УДК 519.85 **DOI: 10.20998/2222-0631.2023.02(5).05**

О. І. МАТВІЄНКО, О. О. МІРОШНІЧЕНКО

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ НЕЧІТКОЇ ВЕКТОРНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ ДЛЯ СКЛАДАННЯ ДІЄТИ

Метою даної роботи є дослідження одного підходу до розв'язання задачі нечіткої векторної оптимізації на прикладі задачі складання дієти. Потрібно розробити умовний денний пайок, що забезпечує потреби людини в корисних речовинах та енергії і є найкращим за витратами та вагою. Для цього розв'язується задача вибору найкращої альтернативи із заданої нечіткої множини альтернатив, при цьому якість альтернативи оцінюється за допомогою кількох частинних критеріїв ефективності. Мета задачі визначена нечітко. Згідно з ідеєю Заде – Беллмана нечітким розв'язком задачі є перетин нечіткої мети та нечіткої множини альтернатив. В роботі розглядається задача нечіткої двокритеріальної оптимізації. Частинними критеріями, що мінімізуються, є вага та вартість денного пайка. Нечіткі потреби в корисних речовинах та кілокалоріях визначаються нечіткими трикутними числами. Для наближеного розв'язання задачі пропонується алгоритм, відповідно до якого розв'язується послідовність задач лінійного програмування. За допомогою математичного пакету Wolfram Mathematica розроблено комп'ютерну програму, яка реалізує розв'язок цієї задачі. Отримано такі результати: для добового раціону було визначено набір продуктів, їхню вагу та вартість. Визначено ступінь впевненості у тому, що знайдений план оптимальний. На базі запропонованої математичної моделі та методу її розв'язання можна створити програмний додаток, який дозволить обирати продукти харчування, вводити необхідні обмеження в зручному для користувача вигляді, а на виході отримувати один або кілька варіантів денного раціону. Такий додаток буде корисним для дієтологів, спортсменів, лікарів та інших людей, які переймаються проблемами здорового харчування.

Ключові слова: нечітка мета, функція приналежності, векторна оптимізація, дієта, нечітка множина альтернатив, частинні критерії ефективності, критерій оптимізації.

О. И. МАТВИЕНКО, А. А. МИРОШНИЧЕНКО

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ НЕЧЕТКОЙ ВЕКТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ДЛЯ СОСТАВЛЕНИЯ ДИЕТЫ

Целью данной работы является исследование одного подхода к решению задачи нечеткой векторной оптимизации на примере задачи составления диеты. Необходимо разработать условный дневной паек, обеспечивающий потребности человека в полезных веществах и энергии и оптимальный по затратам и весу. Для этого решается задача выбора наилучшей альтернативы из заданного нечеткого множества альтернатив, при этом качество альтернативы оценивается с помощью нескольких частных критериев эффективности. Цель в задаче определена нечетко. Нечетким решением задачи является пересечение нечеткой цели и нечеткого множества альтернатив. Для её приближённого решения предлагается алгоритм, в соответствии с которым решается последовательность задач линейного программирования. С помощью математического пакета Wolfram Mathematica разработана компьютерная программа, реализующая решение этой задачи. Получены следующие результаты: для суточного рациона были определены набор продуктов, их вес и стоимость. Определена степень уверенности в том, что найденный план оптимален. На базе предлагаемой математической модели и метода ее решения можно создать программное приложение, которое позволит выбирать продукты питания, вводить необходимые ограничения в удобном для пользователя виде, а на выходе получать один или несколько вариантов дневного рациона. Такое приложение будет полезно для диетологов, спортсменов, врачей и других людей, заботящихся о проблемах здорового питания.

Ключевые слова: нечеткая цель, функция принадлежности, векторная оптимизация, диета, нечёткое множество альтернатив, частные критерии эффективности, критерий оптимизации.

O. I. MATVIIENKO, O. O. MIROSHNICHENKO

APPLICATION OF FUZZY VECTOR OPTIMIZATION METHODS FOR DIET COMPILATION

The purpose of this work is to study an approach to solving the problem of fuzzy vector optimization for compiling a diet. It is necessary to develop a daily ration that provides human needs in nutrients and energy and is the best in terms of costs and weight. For this purpose the problem of choosing the best alternative from a given fuzzy set of alternatives is solved, while the quality of the alternative is evaluated using several partial efficiency criteria. The goal in the task is fuzzily defined. According to the Zadeh – Bellman idea, a fuzzy solution to a problem is the intersection of a fuzzy goal and a fuzzy set of alternatives. The paper considers the problem of fuzzy two-criteria optimization. Partial criteria that are minimized are the weight and cost of the daily ration. Fuzzy needs for nutrients and kilocalories are determined by fuzzy triangular numbers. For an approximate solution of the problem, an algorithm is proposed according to which a sequence of linear programming problems is solved. The computer program was created that implements the solution of this problem in the Wolfram Matematica package. The following results were obtained: a set of products, their weight and cost were determined for the daily diet. The degree of confidence that the found plan is optimal is determined. On the basis of the proposed mathematical model and the method of its solution, a software application allowing to choose food products, enter the necessary restrictions in a user-friendly form, and receive one or more options for the daily ration at the output was created. Such an application will be useful for nutritionists, athletes, doctors and other people who are concerned with the problems of healthy eating.

Key words: fuzzy goal, membership function, vector optimization, diet, fuzzy alternative set, partial efficiency criterion, optimization criterion.

Вступ. Практично будь-яка *прикладна задача* є *багатокритеріальною* і, як правило, звести її до одного критерію досить складно, оскільки цілей може бути багато. У цьому випадку *оптимізація* проводиться за декількома *частковими критеріями*, і проблема зводиться до розгляду задачі *багатокритеріальної оптимізації*. У зв'язку з цим особливого значення в даний час набуває *теорія прийняття рішень при наявності багатьох критеріїв*.

Багато людей у своєму харчуванні дотримуються певної *дієти*. Для одних дієти призначаються з медичною метою, інші намагаються схуднути чи, навпаки, набрати вагу або просто підтримувати свій організм в хорошій формі. Також є спеціальні дієти для спортсменів. Раціон харчування повинен бути складений таким чином, щоб забезпечувати людину усіма поживними речовинами, відповідати її фінансовим можливостям, мати адекватну вагу та об'єм.

При складанні раціону треба враховувати кілька чинників, наприклад, вартість продуктів та вагу. Крім того, багато параметрів, що впливають на результат, визначено неточно. Тому для розв'язання цієї задачі будемо використовувати *методи нечіткої векторної оптимізації*.

Необхідним етапом розв'язання будь-якої оптимізаційної задачі є збір вихідної інформації, яка в умовах часових обмежень не є повністю визначеною, а носить приблизний, неточний характер. Наразі для розв'язання задач з нечіткими вихідними даними успішно застосовується *теорія нечітких множин* та *нечітка логіка*. За допомогою теорії нечітких множин можна апроксимувати будь-яку систему без використання складного математичного апарату, наприклад, *диференціального* та *інтегрального числення*, які традиційно застосовуються в *теорії управління*. Тому використання математичного апарату, який синтезує *методи дослідження операцій* і *методи теорії нечітких множин* для прийняття рішень, є актуальною проблемою.

Аналіз останніх досліджень. Дослідженню та аналізу сучасних методів розв'язання задач векторної оптимізації присвячено багато робіт.

В роботі [1] розглядається *інтелектуальна система* прогнозування потреб людини в корисних речовинах, які представляються нечіткими числами. Для розв'язання задачі складання раціону використовується *нечіткий генетичний алгоритм*.

Метод ранжування п'ятикутних нечітких чисел для складання овочевої дієти розглядається в роботі [2].

Нечітка транспортна задача для складання раціону розв'язується в роботі [3]. В [4] також розв'язується нечітка транспортна задача, в якій вхідні дані представляються у вигляді дев'ятикутних нечітких чисел.

В роботі [5] моделюється система підтримки прийняття рішень на основі нечіткої логіки.

Нечітка задача векторної оптимізації для складання раціону розглядається в роботі [6]. За частинні критерії, які мінімізуються, обрано вартість раціону, кількість насичених жирів та вуглеводів.

У дослідженні [7] для складання дієти застовується *булеве лінійне програмування*, в якому використовуються логічні змінні та лінійні обмеження для моделювання та розв'язання задач оптимізації. Цільова функція представляється *лінійною комбінацією булевих змінних*.

В роботі [8] *нечітка множина Піфагора* використовується для позначення нечіткості та невизначеності. Пропонується *модель піфагорово нечіткої задачі лінійного програмування* для складання раціону, а також метод її розв'язання.

В даній роботі пропонується новий підхід до розв'язання задачі складання дієти, заснований на використанні моделі нечіткої векторної оптимізації з нечіткою множиною альтернатив та нечіткою метою.

Задачі векторної оптимізації. Розглянемо задачу, що часто зустрічається в процесі прийняття рішення про вибір найкращого способу дій у ситуації, коли якість варіанта використання ресурсів оцінюється за допомогою не одного, а кількох кількісних показників – *критеріїв ефективності*. В цьому випадку стає невизначеним саме поняття оптимальності, не зрозуміло, який варіант вважати найкращим. Адже найкращий з погляду деяких з критеріїв спосіб дій може виявитися дуже поганим за іншими критеріям.

Задачі такого типу називаються *векторними задачами (багатокритеріальної) оптимізації*. Багатокритеріальні задачі виникають в економіці, техніці, у військовій справі тощо.

Векторна (багатокритеріальна) задача оптимізації лежить в основі математичної моделі, що описує деяку економічну систему або технічний об'єкт. Розглянемо формальний опис такої математичної моделі.

Нехай $x=\{x_j,\, j\in N_n\}$ – вектор змінних моделі; N_n – множина індексів вектору змінних, який належить простору $n-$вимірних векторів $x\in R^n$ (зазвичай передбачається невід'ємність вектору змінних $x\geq 0$); функціональний взаємозв'язок змінних встановлюється визначеними співвідношеннями, на які накладаються обмеження

$$G(x)\leq b,\quad x\geq 0,$$

де $G(x)=(g_1(x), g_2(x), ..., g_m(x))$ – вектор функцій. Останні нерівності визначають допустиму область X значень змінних x, включену в простір змінних, $X\subset R^n$, $b=\{b_i, i\in N_m\}$ – вектор коефіцієнтів – параметрів моделі, $i\in N_m$, де N_m – множина індексів обмежень $G(x)\leq b$.

Функціонування системи, технічного об'єкта направлене на виконання зазначених цілей – критеріїв, функціонально зв'язаних з вектором змінних $f_k(x)$, $k\in N_l$, де N_l – множина індексів критеріїв. Множину $\{f_1(x), f_2(x), ..., f_l(x)\}$ критеріїв можна представити у вигляді *вектор-функції* $F(x)=\{f_k(x), k\in N_l\}$, який називають *векторним критерієм (векторною цільовою функцією)*. Припускаючи, що кожен компонент векторного критерію спрямований на збільшення (максимізацію) свого значення, задача вибору за багатьма критеріями розв'язується як задача вибору за векторним критерієм $F(x)$ вектору змінних $x\geq 0$ з допустимої області і записується наступним чином:

$$Z(F,G): \max F(x)=\{f_k(x), k\in N_l\},$$

за умов

$$G(x)\leq b,\quad x\geq 0.$$

Передбачається, що задача $Z(F,G)$ опукла, тобто кожна компонента векторного критерію $F(x)$ – угнута функція, а $g_i(x)$, $i \in N_m$ – опуклі функції.

Множина точок X, що визначають допустиму область вектору змінних, є непорожньою компактною множиною:

$$X = \left\{ x \in R^n \mid x \geq 0, G(x) \leq b \right\} \neq \varnothing .$$

Звідси випливає, що існує розв'язок задачі $Z(F,G)$ по кожній компоненті векторного критерію $f_k(x)$, $k \in N_l$.

Векторна задача $Z(F,G)$ розглядається для випадку, коли точки оптимуму x^k, $k \in N_l$ отримані при розв'язанні задачі за кожним критерієм $f_k(x)$, $k \in N_l$, окремо, не збігаються (при збігу розв'язок вважається ідеальним). Тому з математичної точки зору векторна задача $Z(F,G)$ є некоректною, тобто якщо один із критеріїв $f_k(x)$, $k \in N_l$, досяг свого оптимуму, то поліпшення інших компонент векторного критерію неможливе.

Тому під розв'язанням векторної задачі $Z(F,G)$ можна розуміти тільки якийсь компромісний розв'язок, що задовольняє в тому чи іншому розумінні усі компоненти векторного критерію. На вирішення цієї проблеми і спрямовані основні *методи розв'язання векторних задач оптимізації*.

Існує досить багато методів розв'язання задач векторної оптимізації, але майже всі вони носять *евристичний характер*. При розробці методів розв'язання векторних задач приходиться вирішувати проблеми, що пов'язані з вибором принципу оптимальності, який визначає оптимальність того чи іншого розв'язку. Розглянемо ці проблеми.

Нормалізація критеріїв. У векторних задачах оптимізації локальні критерії мають різний фізичний зміст і, як наслідок, вимірюються в різних одиницях, масштаби їх не порівнювані, тому неможливе порівняння якості отриманих результатів за кожним критерієм. Операція зведення масштабів локальних критеріїв до єдиного, зазвичай безрозмірного, зветься нормалізацією.

Вибір принципу оптимальності. У задачах векторної оптимізації принцип оптимальності визначає властивості оптимального розв'язку і дає відповідь на головне питання – у якому розумінні оптимальний розв'язок переважає всі інші допустимі розв'язки і дає правило пошуку цього оптимального розв'язку.

Урахування пріоритету критеріїв. Зазвичай з фізичного змісту задачі зрозуміло, що локальні критерії мають різну важливість при розв'язанні задачі, тобто один локальний критерій має деякий пріоритет над іншим локальним критерієм.

Перераховані проблеми так чи інакше зводять багатокритеріальну задачу до однокритеріальної, тобто зводять до проблеми обчислення оптимуму.

Розв'язання перерахованих проблем і розвиток методів розв'язання задач векторної оптимізації відбувається в декількох напрямках. Основні з них:

– методи, що ґрунтуються на згортанні критеріїв у єдиний;
– методи, побудовані на накладенні обмежень на критерії;
– методи цільового програмування;
– методи, засновані на відшуканні компромісного рішення;
– методи, в основі яких лежать людино-машинні процедури прийняття рішень (інтерактивне програмування).

Існують інші класифікації методів розв'язання векторних задач, зокрема в залежності від вигляду наданої інформації про важливість критеріїв та ін.

Широке поширення одержав напрямок, пов'язаний із прийняттям рішень в умовах невизначеності.

Нечіткість у постановці задачі багатокритеріальної оптимізації може бути як в описі множини альтернатив, так і в описі векторної цільової функції. Різні форми опису вихідної інформації обумовлюють існування різних формулювань нечітких задач оптимізації:

– задача досягнення нечітко поставленої мети при нечітких обмеженнях;
– задача нечіткої оптимізації при нечіткій множині допустимих альтернатив;
– нечіткий варіант стандартної задачі оптимізації з «пом'якшенням» критеріїв й/або обмежень, де замість задачі оптимізації розв'язується задача досягнення мети й відповідні нерівності для цільової функції й обмежень можуть порушуватися;
– задача векторної оптимізації з нечіткими коефіцієнтами та ін.

Постановка задачі. Вербальна постановка задачі: розробити денний раціон, що забезпечує потреби в корисних речовинах та енергетиці і є найкращим за витратами та вагою.

Вхідними даними є:

– набір продуктів, що використовуються для харчування;
– вміст корисних речовин у 100 г продукту;
– калорійність 100 г продукту (у кілокалоріях);

– вартість продуктів;

– потреба в корисних речовинах (у грамах) і кілокалоріях.

Вихідними даними є: набір продуктів та їх вага.

Розглянемо *задачу вибору найкращої альтернативи* із заданої нечіткої множини альтернатив з функцією приналежності, що визначена на універсальній множині. Вважатимемо, що якість альтернативи оцінюється за допомогою частинних критеріїв ефективності. Ціль в цій задачі є визначеною нечітко. Для розв'язання цієї задачі скористаємося *ідеєю Заде – Беллмана* [9], згідно з якою нечітким розв'язком розглянутої задачі є перетин нечіткої цілі та нечіткої множини альтернатив.

У випадку задачі з критеріями ефективності як нечітку ціль пропонується розглядати перетин нечітких множин – нечітких частинних цілей, визначених частинними критеріями ефективності, тобто виходити з того, що ціль досягається з потрібною надійністю, якщо з цією надійністю досягається кожна з частинних цілей.

Нечітка задача векторної оптимізації з нечітко визначеною метою. Розглянемо задачу вибору найкращої альтернативи із заданої нечіткої множини альтернатив $\widehat{C}$ з функцією приналежності $\mu_{\widehat{C}}(x)$, що визначена на універсальній множині X, при цьому будемо виходити з того, що якість альтернативи оцінюється за допомогою n частинних критеріїв ефективності: $f_1, f_2, ..., f_n$. Мета в цій задачі є визначеною нечітко. Нечітким рішенням розглянутої задачі є перетин нечіткої мети та нечіткої множини альтернатив $\widehat{C}$.

У випадку задачі з n критеріями ефективності як нечітку ціль $\widehat{G}$ пропонується розглядати перетин нечітких множин $\widehat{G}_i$, $i = 1, 2, ..., n$ – нечітких частинних цілей, визначених частинними критеріями ефективності $f_1, f_2, ..., f_n$, тобто виходити з того, що ціль досягається з потрібною надійністю, якщо з цією надійністю досягається кожна з частинних цілей. Позначимо функцію приналежності нечіткої множини $\widehat{G}_i$ через μ_i, тоді отримаємо, що

$$\mu_{\widehat{G}}(x) = \min\{\mu_1(x), \mu_2(x), ..., \mu_n(x)\}.$$

Під нечітким рішенням розглянутої задачі будемо розуміти перетин нечіткої мети та нечіткої множини альтернатив. Тоді функція приналежності $\mu_{\widehat{D}}(x)$ нечіткого рішення $\widehat{D}$ задачі матиме вид:

$$\mu_{\widehat{D}}(x) = \min\{\mu_{\widehat{G}}(x), \mu_{\widehat{C}}(x)\}.$$

Як рішення задачі пропонується обирати альтернативу x, для якої значення функції $\mu_{\widehat{D}}(x)$ є максимальним.

Метод розв'язання задачі векторної оптимізації з нечіткими вихідними даними. Нехай частинні критерії ефективності та множина альтернатив задані за допомогою лінійних функцій.

Розглянемо задачу з двома частинними мінімізованими критеріями і з чіткою множиною допустимих планів (з чіткою множиною альтернатив):

$$\begin{cases} f_1(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min, \\ f_2(x) = \sum_{j=1}^{n} d_j x_j \to \min, \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = 1, ..., m, \\ x_j \ge 0, \quad j = 1, ..., n, \end{cases} \quad a_{ij}, b_i, c_j, d_j \in R, \quad j = \overline{1,n}, \quad i = \overline{1,m}. \tag{1}$$

Через $\mu_l(x)$ $(l = 1, 2)$ позначимо функцію приналежності нечіткої множини, що формалізує частинну нечітку мету задачі, визначену частинним критерієм f_1. Будемо припускати, що функції μ_l є спадними функціями свого аргументу і що мінімальне значення цих функцій дорівнює нулю, а максимальне – одиниці.

Будемо характеризувати ступінь приналежності альтернативи нечіткій меті значенням відповідного нормованого критерію: для критерію $f(x)$, що мінімізується, формула (2), для критерію, що максимізується, формула (3):

$$\mu(x) = \frac{f^{\max} - f(x)}{f^{\max} - f^{\min}}; \tag{2}$$

$$\mu(x) = \frac{f(x) - f^{\min}}{f^{\max} - f^{\min}}, \tag{3}$$

де $f^{\max}$ і $f^{\min}$ – відповідно максимальне і мінімальне значення критерію f, якщо в задачі (1) залишити тільки один цей критерій і прибрати інший (інші).

Будемо припускати, що $d_j \geq 0, a_{ij} \geq 0, b_i \geq 0$ для $i = 1, 2, ..., m, \quad j = 1, 2, ..., n.$

Розглянемо сімейство задач, що залежать від параметра E, $0 \leq E \leq 1$:

$$\begin{cases} f_2(x) = \sum_{j=1}^{n} d_j x_j \to \min, \\ \mu_1(x) \geq E, \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, ..., m, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, ..., n. \end{cases} \tag{4}$$

Нехай x^E – оптимальний план задачі (4) при заданому E. План, при якому $x_1 = 0, x_2 = 0, ..., x_n = 0$, є допустимим планом задачі (4) при $E = 0$.

З ростом E множина допустимих планів задачі (4) не збільшується і змінюється від множини допустимих планів задачі (1) до множини планів, для яких $\mu_1(x_i) = 1$. Отже, оптимальне значення критерію $f_2(x)$ зі зростанням E не спадає, а отже, функція $\mu_2(f_2(x))$ не може зростати і змінюється від одиниці до нуля.

Нехай

$$W = \max_{0 \leq E \leq 1} \min\left\{\mu_1\left(x^E\right), \mu_2\left(x^E\right)\right\} = \min\left\{\mu_1\left(x^{E^0}\right), \mu_2\left(x^{E^0}\right)\right\},$$

тоді план x^{E^0} вважається розв’язком задачі (1).

Будуючи за задачею (1) задачу (4), як цільову функцію в (4) узяли другий частинний критерій із (1). Зауважимо, що максимальне значення функції приналежності нечіткого розв’язку задачі (1) однаково вийшло б таким, що дорівнювало б W, якби як цільову функцію взяли перший частинний критерій, а оптимальний план міг би й змінитися.

Для наближеного розв’язання задачі (1) можна запропонувати такий алгоритм.

Нехай похибка у визначенні ступеня нашої впевненості в тому, що альтернатива x є розв’язком сформульованої задачі, не повинна перевищувати Δ.

Розглянемо перший частинний критерій $f_1(x)$ і відповідну йому функцію приналежності $\mu_1(x)$. Будемо розв’язувати послідовність задач такого вигляду:

$$\begin{cases} f_2(x) = \sum_{j=1}^{n} d_j x_j \to \min, \\ \mu_1(x) \geq k\Delta, \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, ..., m, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, ..., n. \end{cases} \tag{5}$$

Розв’яжемо нерівність $\mu_1(x) \geq k\Delta$ відносно $f_1(x)$, $\mu_1(x)$ обчислюємо за формулою (2), отримаємо:

$$f_1(x) \leq f_1^{\max} - \left(f_1^{\max} - f_1^{\min}\right) \cdot k\Delta,$$

де $f_1^{\max}$ і $f_1^{\min}$ – відповідно максимальне і мінімальне значення критерію f_1, якщо в задачі (1) залишити тільки один цей критерій і прибрати інший (інші); аналогічно, $f_2^{\max}$ і $f_2^{\min}$ – відповідно максимальне і мінімальне значення критерію f_2, якщо в задачі (1) залишити тільки його й прибрати f_1.

Задача (5) розв’язується для $k = 0, 1, 2, ..., h$, де $h = \operatorname{int}\left(\frac{1}{\Delta}\right)$, тобто h – максимально ціле число, що не перевищує $\frac{1}{\Delta}$. Для кожного k знаходимо оптимальний план x^{*k} задачі (5), обчислюємо $\mu_1\left(x^{*k}\right)$ і $\mu_2\left(x^{*k}\right)$ і знаходимо $\mu_{\hat{D}}\left(x^{*k}\right)$:

$$\mu_{\hat{D}}\left(x^{*k}\right) = \min\left\{\mu_1\left(x^{*k}\right), \mu_2\left(x^{*k}\right)\right\},$$

тобто для x^{*k} визначаємо значення функції приналежності нечіткому розв’язку.

Якщо x^{**} – план, за якого значення $\mu_{\widehat{D}}\left(x^{*k}\right)$ максимальне, тобто

$$\mu_{\widehat{D}}\left(x^{**}\right)=\max_{1\le k\le n}\mu_{\widehat{D}}\left(x^{*k}\right),$$

то він вважається розв'язком задачі (1).

Обчислювальний експеримент. Розглянемо таку задачу: розробити денний пайок (умовний), що забезпечує потреби в корисних речовинах та енергетиці і є найкращим за витратами та вагою. Продукти, що використовуються:

$$p=\left(\textit{хліб},\textit{сухофрукти},\textit{гречка},\textit{яловичина},\textit{сир},\textit{яйця курячі},\textit{капуста},\textit{картопля},\textit{яблука}\right).$$

Потреби в жирах, білках, вуглеводах та кілокалоріях позначимо b_j ($j=1,...,4$), $B=(60,150,250,1800)^T$. Вартість кілограму продуктів d_i ($i=1,...,9$), $D=(35,100,30,250,400,50,15,23,25)^T$. Вміст жирів, білків, вуглеводів, кілокалорій у 100 г продукту позначимо

$$a_{ij},\ A=\begin{pmatrix}1&0&3&16&41&11&0,1&0,4&0,5\\5&2&12&19&24&13&1,8&2&0,5\\46&70&68&0&0&1&6,8&18&12\\220&227&335&220&530&144&27&80&45\end{pmatrix}^T.$$

Побудуємо математичну модель, прийнявши за невідоме кількість відповідного продукту, що використовується в пайці: x_i ($i=1,...,9$) Щоб гарантувати обмеженість множини допустимих планів, введемо вимогу про те, що сумарна вага продуктів не повинна перевищувати 20 одиниць (2 кг).

Зауважимо, що в цій моделі дві цільові функції – вартість пайка і його вага. Також введемо обмеження на мінімальну кількість обраних продуктів: $x_j\ge 0,1$.

Отримаємо математичну модель:

$$\begin{cases}f_1(x)=\sum_{i=1}^{n}x_i\to\min,\\f_2(x)=\sum_{i=1}^{n}d_ix_i\to\min,\\\sum_{i=1}^{n}x_i\le 20,\\-\sum_{i=1}^{n}a_{ij}x_i\le -b_j,\quad n=9,\quad j=1,...,4,\\x_i\ge 0,1.\end{cases}$$

Для наближеного розв'язання задачі (4) будемо з кроком $\Delta=0,01$ розв'язувати послідовність задач. $\mu_1(x)$, $\mu_2(x)$ розраховуються за формулою (2).

Для початку знайдемо $f_1^{\max}$ і $f_1^{\min}$, для цього розв'яжемо задачу, враховуючи у ній тільки перший критерій f_1. $f_1^{\max}=20$, $f_1^{\min}=8,49$.

Потім розв'яжемо задачу (5) за k, що змінюється від нуля до десяти. Ці задачі розв'язуються *симплекс-методом*:

$$\begin{cases}f_2(x)=\sum_{i=1}^{n}d_ix_i\to\min,\\\sum_{i=1}^{n}x_i\le 20-(f_1^{\max}-f_1^{\min})\Delta k,\\-\sum_{i=1}^{n}a_{ij}x_i\le -b_j,\quad n=9,\quad j=1,...,4,\\x_i\ge 0,1.\end{cases}$$

Задача розв'язана в системі *Wolfram Mathematica* [10], результати експерименту наведені в табл. 1.

Таблиця 1 – Результати роботи програми

k	План задачі	$\mu_1(x_k^*)$	$\mu_2(x_k^*)$	$\mu_D(x_k^*)$	$f_1(x_k^*)$	$f_2(x_k^*)$
0	{0,1; 0,1; 9,54; 0,1; 0,1; 2,32; 0,1; 0,1; 0,1}	0,647	1	0,647	12,55	486,78
1	{0,1; 0,1; 9,54; 0,1; 0,1; 2,32; 0,1; 0,1; 0,1}	0,647	1	0,647	12,55	486,78
2	{0,1; 0,1; 9,54; 0,1; 0,1; 2,32; 0,1; 0,1; 0,1}	0,647	1	0,647	12,55	486,78
3	{0,1; 0,1; 9,54; 0,1; 0,1; 2,32; 0,1; 0,1; 0,1}	0,647	1	0,647	12,55	486,78
4	{0,1; 0,1; 9,54; 0,1; 0,1; 2,32; 0,1; 0,1; 0,1}	0,647	1	0,647	12,55	486,78
5	{0,1; 0,1; 9,54; 0,1; 0,1; 2,32; 0,1; 0,1; 0,1}	0,647	1	0,647	12,55	486,78
6	{0,1; 0,1; 9,54; 0,1; 0,1; 2,32; 0,1; 0,1; 0,1}	0,647	1	0,647	12,55	486,78
7	{0,1; 0,1; 3,34; 0,1; 0,26; 7,75; 0,1; 0,1; 0,1}	0,7	0,976	0,700	11,95	634,63
8	{0,1; 0,1; 3,38; 0,1; 1,62; 5,2; 0,1; 0,1; 0,1}	0,8	0,909	0,800	10,79	1053,45
9	{0,1; 0,1; 3,41; 0,1; 2,98; 2,65; 0,1; 0,1; 0,1}	0,9	0,843	0,843	9,64	1472,27
10	{0,1; 0,1; 3,45; 0,1; 4,34; 0,1; 0,1; 0,1; 0,1}	1	0,776	0,776	8,49	1891,08

Максимальне значення функція $\mu_{\widehat{D}}\left(x_k^*\right)$ набуває за $k=9$. Таким чином, оптимальним є план (0,1; 0,1; 3,41; 0,1; 2,98; 2,65; 0,1; 0,1; 0,1), тобто для пайка слід використати по 10 г хліба, сухофруктів, яловичини, капусти, яблук, картоплі; 341 г гречки; 298 г сиру; 265 г яєць. Його вага дорівнює 964 г, його вартість дорівнює 1472,27 у.о. Ступінь упевненості в тому, що цей план є найкращим, дорівнює 0,843. На рис. 1 наведено графіки функцій приналежності $\mu_1(x_k^*)$ та $\mu_2(x_k^*)$.

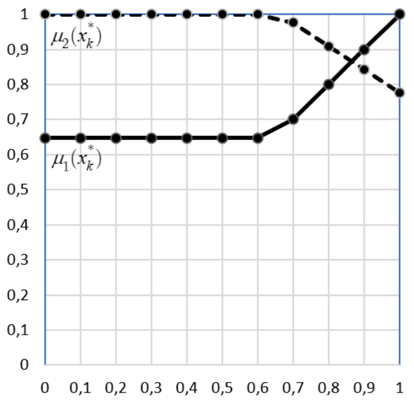

Рис. 1 – Графіки функцій приналежності $\mu_1(x_k^*)$ та $\mu_2(x_k^*)$.

На рис. 1 бачимо графіки функцій приналежності нечіткої мети, визначеної частинними критеріями f_1, f_2. Функція приналежності $\mu_{\widehat{D}}(x)$ нечіткого рішення $\widehat{D}$ задачі обчислюється як мінімум цих функцій приналежності. Розв'язком задачі є альтернатива x, для якої значення функції $\mu_{\widehat{D}}(x)$ є максимальним.

Розглянемо ту ж саме задачу, але додамо нечіткість в параметри задачі. Нехай потреби b_j у корисних речовинах та кілокалоріях задані у вигляді нечітких трикутних чисел $\left\langle \beta_j, b_j, f_j \right\rangle$, а саме:

$$B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 30;\, 60;\, 80 \\ 75;\, 150;\, 200 \\ 125;\, 250;\, 300 \\ 900;\, 1800;\, 2100 \end{pmatrix}.$$

Значення потреб змінювались з кроком 10 %, що відповідає зміні значень відповідних функцій надійності на $0,2$ (табл. 2), оскільки

$$\mu_{b_j}(u)=\begin{cases} \dfrac{u-(b_j-\beta_j)}{b_j-(b_j-\beta_j)}, & якщо \quad u\in\left[(b_j-\beta_j);\, b_j\right], \\ 1, \quad якщо \quad b_j\le u\le f_j, \\ 0, \quad якщо \quad 0\le u\le (b_j-\beta_j), \end{cases} \qquad а \ \ (b_j-\beta_j)=0,5\cdot b_j.$$

Так, рівню надійності 0 % відповідає рівень потреб у 50 %, рівню надійності 20 % відповідає рівень потреб 50 % + 10 % = 60 %, рівню надійності 40 % – рівень потреб 50 % + 20 % = 70 % тощо.

Таблиця 2 – Результати розв'язку задачі з нечіткими потребами

k	$\mu_{b_j^k}$	Рів. по-треб, %	Нечіткі потреби b_j	План задачі	$\mu_1(x_k^*)$	$\mu_2(x_k^*)$	$\mu_D(x_k^*)$	$f_1(x_k^*)$	$f_2(x_k^*)$
0	0	50	30; 75; 125; 900	{0,1;0,1;1,61;0,1;2,13;0,1;0,1;0,1;0,1}	1	0,903	0,903	4,45	953,58
1	0,2	60	36; 90; 150; 1080	{0,1;0,1;1,93;0,1;0,83;3,37;0,1;0,1;0,1}	0,9	0,958	0,9	6,73	604,49
2	0,4	70	42; 105; 175; 1260	{0,1;0,1;2,30;0,1;1,37;3,18;0,1;0,1;0,1}	0,9	0,931	0,9	7,46	821,44
3	0,6	80	48; 120; 200; 1440	{0,1;0,1;2,67;0,1;1,91;3,01;0,1;0,1;0,1}	0,9	0,903	0,9	8,19	1038,38
4	0,8	90	54; 135; 225; 1620	{0,1;0,1;3,04;0,1;2,44;2,83;0,1;0,1;0,1}	0,9	0,874	0,874	8,92	1255,32
5	1	100	60; 150; 250; 1800	{0,1;0,1;3,41;0,1;2,98;2,65;0,1;0,1;0,1}	0,9	0,842	0,842	9,64	1472,27

У другому стовпці табл. 2 $\mu_{b_j^k}$ – надійність потреб (нечітких чисел b_j^k) або ступінь упевненості в тому, що план ефективний за рівнем забезпечення потреб. Графік ступеня впевненості в тому, що план ефективний за частинними критеріями ефективності та рівнем забезпечення потреб наведений на рис. 2.

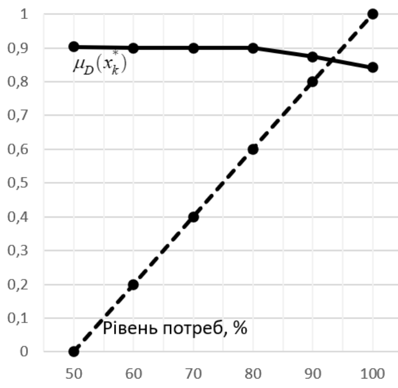

Рис. 2 – Графіки ступеня впевненості в оптимальності плану.

З аналізу представлених на рис. 2 графіків видно, що максимальне значення впевненості в тому, що план ефективний за обома частинними критеріями (за вагою та витратами) та рівнем забезпечення потреб, дорівнює 0,855. При цьому рівень забезпеченості становить 94 %. Тобто оптимальним є план (0,1; 0,1; 3,205; 0,1; 2,71; 2,74; 0,1; 0,1; 0,1), тобто для пайка слід використати по 10 г хліба, сухофруктів, яловичини, капусти, яблук, картоплі; 320 г гречки; 100 г сиру; 556 г яєць. Його вага дорівнює 925,5 г, його вартість дорівнює 1361,95 у.о.

Порівнявши результати розв'язання задачі з урахуванням нечіткості потреб та без нього можемо відмітити незначні зміни в оптимальному плані, але значення цільових функцій відрізняються: вага раціону зменшилася на 4 %, вартість зменшилась на 7,5 %.

Для порівняння ця задача була розв'язана *методом послідовних поступок* для розв'язання багатокритеріальних оптимізаційних задач.

Δ_1, Δ_2 – величина поступки за відповідним критерієм; $f_1^{\min} = 8,49$, $f_1^{\max} = 20$; $f_2^{\min} = 486,7$, $f_2^{\max} = 6756,4$. Результати обчислень для різних поступок наведено в табл. 3 та табл. 4.

Таблиця 3 – Результати методу послідовних поступок (більш вагомий перший критерій)

Крок	$\Delta_1 = 1$, $\Delta_2 = 500$	$\Delta_1 = 2$, $\Delta_2 = 1000$	$\Delta_1 = 4$, $\Delta_2 = 2000$	$\Delta_1 = 8$, $\Delta_2 = 4000$
1	$f_1 = 9,49$, $f_2 = 1528,78$	$f_1 = 10,49$, $f_2 = 1164,76$	$f_1 = 12,49$, $f_2 = 500,3$	$f_1 = 12,55$, $f_2 = 486,77$
2	$f_1 = 8,49$, $f_2 = 1891,08$	$f_1 = 8,49$, $f_2 = 1891,06$	$f_1 = 8,49$, $f_2 = 1891,06$	$f_1 = 8,49$, $f_2 = 1891,06$

Таблиця 4 – Результати методу послідовних поступок (більш вагомий другий критерій)

Крок	$\Delta_1 = 1$, $\Delta_2 = 500$	$\Delta_1 = 2$, $\Delta_2 = 1000$	$\Delta_1 = 4$, $\Delta_2 = 2000$	$\Delta_1 = 8$, $\Delta_2 = 4000$
1	$f_1 = 10,98$, $f_2 = 986,49$	$f_1 = 9,61$, $f_2 = 1486,44$	$f_1 = 8,49$, $f_2 = 1891,06$	$f_1 = 8,49$, $f_2 = 1891,06$
2	$f_1 = 11,98$, $f_2 = 622,7$	$f_1 = 11,6$, $f_2 = 758,73$	$f_1 = 12,49$, $f_2 = 500,3$	$f_1 = 12,55$, $f_2 = 486,77$

Оптимальним за *Парето* [11] розв'язком можемо вважати $f_1 = 8,49$, $f_2 = 1891,06$, оптимальний план (0,1; 0,1; 3,45; 0,1; 4,34; 0,1; 0,1; 0,1; 0,1), якщо більш вагомий перший критерій. Вага раціону дорівнює 849 кг, його вартість дорівнює 1891,06 у.о. Якщо більш вагомий другий критерій, то розв'язком можемо вважати $f_1 = 12,55$, $f_2 = 486,77$, оптимальний план (0,1; 0,1; 9,54; 0,1; 0,1; 2,32; 0,1; 0,1; 0,1). У порівнянні із результатом попереднього підходу маємо покращення першого критерію, але погіршення другого. Також можна проаналізувати інші допустимі розв'язки, наведені в табл. 3 та табл. 4, обрати як оптимальний інший розв'язок, але відсутність кількісних оцінок пріоритетів критеріїв робить цей процес суб'єктивним.

Висновки. В роботі було досліджено один підхід до розв'язання задачі нечіткої векторної оптимізації з нечіткою множиною альтернатив та нечіткою метою на прикладі задачі складання дієти.

Отримано такі результати: для добового раціону було визначено набір продуктів, їхню вагу та вартість. Визначено ступінь впевненості у тому, що знайдений план оптимальний. Цю ж задачу було розв'язано методом послідовних поступок для розв'язання багатокритеріальних оптимізаційних задач. Цей метод дає можливість враховувати пріоритети критеріїв й уникнути підвищення їхніх значень більше деякого допустимого рівня, який визначається суб'єктивно експертами, що ускладнює його застосування. Також необхідно аналізувати різні варіанти розв'язку задачі. Підхід, запропонований в цій роботі, оперує більш точними оцінками та дозволяє врахувати нечіткість даних.

На базі запропонованої математичної моделі та методу її розв'язання можна створити програмний додаток, який дозволить обирати продукти харчування, вводити необхідні обмеження в зручному для користувача вигляді, а на виході отримувати один або кілька варіантів денного раціону. Такий додаток буде корисним для дієтологів, спортсменів, лікарів та інших людей, які переймаються проблемами здорового харчування.

Під час розв'язання задачі за цільову функцію було взято другий частинний критерій. Подальші дослідження в цієї області можна спрямувати на розв'язання задачі, коли за цільову функцію взяти перший частинний критерій. Також можна дослідити різні методи згорток.

Список літератури

1. *Moutaouakil K. E., Saliha C., Hicham B.* Optimal Fuzzy Deep Daily Nutrients Requirements Representation: Application to optimal Morocco Diet Problem // Mathematical Modeling and Computing. – 2022. – vol. 9. – № 3. – С. 607 – 615. https://doi.org/10.23939/mmc2022.03.607.

2. *Venkatesh A.*, *Britto Mano A.* A fuzzy mathematical model for vegetable diet plan using ranking of pentagonal fuzzy number // Malaya Journal of Matematik. – 2020. – vol. 8. – №4. – С. 1995 – 1999. https://doi.org/10.26637/MJM0804/0113.
3. *Venkatesh A.*, *Britto Mano A.* An Application of Fuzzy Transportation Problem for Diet Control. // International Journal of Applied Engineering Research. – 2019. – vol. 14. – №4. – С. 13 – 19.
4. *Lakshmi Prasanna. M.*, *Surya Narayana G.*, *Radhika Ch.* A Mathematical Model for Balanced Diet using Nonagon Fuzzy Number // International Journal of Enhanced Research in Science, Technology & Engineering. – 2019. – vol. 8. – № 9. – С. 13 – 20.
5. *Marashi-Hosseini L.*, *Jafarirad S.*, *Mohammad Hadianfard A.* A Fuzzy Based Dietary Clinical Decision Support System for Patients with Multiple Chronic Conditions // Scientifc reports. – 2023. – 13:12166. https://doi.org/10.1038/S41598-023-39371-4.
6. *Mohd Arif Khan*, *Ahteshamul Haq*, *Aquil Ahmed.* Multi-Objective Model for Daily Diet Planning // Reliability: Theory & Applications. – 2021. – vol. 16. – № 1(61). – С. 89 – 97.
7. *Harahap L. H.*, *Nasution M. K.*, *Sawaluddin S.* A Mathematical Model of Diet Menu Problem Based on Boolean Linear Programming Approach // Jurnal Dan Penelitian Teknik Informatika. – 2023. – vol. 8. – № 3. – С. 1453 – 1460. https://doi.org/10.33395/sinkron.v8i3.12592.
8. *Akram M.*, *Ullah I.*, *Allahviranloo T.*, *Edalatpanah S. A.* LR-type fully Pythagorean fuzzy linear programming problems with equality constraints // Journal of Intelligent & Fuzzy Systems: Applications in Engineering and Technology. – 2021. – vol. 41. – № 12021. – С. 1975 – 1992. https://doi.org/10.3233/JIFS-210655.
9. *Bellman R. E.*, *Zadeh L. A.* Decision-Making in Fuzzy Environment // Management Science. – 1970. – vol. 17. – № 4. – pp. 141 – 160.
10. *Собчук В. В.*, *Чичурін О. В.*, *Кальчук І. В.*, *Жигалло Т. В.* Розв'язування задач аналізу та диференціальних рівнянь засобами комп'ютерної алгебри Mathematica : підручник. – Київ : Міленіум. – 2021. – 420 с.
11. *Жуковин В. Е.* Нечёткие многокритериальные модели принятия решений. – Тбилиси : «Мецниереба». – 1988. – 72 с.

References (transliterated)

1. Moutaouakil K. E., Saliha C., Hicham B. Optimal Fuzzy Deep Daily Nutrients Requirements Representation: Application to optimal Morocco Diet Problem. *Mathematical Modeling and Computing*. 2022, vol. 9, no. 3, pp. 607–615. https://doi.org/10.23939/mmc2022.03.607.
2. Venkatesh A., Britto Mano A. A fuzzy mathematical model for vegetable diet plan using ranking of pentagonal fuzzy number. *Malaya Journal of Matematik*. 2020, vol. 8, no. 4, pp. 1995–1999. https://doi.org/10.26637/MJM0804/0113.
3. Venkatesh A., Britto Mano A. An Application of Fuzzy Transportation Problem for Diet Control. *International Journal of Applied Engineering Research*. 2019, vol. 14, no. 4, pp. 13–19.
4. Lakshmi Prasanna. M., Surya Narayana G., Radhika Ch. A Mathematical Model for Balanced Diet using Nonagon Fuzzy Numbe. *International Journal of Enhanced Research in Science, Technology & Engineering*. 2019, vol. 8, no. 9, pp. 13–20.
5. Marashi-Hosseini L., Jafarirad S., Mohammad Hadianfard A. A Fuzzy Based Dietary Clinical Decision Support System for Patients with Multiple Chronic Conditions. *Scientifc reports*. 2023, 13:12166. https://doi.org/10.1038/S41598-023-39371-4.
6. Mohd Arif Khan, Ahteshamul Haq, Aquil Ahmed. Multi-Objective Model for Daily Diet Planning. *Reliability: Theory & Applications*. 2021, vol. 16, no. 1(61), pp. 89–97.
7. Harahap L. H., Nasution M. K., Sawaluddin S. A Mathematical Model of Diet Menu Problem Based on Boolean Linear Programming Approach. *Jurnal Dan Penelitian Teknik Informatika*. 2023, vol. 8, no. 3, pp. 1453–1460. https://doi.org/10.33395/sinkron.v8i3.12592.
8. Akram M., Ullah I., Allahviranloo T., Edalatpanah S. A. LR-type fully Pythagorean fuzzy linear programming problems with equality constraints. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems: Applications in Engineering and Technology*. 2021, vol. 41, no. 12021, pp. 1975–1992. https://doi.org/10.3233/JIFS-210655.
9. Bellman R. E., Zadeh L. A. Decision-Making in Fuzzy Environment. *Management Science*. 1970, vol. 17, no. 4, pp. 141–160.
10. Sobchuk V. V., Chychurin O. V., Kal'chuk I. V., Zhygallo T. V. *Rozv"yazuvannya zadach analizu ta dyferentsial'nykh rivnan' zasobsmy komp"yuternoyi algebry Mathematica : pidruchnyk* [Solving Problems of Analysis and Differential Equations by Means of Mathematica Computer Algebra: a textbook]. Kyiv, Milenium Publ., 2021. 420 p.
11. Zhukovyn V. E. *Nechyetkie mnogokriterial'nye modeli prinyatiya resheniy* [Fuzzy multicriteria decision-making models]. Tbilisi, "Metsniereba" Publ., 1988. 72 p.

Надійшла (received) 27.10.2023

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Матвієнко Ольга Іванівна – кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики, Харківський національний університет радіоелектроніки, м. Харків; тел.: (097) 715-18-03; e-mail: olha.matviienko @nure.ua.

Матвиенко Ольга Ивановна – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, г. Харьков; тел.: (097) 715-18-03; e-mail: olha. matviienko@nure.ua.

Matviienko Olha Ivanivna – PhD (Engineering Sciences), Kharkiv National University of Radio Electronics, Associate Professor at the Department of Applied Mathematics, Kharkiv; tel.: (097) 715-18-03; e-mail: olha.matviienko@ nure.ua.

Мірошніченко Олександр Олександрович – аспірант кафедри прикладної математики, Харківський національний університет радіоелектроніки, м. Харків; тел.: (096) 165-84-70; e-mail: oleksandr.miroshnichenko@nu re.ua.

Мирошниченко Александр Александрович – аспирант кафедры прикладной математики, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, г. Харьков; тел.: (096) 165-84-70; e-mail: oleksandr.miroshnichenko @nure.ua.

Miroshnichenko Oleksandr Okeksandrovich – postgraduate student at the Department of Applied Mathematics, Kharkiv National University of Radio Electronics, Kharkiv; tel.: (096) 165-84-70; e-mail: oleksandr.miroshnichenko@ nure.ua.