

Ю. Е. СУРГАНОВА, Ю. В. МІХЛІН

ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ НЕЛІНІЙНИХ НОРМАЛЬНИХ МОД КОЛИВАНЬ ДИСИПАТИВНОЇ СИСТЕМИ ПІД ВПЛИВОМ МАГНІТНОГО ПОЛЯ

У статті проведено дослідження динаміки коливальної системи, що складається з двох маятників, з'єднаних пружним зв'язком і які знаходяться в магнітному полі. Розглядається випадок, коли маси маятників суттєво відрізняються. За наявності різних зовнішніх факторів, таких як магнітні сили та навантаження, які є в інженерних системах, аналіз режимів коливань у нелінійних системах ускладнюється. У цій роботі проведено аналіз пов'язаної нелінійної нормальної моди коливань у системі, що розглядається. Досліджується вплив зміни параметрів системи, як при малих, так і при великих початкових кутах відхилення маятників, на цю моду коливань. Для аналізу коливальних режимів використовувалися як аналітичний метод, а саме метод багатьох масштабів, так і чисельне моделювання на основі методу Рунге-Кутта четвертого порядку. Використовуються такі початкові умови розрахунку коливального режиму, що були визначені аналітично. Моделювання включає побудову фазових діаграм, траєкторій у конфігураційному просторі та спектрів, що дозволяє оцінити динаміку системи, включаючи як регулярні, так і складні режими коливань. Для вивчення стійкості коливального режиму використовується чисельно-аналітичний метод, пов'язаний із критерієм стійкості за Ляпуновим. Стійкість мод коливань визначається шляхом оцінки ортогональних відхилень стосовно відповідних траєкторій моди у конфігураційному просторі. Отримано області нестійкості на площинах та у просторі параметрів системи.

Ключові слова: динаміка коливальної системи, магнітне поле, пов'язані маятники, магнітні сили, нелінійні нормальні моди коливань, метод багатьох масштабів, чисельне моделювання на основі методу Рунге – Кутта, стійкість.

Ю. Э. СУРГАНОВА, Ю. В. МИХЛИН

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ НОРМАЛЬНЫХ МОД КОЛЕБАНИЙ ДИССИПАТИВНОЙ СИСТЕМЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

В данной статье проведено исследование динамики колебательной системы, состоящей из двух маятников, связанных упругой связью и находящихся в магнитном поле. Рассматривается случай, когда массы маятников существенно различаются. При наличии различных внешних факторов, таких как магнитные силы и нагрузки, которые присутствуют в инженерных системах, анализ режимов колебаний в нелинейных системах усложняется. В данной работе проведен анализ связанной нелинейной нормальной моды колебаний в рассматриваемой системе. Исследуется влияние изменения параметров системы, как для малых, так и для больших начальных углов отклонения маятников, на этот режим колебаний. Для анализа использовались как аналитический метод, а именно, метод многих масштабов, так и численное моделирование на основе метода Рунге – Кутта четвертого порядка. Используются такие начальные условия для расчета колебательного режима, которые были определены аналитически. Моделирование включает построение фазовых диаграмм, траекторий в конфигурационном пространстве и спектров, что позволяет оценить динамику системы, включая как регулярные, так и сложные режимы колебаний. Для изучения устойчивости колебательных режимов используется численно-аналитический метод, связанный с критерием устойчивости по Ляпунову. Устойчивость моды колебаний определяется путем оценки ортогональных отклонений по отношению к соответствующим траекториям моды в конфигурационном пространстве. Получены области неустойчивости на плоскостях и в пространстве параметров системы.

Ключевые слова: динамика колебательной системы, магнитное поле, связанные маятники, магнитная сила, нелинейные нормальные моды колебаний, метод многих масштабів, численное моделирование на основе метода Рунге – Кутта, устойчивость.

Yu. E. SURHANOVA, Yu. V. MIKHLIN

INVESTIGATION OF STABILITY OF NONLINEAR NORMAL MODES OF DISSIPATIVE SYSTEM OSCILLATIONS UNDER INFLUENCE OF MAGNETIC FIELD

In the paper the dynamics of the vibrating system consisting of two pendulums connected by elastic coupling and located in a magnetic field is studied. A case is considered when masses of the pendulums differ significantly. Under the influence of various external factors, such as magnetic forces and loads, which are present in engineering systems, the analysis of vibration regimes in non-linear systems becomes more complex. Here the nonlinear normal connected vibration mode in a system under consideration is analyzed. We have investigated the influence of changes in system parameters on the vibration mode for both small and large initial angles of the pendulum deflection. Both the analytical method, namely, the method of many scales, and numerical simulations based on the fourth order Runge – Kutta method are used to analyze the vibration regimes. The initial conditions used to calculate this mode were determined analytically. The simulation includes construction of phase diagrams, trajectories in configuration space, and spectra, which allows us to evaluate the system dynamics, including both regular and complex regimes of vibrations. To study the stability of the vibration mode, a numerical-analytical method associated with the Lyapunov stability criterion is used. The stability of the mode is determined by assessing orthogonal deviations with respect to the corresponding modal trajectories in the configuration space. Regions of instability on planes and in the space of the system parameters are obtained.

Key words: system oscillation dynamics, magnetic field, coupled pendulums, magnetic forces, nonlinear normal vibration modes, multiple scales method, Runge–Kutta method based numerical modeling, stability.

Вступ. Математичний маятник – це важлива модель, яка часто використовується як в науці, так і в інженерії для вивчення важливих властивостей коливальних рухів, зокрема, в фізиці, теорії керування і робототехніці, розрахунку динаміки конструкцій, а також в інших задачах нелінійної динаміки. Наявність магнітного впливу суттєво ускладнює дослідження маятникових систем. В даній роботі динаміка моделі пов'язаних маятників у полі магнітних сил описується системою двох суттєво нелінійних диференціальних рівнянь, які досліджуються як аналітичним, так і чисельним методами. Розглядається як побудова нелінійних нормальних мод коливань (ННМ), так і дослідження їх стійкості.

Аналіз останніх досліджень. Теоретичні та експериментальні дослідження, які стосуються динаміки двох поєднаних маятників з рівними масами у магнітному полі, освітлено у статті [1]. Дослідження мод коливань в такій системі без врахування впливу дисипативних сил для випадку, коли маси цих з'єднаних маятників істотно

розрізняються, виконано в [2, 3]. Зазначимо, що відтепер різноманітні аспекти теорії ННМ та її численні застосування представлено в багатьох публікаціях. Основні елементи цієї теорії та посилання на публікації можна знайти, зокрема, в оглядах [4 – 6] і книзі [7]. Можна також відзначити, що *проблема локалізації коливань* дуже важлива як для теорії, так і для інженерної практики, і досліджувалася в останні десятиліття в численних публікаціях, серед яких ми виділяємо публікації [8 – 10].

Суттєва нелінійність, присутня в системі, приводить до необхідності застосування *асимптотичних методів* для аналізу мод коливань. Використано *метод багатьох масштабів*, що може бути успішно застосований саме до дисипативних систем, а також *чисельне моделювання*. Крім побудови пов'язаної моди коливань досліджено її стійкість, а також зроблено висновки про вплив зміни параметрів системи на її динаміку.

Постановка задачі та математична модель. У статті досліджується модель руху пружно пов'язаних маятників (рис. 1, а) під впливом магнітного збудження (рис. 2). Рис. 1, б зображує модель одного маятника. Відповідні рівняння руху представлено у вигляді *системи диференціальних рівнянь (СДР)* (1), де проведено розкладення синусів кутів в ряди зі збереженням перших двох членів.

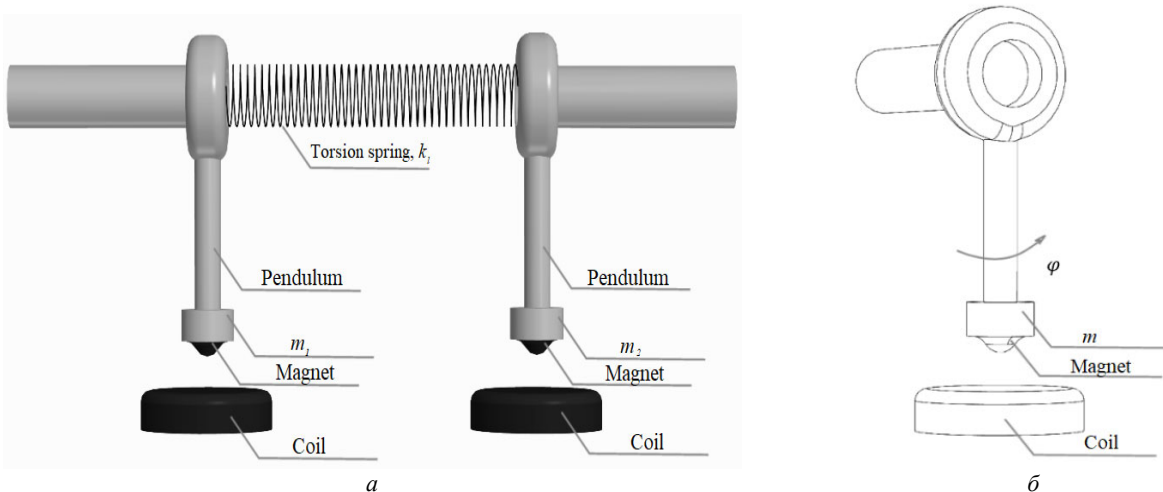


Рис. 1 – Система пов'язаних маятників: а – двох пружно пов'язаних маятників; б – модель одного маятника.

$$\begin{cases} \varepsilon \mu \ddot{\varphi}_1 = \varepsilon \gamma M_{mag1}^*(\varphi_1) - \varepsilon C_1^* \operatorname{sgn}(\dot{\varphi}_1) - \varepsilon C_e^*(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) - \varepsilon \mu r^* \left(\varphi_1 - \frac{\varepsilon}{6} \varphi_1^3 \right) - k_l^*(\varphi_1 - \varphi_2); \\ \ddot{\varphi}_2 = \varepsilon \gamma M_{mag2}^*(\varphi_2) - \varepsilon C_2^* \operatorname{sgn}(\dot{\varphi}_2) - \varepsilon C_e^*(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1) - r^* \left(\varphi_2 - \frac{\varepsilon}{6} \varphi_2^3 \right) - k_l^*(\varphi_2 - \varphi_1), \end{cases} \quad (1)$$

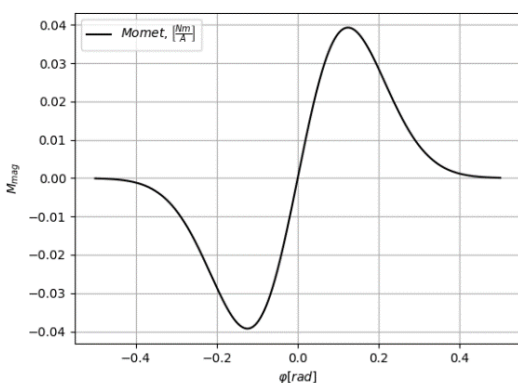


Рис. 2 – Магнітний вплив.

де μ – відношення мас двох маятників; ε – умовний малий параметр; m – маса більшого маятника; $k_l^* = \frac{k_l}{I}$, де k_l – жорсткість зв'язуючого пружного елемента; I – момент інерції більшого маятника; $k_l^*(\varphi_1 - \varphi_2)$ – момент крутильної деформації пружного елемента; γ – коефіцієнт інтенсивності магнітного збудження;

$$M_{mag}^*(\varphi_{1,2}) = \frac{M_{mag}(\varphi_{1,2})}{I}, \quad M_{mag}(\varphi_{1,2}) = \frac{2a}{b} \varphi_{1,2} e^{-\frac{\varphi_{1,2}^2}{b}} -$$

момент магнітних сил; $r^* \left(\varphi_{1,2} - \frac{\varepsilon}{6} \varphi_{2,1}^3 \right)$ – наближений по-

вертаючий момент відповідного маятника; $r^* = \frac{r}{I}$; $C_{1,2}^* =$

$= \frac{C_{1,2}}{I}$, $C_{1,2}$ – коефіцієнт опору сил в'язкого повітря; $C_e^* = \frac{C_e}{I}$ – коефіцієнт демпфуючого моменту, створеного пружним елементом; ε – умовний малий параметр, що характеризує малість тих складових рівнянь, де він розташований. В подальших чисельних розрахунках прийнято $\varepsilon = 1$.

Параметри СДР (1) наступні: $a = 8.036 \cdot 10^{-3} \text{ (Nm} \cdot \text{rad}^{-1} \cdot \text{A}^{-1})$, $b = 30.81 \cdot 10^{-3} \text{ (Nm} \cdot \text{rad}^{-1} \cdot \text{A}^{-1})$, $k_l =$

$= 3.999 \cdot 10^{-3} (Nm \cdot rad^{-1})$, $I = 6.787 \cdot 10^{-4} (kg \cdot m^2)$, $r = 5.84 \cdot 10^{-2} (Nm)$, $C_1 = 2.5 \cdot 10^{-4} (Nm)$, $C_2 = 1.6 \cdot 10^{-4} (Nm)$, $C_e = 9.615 \cdot 10^{-6} (Nm \cdot rad^{-1})$. Задані параметри отримано з роботи [1]. Відмітимо, що в (1) одиниці виміру параметрів такі: φ – в rad , ε та γ – безрозмірні величини. У чисельних розрахунках без втрати загальності використовуємо нульові початкові швидкості: $\dot{\varphi}_1(0) = \dot{\varphi}_2(0) = 0$. Відповідні початкові кути, що відповідають шуканій ННМ, можна отримати після побудови цього періодичного розв’язку в аналітичній формі.

Як у статтях [2 – 4], представимо розв’язок СДР (1) у вигляді:

$$\varphi_1 = \varphi_{10} + \varepsilon \varphi_{11} + O(\varepsilon^2), \quad \varphi_2 = \varphi_{20} + \varepsilon \varphi_{21} + O(\varepsilon^2), \quad (2)$$

де φ_{10} , φ_{20} – розв’язок породжувальної лінійної системи; φ_{11} , φ_{21} – розв’язок першого наближення за малим параметром ε . Використовується метод багатьох масштабів [5]. У відповідності до цього методу вводимо часові масштаби, а саме:

$$T_0 = \tau, \quad T_1 = \varepsilon \tau, \quad \tau = \omega_0 t, \quad (3)$$

де T_0 – швидкий час; T_1 – повільний час; ω_0 – власна частота.

Дослідження синфазної моди коливань. Виконуючи стандартні перетворення методу багатьох масштабів, отримаємо системи рівнянь (4) та (5), відповідні двом першим наближенням за малим параметром ε :

$$\varepsilon^0 : \begin{cases} -k_l^* (\varphi_{10} - \varphi_{20}) = 0, \\ \omega_0^2 \frac{\partial^2 \varphi_{20}}{\partial T_0^2} = -r^* \varphi_{20} - k_l^* (\varphi_{20} - \varphi_{10}). \end{cases} \quad (4)$$

$$\varepsilon^1 : \begin{cases} \mu \omega_0^2 \frac{\partial^2 \varphi_{20}}{\partial T_0^2} = \gamma M_{mag1}^* (\varphi_{10}) - C_1^* \operatorname{sgn} \left(\frac{\partial \varphi_{10}}{\partial T_0} \right) - C_e^* \left(\frac{\partial \varphi_{10}}{\partial T_0} - \frac{\partial \varphi_{20}}{\partial T_0} \right) - \mu r^* \varphi_{10} - k_l^* (\varphi_{11} - \varphi_{21}); \\ \omega_0^2 \left(2 \frac{\partial^2 \varphi_{20}}{\partial T_0 \partial T_1} + \frac{\partial^2 \varphi_{21}}{\partial T_0^2} \right) = \gamma M_{mag2}^* (\varphi_{20}) - C_2^* \operatorname{sgn} \left(\frac{\partial \varphi_{20}}{\partial T_0} \right) - C_e^* \left(\frac{\partial \varphi_{20}}{\partial T_0} - \frac{\partial \varphi_{10}}{\partial T_0} \right) - r^* \left(\varphi_{21} - \frac{1}{6} \varphi_{20}^3 \right) - k_l^* (\varphi_{21} - \varphi_{11}). \end{cases} \quad (5)$$

Розв’язком (4) є $\varphi_{10} = \varphi_{20} = A_1(T_1) \cos(T_0 + \nu)$, що відповідає *синфазній пов’язаній формі коливань*. Відповідно власна частота $\omega_0^2 = r^*$. Щоб запобігти появі *секулярних доданків* у системі рівнянь (5), виключаємо доданки, що містять функції $\cos(T_0 + \nu)$ та $\sin(T_0 + \nu)$ у правій частині цих рівнянь, і в результаті отримуємо модуляційні рівняння (6) та (7):

$$\cos(T_0 + \nu) : 2\omega_0^2 A_1(T_1) \frac{d\nu(T_1)}{dT_1} + \frac{r^* A_1^3(T_1)}{8} + \mu \omega_0^2 A_1(T_1) - \mu r^* A_1(T_1) = 0; \quad (6)$$

$$\sin(T_0 + \nu) : 2\omega_0^2 \frac{dA_1(T_1)}{dT_1} = 0. \quad (7)$$

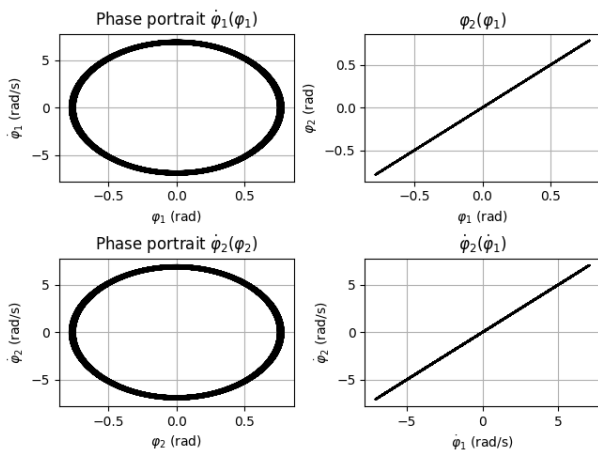


Рис. 3 – Порівняння чисельного та аналітичного розрахунку: а – фазовий портрет та криві у конфігураційному просторі.

Звідси випливає, що $A_1 = const$, $\nu = -\frac{A_1^2}{16} T_1$.

Порівняємо чисельний розрахунок з аналітичним, зафіксувавши параметри наступним чином:

$$\varphi_1(0) = 45^\circ, \quad \varphi_2(0) = 45^\circ, \quad \mu = 0.1, \quad \gamma = 10^{-3},$$

$$k_l = 3.999 \cdot 10^{-3} \left(\frac{Nm}{rad} \right), \quad C_1 = 2.5 \cdot 10^{-6} (Nm),$$

$$C_2 = 1.6 \cdot 10^{-6} (Nm), \quad C_e = 9.615 \cdot 10^{-6} \left(\frac{Nm}{rad} \right).$$

Результат порівняння зображено на рис. 3 (рис. 3, а: фазовий портрет та криві у конфігураційному просторі, рис. 3, б: порівняння отриманих розрахунків, рис. 3, в: спектр моди коливань).

Досліджуючи стійкість системи (1), окрім вже зазначених параметрів, задаємо $A_1 \in [1, 60]^\circ$, $\gamma \in [10^{-6}, 10^{-2}]$,

$\mu \in [0.01, 0.25]$. В силу симетрії системи ми можемо розглядати лише половину діапазону, тобто додатні значення кутів маятників. Кожний із зазначених інтервалів параметрів містить по 25 рівновіддалених точок. Проведемо аналіз стійкості системи в залежності від параметрів A_1 , μ , γ шляхом чисельно-аналітичного підходу, який відповідає чисельній реалізації *критерію стійкості за Ляпуновим*, що було запропоновано та описано в роботі [5].

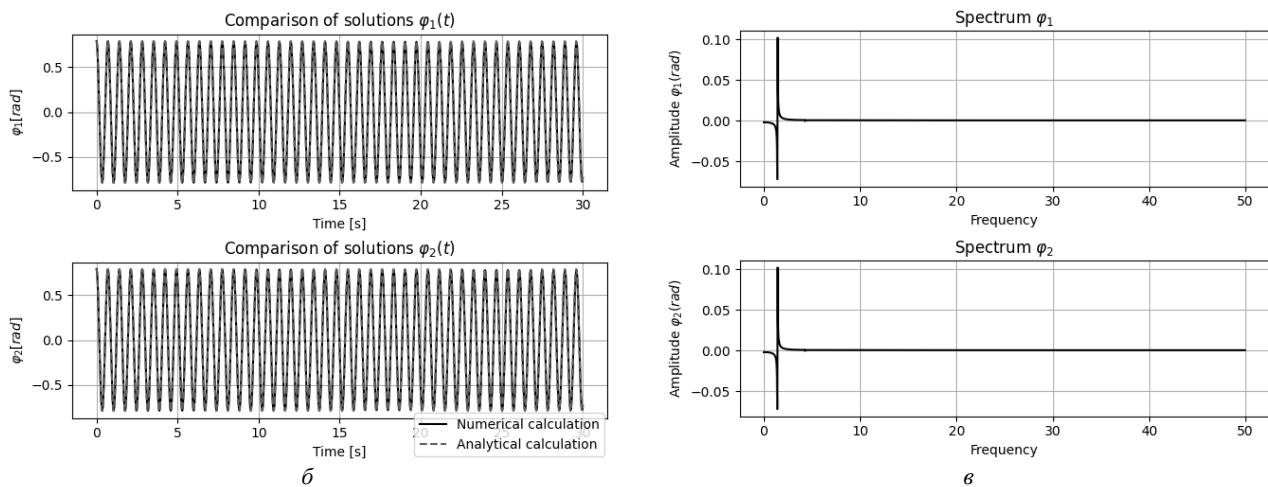


Рис. 3 – Порівняння чисельного та аналітичного розрахунку, амплітудно-частотна характеристика, криві на фазовій площині та у конфігураційному просторі: б – порівняння отриманих розрахунків; в – спектр моди коливань.

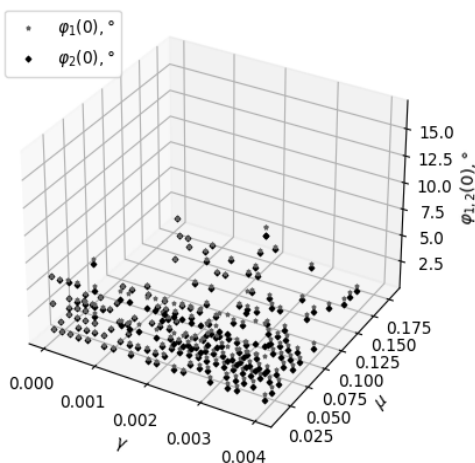


Рис. 4 – Области нестійкості синфазної моди у просторі параметрів $\varphi_{1,2}(0)$, μ та γ .

Стійкість моди коливань визначається ортогональними відхиленнями від її траєкторії в конфігураційному просторі. Початкові умови для відхилень від траєкторії визначаються через початкові значення кутів двох маятників на формі коливань як $\tilde{\varphi}_{1,2}(0) = 1.01\varphi_{1,2}(0)$. Потім розраховуються вказані відхилення при зміні часу. Нестійкість моди коливань фіксуємо, коли відхилення за модулем $|\tilde{\varphi}_{1,2}(t)|$ перевищують значення $\rho|\varphi_{1,2}(0)|$. Як показано в [5], значення ρ можуть бути обрані в достатньо широкому діапазоні чисел, що перевищують 1. В даній роботі прийнято $\rho = 1.1$. Результати розрахунків представлені на рис. 4, де виділено вузли нестійкості у просторі параметрів. Аналіз показав, що час моделювання системи може не перевищувати 1000 секунд. При меншій тривалості моделювання збільшується кількість нестійких вузлів як на площині, так і у просторі досліджуваних параметрів системи. А при більшій тривалості такого збільшення вже немає.

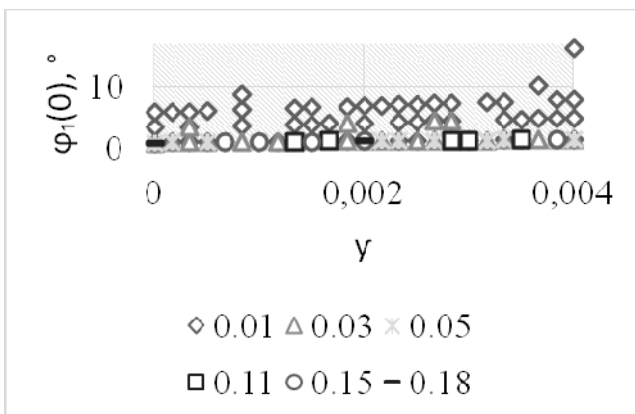


Рис. 5 – Области нестійкості синфазної моди на площині параметрів $\varphi_1(0)$, γ .

Розглянемо площину параметрів при сталих значеннях параметра μ (рис. 5). Як бачимо, кількість нестійких вузлів зменшується з ростом μ (це видно як на рис. 4, так і на рис. 5). Значення параметру μ подано у легенді до діаграми на рис. 5. Приклад нестійкості на фазовій площині і у конфігураційному просторі (рис. 6, а), а також амплітудно-частотну характеристику (рис. 6, б – в) зобразимо на рис. 6. Для побудови задаємо:

$$\varphi_1(0) = 16.46^\circ, \quad \varphi_2(0) = 15.75^\circ, \quad \mu = 0.01, \quad \gamma = 0.004.$$

Надавати більше прикладів нестійкості немає сенсу, оскільки, як видно з рис. 4 – 5, коли початкові кути менше за 10° , то вплив магнітного збудження є значним у порівнянні з початковим відхиленням. Розглянемо приклад стійкої моди коливань на рис. 7, що

побудовано при таких значеннях параметрів:

$$\varphi_1(0) = 45^\circ, \varphi_2(0) = 45^\circ, \mu = 0.15, \gamma = 0.004.$$

Як бачимо, траєкторія зі збільшенням початкового відхилення і відношення мас маятників стягується, а найбільше відхилення від траєкторії у конфігураційному просторі для даного прикладу не перевищує 0.01274.

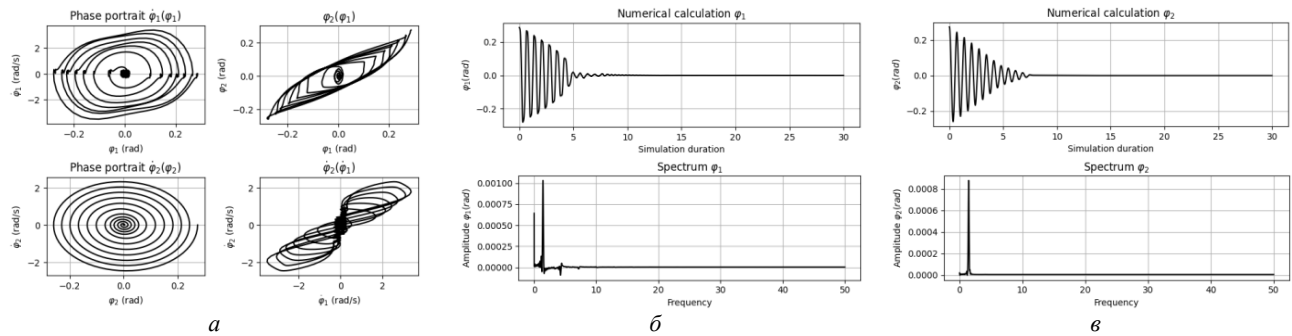


Рис. 6 – Спектри для пов’язаної моди коливань (випадок нестійкої моди):

a – нестійкість на фазовій площині і у конфігураційному просторі; б – в – амплітудно-частотна характеристика.

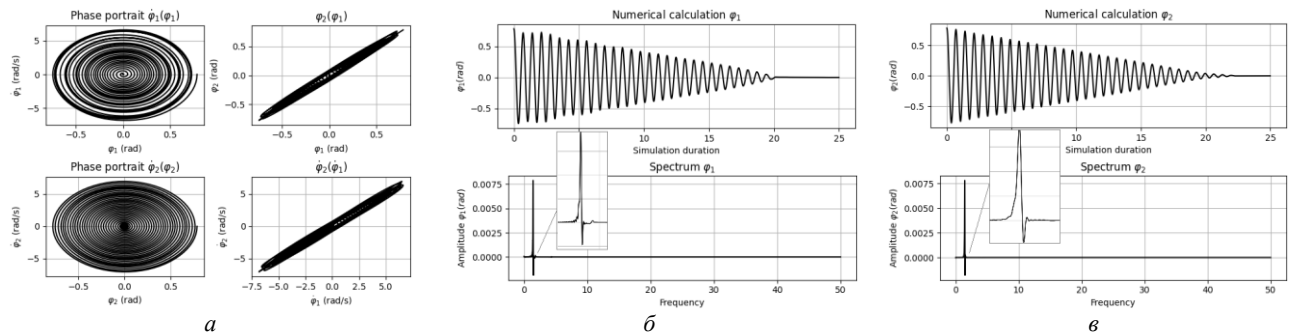


Рис. 7 – Траєкторії та спектри для пов’язаної моди коливань (випадок стійкої моди):

a – стійкість на фазовій площині і у конфігураційному просторі; б – в – амплітудно-частотна характеристика.

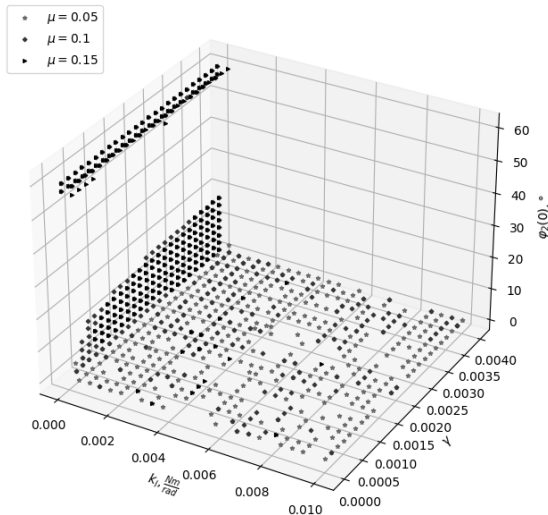


Рис. 8 – Области нестійкості синфазної моди у просторі параметрів $\varphi_2(0)$, k_l та γ .

Дослідимо стійкість моди у просторі параметрів

$$A_1, \gamma \text{ і } k_l \in \left[10^{-5}, 0.05\right] \left(\frac{Nm}{rad}\right) \text{ та при сталому } \mu.$$

Візьмемо декілька значень параметрів з інтервалу

$$\mu = \{0.05, 0.1, 0.15\}.$$

Результат зображено на рис. 8.

Розглядаючи площину при різних $\mu = \{0.05, 0.1, 0.15\}$ та сталих величинах, які вказані у легенді діаграми, отримуємо рис. 9. Зі збільшенням μ кількість нестійких вузлів на площині параметрів $\varphi_2(0), \gamma$ зменшується (рис. 9, а відповідає значенню $\mu = 0.1$, а рис. 9, б – $\mu = 0.15$).

Приклади нестійкої синфазної моди на площині досліджуваних параметрів представлено на рис. 10. Зазначені результати моделювання отримані за допомогою наступних значень параметрів:

$$a - б): \varphi_1(0) = 57.5417^\circ, \varphi_2(0) = 57.5417^\circ, \mu = 0.05, \gamma = 0.001, k_l = 10^{-5};$$

$$в - г): \varphi_1(0) = 60^\circ, \varphi_2(0) = 60^\circ, \mu = 0.1, \gamma = 0.001, k_l = 0.00043;$$

$$д - е): \varphi_1(0) = 60^\circ, \varphi_2(0) = 60^\circ, \mu = 0.15, \gamma = 0.0033, k_l = 0.00043.$$

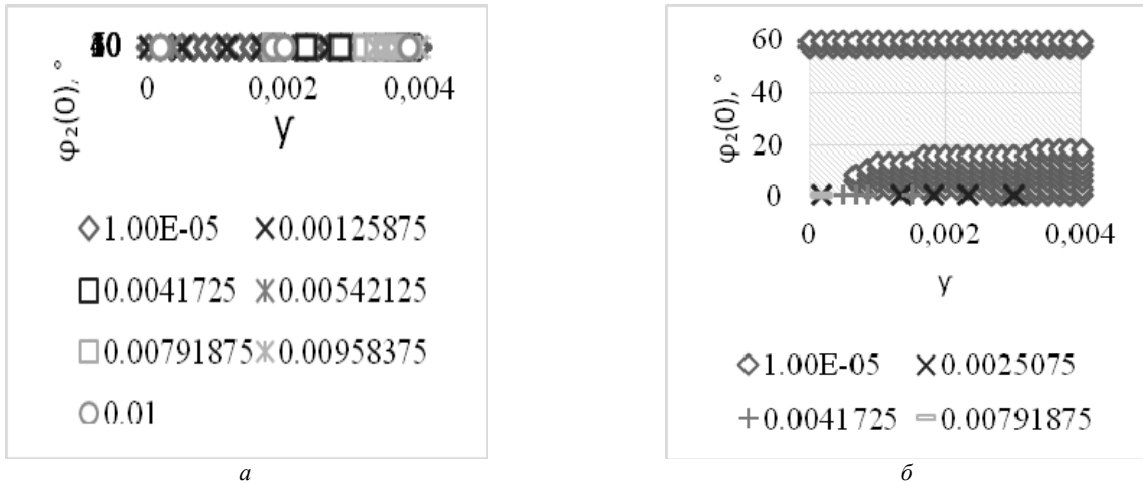


Рис. 9 – Области нестійкості синфазної моди на площині параметрів $\varphi_2(0), \gamma$: а – $\mu = 0.1$; б – $\mu = 0.15$.

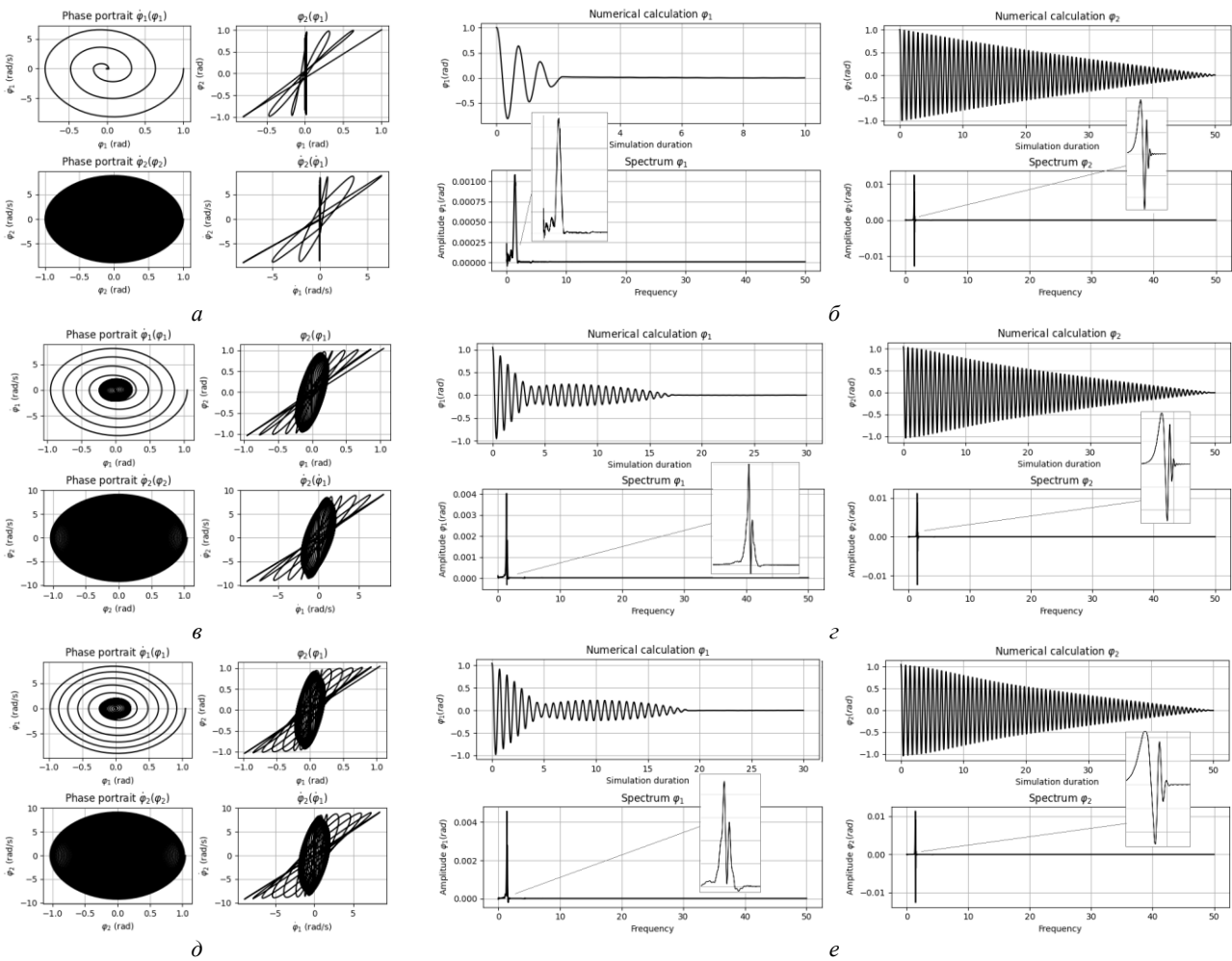


Рис. 10 – Фазові траєкторії, представлення за часом та спектри для пов’язаної моди коливань (випадки нестійкої моди):
 а – б: $\varphi_1(0) = 57.5417^\circ, \varphi_2(0) = 57.5417^\circ, \mu = 0.05, \gamma = 0.001, k_l = 10^{-5}$; в – г: $\varphi_1(0) = 60^\circ, \varphi_2(0) = 60^\circ, \mu = 0.1, \gamma = 0.001,$
 $k_l = 0.00043$; д – е: $\varphi_1(0) = 60^\circ, \varphi_2(0) = 60^\circ, \mu = 0.15, \gamma = 0.0033, k_l = 0.00043$.

При почерговій зміні величин коефіцієнтів опору сил в’язкого повітря $C_1 \in [4 \cdot 10^{-4}, 2 \cdot 10^{-4}] (Nm)$ та $C_2 \in [3 \cdot 10^{-4}, 10^{-4}] (Nm)$ у площині параметрів $\varphi_1(0), \gamma$ отримуємо вузли нестійкості, що представлено на рис. 11. Бачимо, що зі зростанням коефіцієнту відношення мас маятників кількість нестійких вузлів знову зменшується.

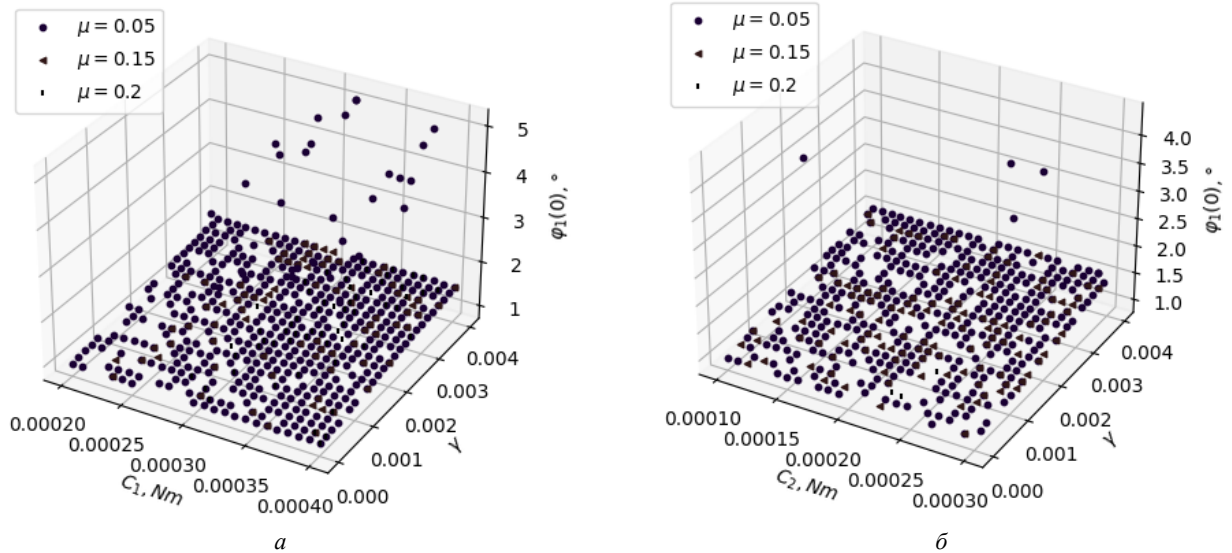


Рис. 11 – Области нестійкості синфазної моди у просторі параметрів $\varphi_1(0), \gamma$: a – змінюється параметр $C_1(Nm)$; b – змінюється параметр $C_2(Nm)$.

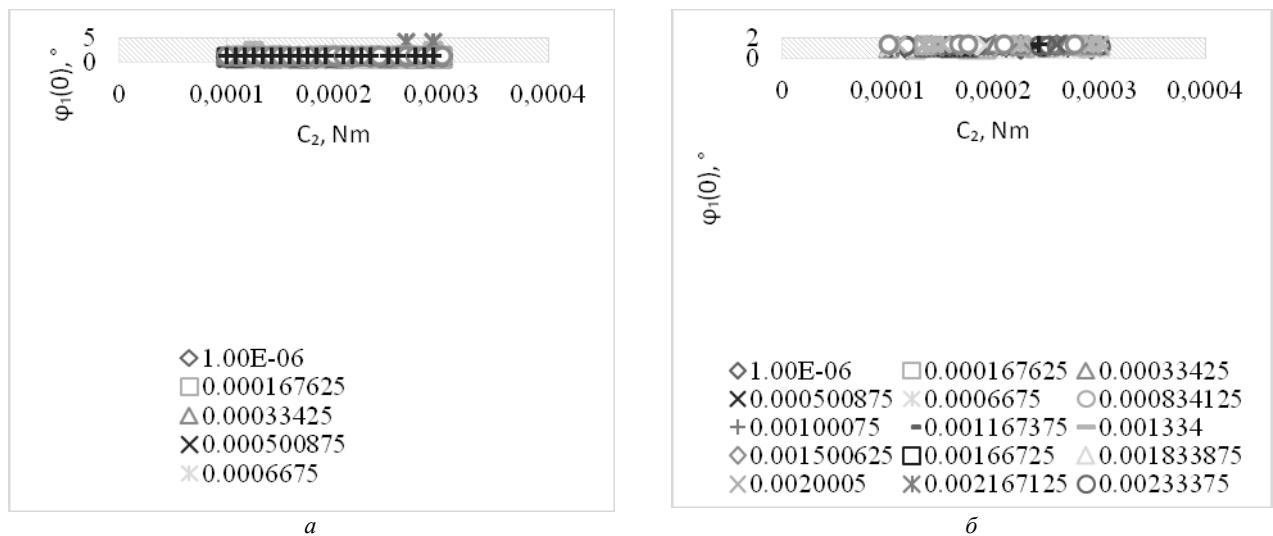


Рис. 12 – Области нестійкості синфазної моди на площині параметрів $\varphi_2(0), C_2(Nm)$: a – $\mu = 0.05$; b – $\mu = 0.15$.

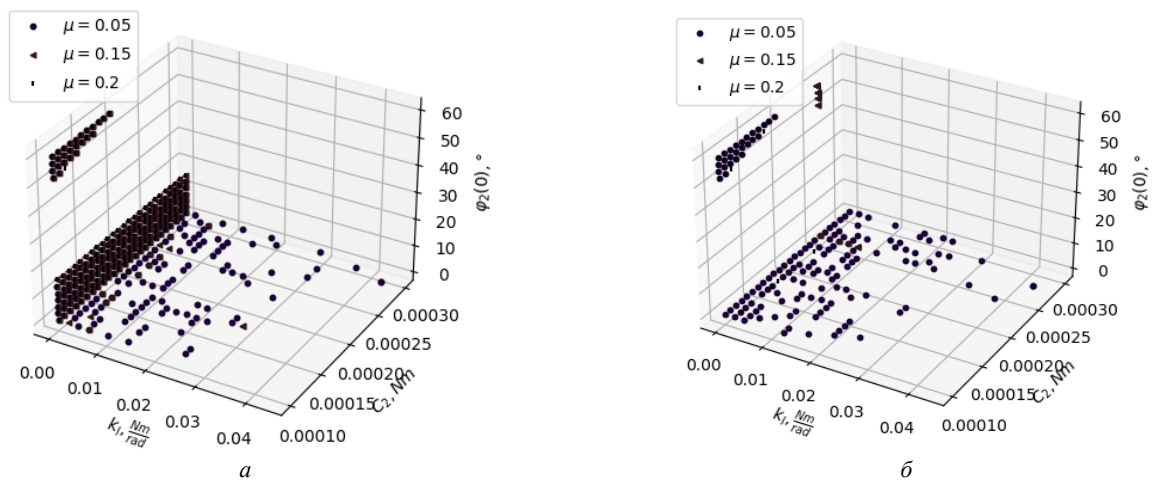


Рис. 13 – Области нестійкості синфазної моди у просторі параметрів $\varphi_2(0), k_1\left(\frac{Nm}{rad}\right), C_2(Nm)$: a – $\gamma = 0.001$; b – $\gamma = 0.0001$.

Розглянемо тепер результати розрахунків на площині параметрів $\varphi_2(0)$, $C_2(Nm)$, причому значення інтенсивності магнітного впливу відзначається у легенді діаграми (рис. 12, а: $\mu = 0.05$, рис. 12, б: $\mu = 0.15$). За рахунок тертя та опору середовища нестійкість спостерігається лише при малих значеннях початкових кутів маятників.

Для простору параметрів $\varphi_2(0)$, k_l , C_2 при різних μ, γ результат наведено на рис. 13 (рис. 13, а: $\gamma = 0.001$, рис. 13, б: $\gamma = 0.0001$). Діапазон зміни параметрів $\varphi_2(0)$, k_l , C_2 було зазначено раніше. Приклади нестійкості надано на рис. 14: а – б): $\gamma = 0.001$; в – з): $\gamma = 0.1$.

В обох зображених випадках

$$\varphi_1(0) = 52.625^\circ, \varphi_2(0) = 52.6249^\circ, C_2 = 0.0001(Nm), \mu = 0.2, k_l = 10^{-5} \left(\frac{Nm}{rad} \right), C_1 = 2.5 \cdot 10^{-4} (Nm).$$

Отримано, що кількість нестійких вузлів у просторі параметрів на рис. 13 зі зменшенням коефіцієнта інтенсивності магнітного впливу зменшилась.

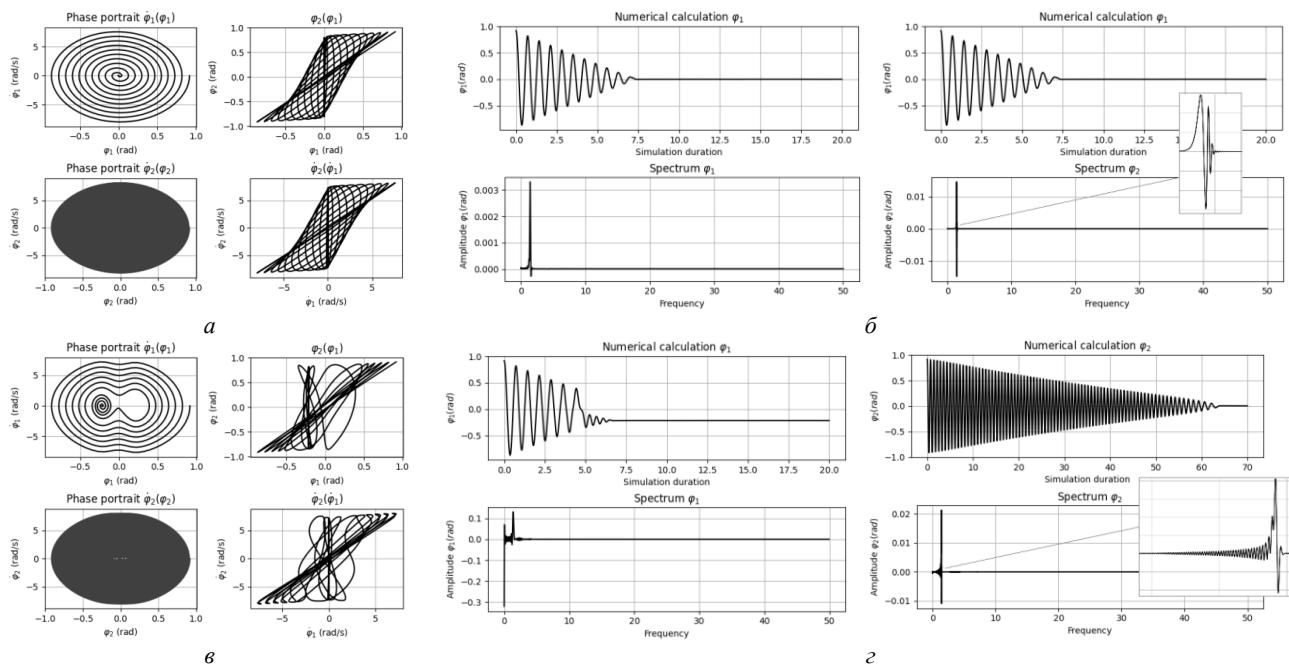


Рис. 14 – Фазові траєкторії, представлення за часом та спектри для пов'язаної моди коливань (випадки нестійкої моди): а – б): $\gamma = 0.001$; в – з): $\gamma = 0.1$.

Висновки. У статті методом багатьох масштабів проведена побудова синфазної (пов'язаної) моди коливань в системі двох пружно зв'язаних маятників під впливом магнітних сил, а також описана та використана чисельно-аналітична процедура дослідження стійкості цієї моди, яка пов'язана з критерієм стійкості за Ляпуновим. Стійкість та нестійкість ННР оцінюється шляхом оцінки ортогональних варіацій щодо прямолінійної модальної лінії в конфігураційному просторі системи.

Підведемо підсумки дослідження стійкості синфазного режиму маятникової системи. Не на всьому діапазоні початкових відхилень маятників існує стійкий пов'язаний режим. Загалом режим не присутній при малих початкових кутах маятників, коли магнітний вплив у порівнянні з початковими умовами є дуже значним. Збільшення величини коефіцієнта відношення мас (малого параметру) робить моду більш вираженою через стягування коливань до моди. У більшості розглянутих випадків нестійка синфазна форма спостерігається при малих коефіцієнтах зв'язку. Зростання коефіцієнтів опору сил в'язкого повітря призводить до швидкого зменшення амплітуди коливань маятників, тобто, до згасання коливань. Нестійкість при дослідженні впливу коефіцієнтів дисипації досягається або при дуже малих, або при дуже великих початкових кутах маятників.

Список літератури

1. *Pilipchuk V. N.* Guidance of the resonance energy flow in the mechanism of coupled magnetic pendulums // *Mechanism and Machine Theory.* – 2022. – Vol. 176. – 105019. DOI: 10.1016/j.mechmachtheory.2022.105019.
2. *Surganova Y. E., Mikhlin Y. V.* Localized and non-localized nonlinear normal modes in a system of two coupled pendulums under a magnetic field // *International Journal of Non-Linear Mechanics.* – 2022. – 104182. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2022.104182.

3. Surhanova Y. E., Mikhlin Y. V. Regular and compound behavior of a pendulum system in a magnetic field // *Technical mechanics*. – 2023. – Vol. 2023. – no. 3. – P. 98 – 109. – DOI: 10.15407/itm2023.03.098.
4. Vakakis A. F., Manevitch L. I., Mikhlin Yu. V., Pilipchuk V. N., Zevin A. A. *Normal Modes and Localization in Nonlinear Systems*. – Wiley : New York, 1996. DOI:10.1002/9783527617869.
5. Mikhlin Yu. V., Avramov K. V. Nonlinear normal modes for vibrating mechanical systems. Review of theoretical developments // *Appl. Mech. Rev.* – 2010. – № 63 (6) (2010). – 060802. DOI: 10.1115/1.4003825.
6. Avramov K. V., Mikhlin Yu. V. Review of applications of nonlinear normal modes for vibrating mechanical systems // *Appl. Mech. Rev.* – 2013. – № 65 (2) (2013). – 020801. DOI: 10.1115/1.4023533.
7. Nayfeh A. H., Mook D. T. *Nonlinear oscillations*. – New York : John Wiley & Sons, 1995. – 720 p.
8. Liapunov A. M. *Stability of motion*. – New York : Academic Press, 1966.
9. Mikhlin Y. V., Shmatko T. V., Manucharyan G. V. Lyapunov definition and stability of regular or chaotic vibration modes in systems with several equilibrium positions // *Computers & Structures*. – 2004. – Vol. 82. – No. 31 – 32. – P. 2733 – 2742. DOI: 10.1016/j.compstruc.2004.03.082.
10. Mikhlin Yu. V., Manucharyan G. V. Determination of the chaos onset in mechanical systems with several equilibrium positions // *Meccanica*. – 2006. – № 41. – P. 253 – 267. DOI: 10.1007/s11012-005-5896-2.

References (transliterated)

1. Pilipchuk V. N. Guidance of the resonance energy flow in the mechanism of coupled magnetic pendulums. *Mechanism and Machine Theory*. 2022, Vol. 176, 105019. DOI: 10.1016/j.mechmachtheory.2022.105019.
2. Sarganova Y. E., Mikhlin Y. V. Localized and non-localized nonlinear normal modes in a system of two coupled pendulums under a magnetic field. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2022, 104182. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2022.104182.
3. Surhanova Y. E., Mikhlin Y. V. Regular and compound behavior of a pendulum system in a magnetic field. *Technical mechanics*. 2023, Vol. 2023, no. 3, pp. 98–109. DOI: 10.15407/itm2023.03.098.
4. Vakakis A. F., Manevitch L. I., Mikhlin Yu. V., Pilipchuk V. N., Zevin A. A. *Normal Modes and Localization in Nonlinear Systems*. Wiley, New York, 1996. DOI:10.1002/9783527617869.
5. Mikhlin Yu. V., Avramov K. V. Nonlinear normal modes for vibrating mechanical systems. Review of theoretical developments. *Appl. Mech. Rev.* 2010, no. 63 (6) (2010), 060802. DOI: 10.1115/1.4003825.
6. Avramov K. V., Mikhlin Yu. V. Review of applications of nonlinear normal modes for vibrating mechanical systems. *Appl. Mech. Rev.* 2013, no. 65 (2) (2013), 020801. DOI: 10.1115/1.4023533.
7. Nayfeh A. H., Mook D. T. *Nonlinear oscillations*. New York, John Wiley & Sons, 1995. 720 p.
8. Liapunov A. M. *Stability of motion*. New York, Academic Press, 1966.
9. Mikhlin Y. V., Shmatko T. V., Manucharyan G. V. Lyapunov definition and stability of regular or chaotic vibration modes in systems with several equilibrium positions. *Computers & Structures*. 2004, Vol. 82, No. 31–32, pp. 2733–2742. DOI: 10.1016/j.compstruc.2004.03.082.
10. Mikhlin Yu. V., Manucharyan G. V. Determination of the chaos onset in mechanical systems with several equilibrium positions. *Meccanica*. 2006, no. 41, pp. 253–267. DOI: 10.1007/s11012-005-5896-2.

Надійшла (received) 20.11.2023

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Сурганова Юлія Едуардівна – аспірант, асистент кафедри прикладної математики, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (096) 805-66-19; e-mail: yuliia.surhanova@khp.edu.ua.

Сурганова Юлия Эдуардовна – аспирант, ассистент кафедры прикладной математики, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: (096) 805-66-19; e-mail: yuliia.surhanova@khp.edu.ua.

Surhanova Yuliia Eduardivna – PhD student, Assistant at the Department of Applied Mathematics, National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute», Kharkiv; tel.: (096) 805-66-19; e-mail: yuliia.surhanova@khp.edu.ua.

Міхлін Юрій Володимирович – доктор фізико-математичних наук, професор кафедри прикладної математики, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (068) 888-95-33; e-mail: Yuriy.Mikhlin@khp.edu.ua.

Михлин Юрий Владимирович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: (068) 888-95-33; e-mail: Yuriy.Mikhlin@khp.edu.ua.

Mikhlin Yuriy Volodymyrovych – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor at the Department of Applied Mathematics, National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute», Kharkiv; tel.: (068) 888-95-33; e-mail: Yuriy.Mikhlin@khp.edu.ua.