (14.1). Відмінність полягає у тому, що коефіцієнти рівняння A_n^*, A_p^* – комплексні. Відповідно, шукана функція буде також визначена на множині комплексних чисел:

$$p_{0,0}^*(x)=n_{0,0}^*(x)=C_1^*\exp\left(-\frac{x}{L^*}\right)+C_2^*\exp\left(\frac{x}{L^*}\right),$$

де

$$C_2^*=\frac{B^*\left(1+\gamma_n wL^*\right)-A^*\left(1+\gamma_p wL^*\right)e^{-\frac{1}{L^*}}}{\left(1+\gamma_n wL^*\right)\left(1+\gamma_p wL^*\right)e^{\frac{1}{L^*}}-\left(1-\gamma_n wL^*\right)\left(1+\gamma_p wL^*\right)e^{-\frac{1}{L^*}}};\quad C_1^*=\frac{-A^*\left(1+\gamma_n wL^*\right)+\left(1-\gamma_n wL^*\right)C_2^*}{\left(1+\gamma_n wL^*\right)};$$

$$A^*=\frac{J_m}{2eD_n}\frac{wL^*}{N_i};\quad B^*=-\frac{J_m}{eD_p}\frac{wL^*}{N_i};\quad \frac{1}{L^*}=\frac{1}{2}\sqrt{\left(A_n^*+A_p^*\right)}.$$

Відмітимо, що фізичний зміст процесу (традиційний), зокрема, наявність просторових осциляцій у структурі розв'язку (що обумовлено інерційними процесами у електронно-дірковій плазмі) забезпечується дійсною складовою отриманого розв'язку. Характер осциляцій залежить від параметрів прикладеного гармонічного сигналу (частоти коливань, амплітудами прикладених струму і напруги). За низькочастотного гармонічного сигналу

$$\omega<<\frac{1}{\tau_n^*},\frac{1}{\tau_p^*}$$

просторові осциляції плазми незначні.

Процедура розв'язання задачі (14.5) (аналогічно (14.6)) у режимі низького рівня інжекції приводить до розгляду крайової задачі для звичайного диференціального рівняння другого порядку з змінними коефіцієнтами наступного виду:

$$\frac{d^2 \underline{E}_{1,-1}\left(\underline{\xi}\right)}{d\underline{\xi}^2}+\underline{E}_{0,-1}\left(\underline{\xi}\right)\frac{d\underline{E}_{1,-1}\left(\underline{\xi}\right)}{d\underline{\xi}}-\underline{N}_{0,0}\left(\underline{\xi}\right)\underline{E}_{1,-1}\left(\underline{\xi}\right)=0\,,\;\; \underline{E}_{1,-1}\Big|_{x=0}=0\,,\; \lim_{\underline{\xi}\to\infty}\underline{E}_{1,-1}\left(\underline{\xi}\right)=E_1^*\left(U_m\right),$$

структура якої вказує на осцилюючий у просторі характер її розв'язку.

Висновки. У результаті виконаних досліджень запропоновано методику проведення декомпозиції нелінійної задачі формування електронно-діркової плазми, що ґрунтується на розвитку методів теорії збурень. Вихідна нелінійна нестаціонарна сингулярно збурена крайова задача для системи рівнянь неперервності електронного і діркового струмів та рівняння Пуассона приводиться до рекурентної послідовності лінійних стаціонарних крайових задач, які розв'язуються аналітико-числовими методами. Виділення примежових поправок у розв'язку задачі забезпечує, зокрема, на відміну від класичного наближення амбіполярної дифузії, більш адекватний опис поведінки напруженості електричного поля в активній області $p-i-n-$діодів. Отримані результати досліджень проливають світло на особливості формування імпедансних характеристик $p-i-n-$структур, глибше розкривають природу фізичних процесів у досліджуваній технічній системі та спрямовані на подальше удосконалення методики моделювання та проектування відповідних керуючих пристроїв напівпровідникової електроніки.

Список літератури

1. *Sze S.*, *Kwok K.* Physics of Semiconductor Devices. – New York : Wiley-Interscience, 2006. – 815 p. DOI: 10.1002/0470068329.
2. *Адирович Э. И.*, *Карагеоргий-Алкалаев П. М.*, *Лейдерман А. Ю.* Токи двойной инжекции в полупроводниках. Под ред. Гальперина. – М. : Советское радио, 1978. – 320 с.
3. *Bomba A. Ya.*, *Moroz I. P.*, *Bojchura M. V.* The optimization of the shape and size of the injection contacts of the integrated $p-i-n-$ structures on the base of using the conformal mapping method // Radio Electronics, Computer Science, Control. – 2021. – № 1. – pp. 14 – 27.
4. *Kumar M. J.*, *Hahmady S.*, *Gale R.*, *Bayne S.* Charge Plasma High Voltage PIN Diode Investigation, 2018 // IEEE International Power Modulator and High Voltage Conference (IPMHVC). – Jackson, WY, USA, 2018. – pp. 117 – 121. DOI: 10.1109/IPMHVC.2018.8936701.
5. *Вишик М. И.*, *Люстерник Л. А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // УМН. – 1957. – №. 12(5). – С. 3 – 122.
6. *Bomba A.*, *Baranovsky S.*, *Blavatska O.*, *Bachyshyna L.* Infectious disease model generalization based on diffuse perturbations under conditions of body's temperature reaction // Computers in Biology and Medicine. – 2022. – Vol. 146. – pp. 55 – 61. DOI: 10.1016/j.compbiomed. 2022.105561.
7. *Smith D. R.* Singular-Perturbation Theory. An Introduction with Applications. – Cambridge : Cambridge Univ. Press, 1985. – 520 p.
8. *Vasil'eva A. B.*, *Butusov V. F.*, *Kalachev L. V.* The Boundary Function Method for Singular Perturbation Problems. – SIAM, Philadelphia, 1995. – 212 p. DOI: https://doi.org/10.1137/1.9781611970784.
9. *Белянин М. П.* Об асимптотическом решении одной модели $p-n-$перехода // Вычислительная математика и математическая физика. – 1986. – Т. 26. – № 2. – С. 306 – 311.
10. *Васильева А. Б.*, *Стельмах В. Г.* Сингулярно возмущенные системы теории полупроводниковых приборов // Вычислительная математика и математическая физика. – 1977. – Т. 17. – № 2. – С. 339 – 348.
11. *Белянин М. П.* О численно-аналитическом решении одной нестационарной сингулярно возмущенной задачи из теории полупроводниковых диодов // Дифференциальные уравнения. – 1985. – Вып. 21 (8). – С. 1436 – 1440.
12. *Bambusi D.* Perturbation Theory for PDEs. In: Gaeta, G. (eds) Perturbation Theory. Encyclopedia of Complexity and Systems Science Series. – Springer, New York, NY, 2009. – pp. 229 – 246. DOI: 10.1007/978-1-0716-2621-4_401.
13. *Bomba A.*, *Moroz I.* Analysis of Nonlinear Processes in the P-I-N Diodes Plasma by the Perturbation Theory Methods // 13th International Conference on Advan-ced Computer Infor-mation Technologies, ACIT-2023. – Wroclaw, Poland, 2023. – pp. 117 – 120.
14. *Бомба А. Я.*, *Мороз І. П.* Чисельно-асимптотичний метод розв'язання сингулярно збурених модельних задач про стаціонарний розподіл носіїв заряду в активній області P-I-N-діодів // Вісник Національного університету водного господарства та природокористування. Серія: Технічні науки. – Рівне. –2022. – Вип. 1(97). – С. 291 – 306.
15. *Усанов Д. А.*, *Горбатов С. С.*, *Кваско В. Ю.*, *Фадеев А. В.*, *Калямин А. А.* Пространственные осцилляции электрического поля и плотности заряда в кремниевом $p-i-n-$ диоде // Письма в ЖТФ. – 2014. – Том 40. – Вып. 21. – С. 104 – 110.

References (transliterated)

1. Sze S., Kwok K. *Physics of Semiconductor Devices*. New York, Wiley-Interscience, 2006. 815 p. DOI: 10.1002/0470068329.
2. Adirovich E. I., Karageorgii-Alkalaev P. M., Leiderman A. Iu. *Toki dvoynoy inzhektsii v poluprovodnikakh* [Double injection currents in semiconductors]. Moscow, Sov. Radio Publ., 1978. 320 p.
3. Bomba A. Ya., Moroz I. P., Bojchura M. V. The optimization of the shape and size of the injection contacts of the integrated $p-i-n-$ structures on the base of using the conformal mapping method. *Radio Electronics, Computer Science*, *Control*. 2021, no. 1, pp. 14–27.
4. Kumar M. J., Hahmady S., Gale R., Bayne S. Charge Plasma High Voltage PIN Diode Investigation, 2018. *IEEE International Power Modulator and High Voltage Conference (IPMHVC)*. Jackson, WY, USA, 2018, pp. 117–121. DOI: 10.1109/IPMHVC.2018.8936701.
5. Vishik M. I., Lusternik L. A. Regulyarnoe vyrogdenie i pogranichnyi sloi dlya linejnyh differentsyal'nyh uravnenii s malym parametrom [Regular degeneration and boundary layers for linear differential equations with small parameter]. *UMN* [Successes in mathematical sciences]. 1957, Vol. 12, issue 5 (77), pp. 3–122.
6. Bomba A., Baranovsky S., Blavatska O., Bachyshyna L. Infectious disease model generalization based on diffuse perturbations under conditions of body's temperature reaction. *Computers in Biology and Medicine.* 2022, vol. 146, pp. 55–61. DOI: 10.1016/j.compbiomed. 2022.105561.
7. Smith D. R. *Singular-Perturbation Theory. An Introduction with Applications*. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1985. 520 p.

8. Vasil'eva A. B., Butusov V. F. Kalachev L. V. *The Boundary Function Method for Singular Perturbation Problems*. SIAM, Philadelphia, 1995. 212 p. DOI: https://doi.org/10.1137/1.9781611970784.
9. Belyanin M. P. Ob asimptoticheskom reshenii odnoy modeli $p-n-$perekhoda [On the asymptotic solution of a p-n-junction model]. *Vychislitel'naya matematika i matematicheskaya fizika* [Computational mathematics and mathematical physics]. 1986, no. 26 (2), pp. 306 – 311.
10. Vasil'eva A. B., Stel'makh V. G. Singulyarno vozmushhennye sistemy teorii poluprovodnikovykh priborov [Singularly perturbed systems in the theory of semiconductors]. *Vychislitel'naya matematika i matematicheskaya fizika* [Computational mathematics and mathematical physics]. 1977, no. 17(2), pp. 339–348.
11. Belyanin M. P. O chislenno-asimptoticheskom reshenii odnoy nestatsyonarnoy singulyarno vozmushhennoy zadachi iz teorii poluprovodnikovykh priborov [On the numerical-asymptotic solution of a non-stationary singularly perturbate problem from the theory of semiconductor devices]. *Differentsial'nye uravneniya* [Differential Equations]. 1985, no. 21 (8), pp. 1436–1440.
12. Bambusi D. *Perturbation Theory for PDEs. In: Gaeta, G. (eds) Perturbation Theory. Encyclopedia of Complexity and Systems Science Series*. Springer, New York, NY, 2009. pp. 229–246. DOI: 10.1007/978-1-0716-2621-4_401.
13. Bomba A., Moroz I. Analysis of Nonlinear Processes in the P-I-N Diodes Plasma by the Perturbation Theory Methods. *2023 13th International Conference on Advan-ced Computer Infor-mation Technologies, ACIT-2023*. Wroclaw, Poland. 2023, pp. 117–120.
14. Bomba A., Moroz I. Chysel'no-asymptotychnyy metod rozv''yazannya syngulyarno zburenykh model'nykh zadach pro statsionarnyy rozpodil nosiyiv zaryadu v aktyvniy oblasti P-I-N-diodiv [The numerical-asymptotic method for solving singularly perturbed model problems on the stationary distribution of charge carriers in the active region of p-i-n-diodes]. *Visnyk Natsional'nogo universytetu vodnogo gospodarstva ta pryrodokorystuvannya. Seriya : Tekhnichni nauky* [Bulletin of the National University of Water and Environmental Engineering. Technical Sciences]. 2022, issue. 1(97), pp. 291–306.
15. Usanov D. A., Gorbatov S. S., Kvasko V. Yu., Fadeev A. V., Kalyamin A. A. Prostranstvennye ostsylyatsii electricheskogo polya i plotnosti zaryada v kremnievom $p-i-n-$ diode [Spatial oscillations of the electric field and charge density in a silicon $p-i-n-$ diode]. *Pis'ma v ZhTF* [Technical Physics Letters]. 2014, vol. 40, issue. 21, pp. 104–110.

Надійшла (received) 20.09.2023

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Бомба Андрій Ярославович – доктор технічних наук, професор, професор кафедри комп'ютерних наук та прикладної математики, Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне; тел.: (097) 346-18-90; e-mail: abomba@ukr.net.

Бомба Андрей Ярославович – доктор технических наук, профессор, профессор кафедры компьютерных наук и прикладной математики, Национальный университет водного хозяйства и природопользования, г. Ровно; тел.: (097) 346-18-90; e-mail: abomba@ukr.net.

Bomba Andrii Yaroslavovych – Doctor of Technical Sciences, Professor, Professor at the Department of Computer Science and Applied Mathematics, National University of Water and Environmental Engineering, Rivne; tel.: (097) 346-18-90; e-mail: abomba@ukr.net.

Мороз Ігор Петрович – кандидат фізико-математичних наук, доцент, докторант кафедри комп'ютерних наук та прикладної математики, Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне; тел.: (096) 721-91-24; e-mail: igor_moroz@yahoo.com.

Мороз Игорь Петрович – кандидат физико-математических наук, доцент, докторант кафедры компьютерных наук и прикладной математики, Национальный университет водного хозяйства и природопользования, г. Ровно; тел.: (096) 721-91-24; e-mail: igor_moroz@yahoo.com.

Moroz Igor Petrovych – PhD, As. Professor, Doctoral Student of the Department of Computer Science and Applied Mathematics, National University of Water and Environmental Engineering, Rivne; tel.: (096) 721-91-24; e-mail: igor_moroz@yahoo.com.