УДК 539.3 **DOI: 10.20998/2222-0631.2023.01.24**

О. Г. НІКОЛАЄВ, М. В. СКІЦКА

ЛОКАЛЬНА МОДЕЛЬ ТЕРМОПРУЖНОГО СТАНУ ПОРИСТОГО МАТЕРІАЛУ

В статті побудовано локальну стаціонарну модель термопружного стану пористого матеріалу. Модель основана на незв'язаних крайових задачах для стаціонарних рівнянь теплопровідності та термопружності для простору з двома сферичними порожнинами. Температурне поле визначається сталою температурою на поверхнях порожнин, які вважаються вільними від зусиль. Задача розв'язувалася узагальненим методом Фур'є (УМФ), для чого у роботі наведено його подальший розвиток на певний клас задач термопружності. Для цього введено системи однаково напрямлених сферичних координат, початки яких пов'язані з центрами порожнин. У роботі побудовано новий набір осесиметричних базисних розв'язків рівняння Ламе для кулі та доведено теореми додавання для нього і для розв'язків векторного бігармонічного рівняння в уведених системах координат. Формалізм УМФ дав можливість звести крайові задачі до алгебраїчних розв'язувальних систем з фредгольмовими операторами у просторі l_2 за умови неперетинання сферичних поверхонь. При чисельному розв'язанні систем використано метод редукції. Отримано графіки напружень σ_θ на поверхні однієї з порожнин і напружень σ_z на осі симетрії задачі між порожнинами при різних відносних розмірах порожнин та різних температурах їх нагріву. Отримані результати узгоджуються з відомими для однієї порожнини. Збіжність методу редукції перевірено чисельно.

Ключові слова: локальна модель, пористий матеріал, термопружний стан, узагальнений метод Фур'є, базисні розв'язки, теорема додавання, розв'язувальна система**.**

А. Г. НИКОЛАЕВ, М. В. СКИЦКА

ЛОКАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ТЕРМОУПРУГОГО СОСТОЯНИЯ ПОРИСТОГО МАТЕРИАЛА

В статье построена локальная стационарная модель термоупругого состояния пористого материала. Модель основана на несвязанных краевых задачах для стационарных уравнений теплопроводности и термоупругости для пространства с двумя сферическими полостями. Температурное поле определяется постоянной температурой на поверхностях полостей, которые считаются свободными от усилий. Задача решалась обобщенным методом Фурье (УМФ), для чего в работе приведено его дальнейшее развитие на определенный класс задач термоупругости. Формализм УМФ дал возможность свести краевые задачи к алгебраическим разрешающим системам с фредгольмовыми операторами в пространстве l_2 при условии непересечения сферических поверхностей. При численном решении систем использован метод редукции. Получены графики напряжений σ_θ на поверхности одной из полостей и напряжений σ_z на оси симметрии задачи между полостями при различных относительных размерах полостей и разных температурах их нагрева. Полученные результаты согласуются с известными для одной полости. Сходимость метода редукции проверена численно.

Ключевые слова: локальная модель, пористый материал, термоупругое состояние, обобщенный метод Фурье, базисные решения, теорема сложения, разрешающая система.

O. G. NIKOLAEV, M. V. SKITSKA

LOCAL MODEL OF THE THERMOELASTIC STATE OF A POROUS MATERIAL

In the paper, a local stationary model of the thermoelastic state of a porous material is constructed. The model is based on uncoupled boundary value problems for stationary equations of heat conduction and thermoelasticity for a space with two spherical cavities. The temperature field is determined by the constant temperature on the surfaces of the cavities, which are considered free of forces. The problem was solved by the generalized Fourier method (GFM), for which the paper presents its further development for a certain class of thermoelasticity problems. For this purpose, systems of equally directed spherical coordinates were introduced, the origins of which are connected with the centers of the cavities. In the work, a new set of axisymmetric basic solutions of the Lamé equation for a sphere is constructed and addition theorems are proved for it and for solutions of the vector biharmonic equation in the given coordinate systems. The GFM formalism made it possible to reduce the boundary value problems to algebraic solvable systems with Fredholm operators in the space l_2 under the condition that the spherical surfaces do not intersect. The reduction method was used for the numerical solution of the systems. Graphs of stresses σ_θ on the surface of one of the cavities and stresses σ_z on the axis of symmetry of the problem between the cavities at different relative sizes of the cavities and at different temperatures of their heating were obtained. The obtained results agree with those known for one cavity. The convergence of the reduction method is verified numerically.

Key words: local model, porous material, thermoelastic state, generalized Fourier method, basic solutions, addition theorem, solution system.

Вступ. Один з напрямків розвитку сучасних технологій пов'язаний зі створенням нових типів *пористих матеріалів* і знаходженням для них *різноманітних галузей застосування*. Мікроелектроніка, будівництво, машино- і авіабудування, енергетика, хімічна промисловість, ракетно-космічна техніка, біологія, медицина – це далеко не повний перелік областей, де використовуються різні вироби з пористих матеріалів, які в залежності від складових компонентів, мікроструктури, розмірів і форми пор, технології виробництва мають різні фізико-механічні властивості. Так, наприклад, металеві піни мають високу міцність та термічну стійкість, алюмосилікати – низьку міцність, але високу хімічну стійкість, різні типи пінобетонів – середню міцність та низьку теплопровідність, тощо. Таким чином, при проектуванні виробів з пористих матеріалів важливо враховувати умови їх подальшої експлуатації, зокрема, наявність *температурних*, *деформаційних*, *термопружних полів*, які чинять вплив на їх *надійність* і *довговічність*. Окремою проблемою є стала потреба в *нових видах наноматеріалів* із заздалегідь *заданими властивостями*, створенню яких має передувати їх *математичне моделювання*.

У роботі моделюється *локальне стаціонарне термопружне поле* між двома сусідніми *сферичними порами* у пористому матеріалі. Дослідження засновано на подальшому розвитку *узагальненого методу Фур'є* для певного класу *задач термопружності* та його застосуванні до аналізу термонапруженого стану простору з двома сферичними порожнинами.

Аналіз останніх досліджень. У багатьох дослідженнях використовуються *методи скінченних елементів* та *методи граничних елементів* для розв'язку термопружних задач. У статті [1] автори використовують узагальнений метод граничних елементів та *ітераційну декомпозицію* області розв'язання задачі, як ефективний спосіб *моделювання неоднорідних середовищ* у контексті термопружності та теплопровідності. В роботі [2] для двовимірних задач термопружності пропонується модифікація методу граничних елементів, заснована на перетворенні граничного інтегрального рівняння з інтегралом по області від температурного поля за допомогою рядів, в які входять *функції форми*. Інший підхід демонструється в статті [3], де для реалізації метода граничних елементів у тривимірних задачах термопружності перетворення, пов'язане з температурним полем, потрійного інтеграла у поверхневий в граничному інтегральному рівнянні, здійснюється за допомогою *функції Гріна*. У роботі [4], як альтернатива методу скінченних елементів, для розв'язання просторових задач теорії пружності та термопружності пропонується *метод скінченних комірок*, який поєднує в собі ідею фіктивної області з перевагами методу скінченних елементів високого порядку. Автори статті [5] використовують відомий розв'язок для сталого розподілу температури в прямокутнику сумісно з *методом граничних інтегральних рівнянь* для отримання наближеного рішення плоскої стаціонарної термопружної задачі з мішаними механічними граничними умовами. Невідомі функції в перерізі отримано у вигляді рядів за *декартовими гармоніками* і додаткових *гармонічних функцій*, які мають особливу поведінку в точках зміни граничних умов. У статті [6] *методом теорії потенціалу* отримано розв'язок просторової симетричної стаціонарної термопружної задачі з тонким жорстким включенням. Як застосування, отримано точний розв'язок задачі для круглого жорсткого включення у просторі під дією однорідного температурного поля. В роботі [7] за дії стаціонарного джерела тепла побудовано *функції Буссінеска* задачі термопружності за плоскої деформації напівобмеженого тіла з вільною, жорсткою, гладко або пружно закріпленою межею, на якій підтримується нульова температура або теплоізоляція. Побудову функцій Буссінеска зведено до розв'язування крайових задач для гармонічних функцій у півпросторі. Отримано співвідношення для переміщень і напружень, які є відповідними функціями Гріна і можуть бути використані при визначенні термопружного стану півпростору за тепловиділення у стрічковій області. Автори дослідження [8], використовуючи *теорію аналітичних функцій та формалізм Стро*, побудували інтегральні залежності та *рівняння типу Сомільяни* для плоскої задачі термопружності у напівплощині з отворами, тріщинами та сторонніми включеннями. Ці рівняння враховують усі можливі комбінації механічних та теплових *крайових умов* на межі півпростору. Отримані інтегральні уявлення було введено в модифікований метод граничних елементів. Монографія [9] описує теорію визначення полів температури, напружень і переміщень для деформованих твердих тіл з тонкими включеннями за різних температурних і силових умов. Розглядаються *методи використання апарату теорії функцій комплексної змінної* та *інтегральних перетворень* для розв'язування задач цього класу з урахуванням *анізотропії* термофізичних властивостей матеріалів. Представлені конкретні двовимірні приклади для різних типів тіл з включеннями. У роботі [10] розроблена методика для визначення термопружного стану у багатошарових тілах з урахуванням теплових факторів та фізико-механічних характеристик матеріалу за дії джерел тепла. Для розв'язування задач використовуються *перетворення Кірхгофа*, *ітераційний метод Ньютона*, узагальнені функції та функції Гріна. У роботі [11] було отримано розв'язок термопружної задачі для скінченного циліндра з джерелом тепла та конвективним теплообміном за допомогою функцій Гріна, узагальнених функцій та *інтегральних перетворень Ганкеля*. Стаття [12] присвячена розв'язанню внутрішньої і зовнішньої крайових задач зв'язаної стаціонарної термопружності для кулі. Розв'язки знаходяться у вигляді рядів за сферичними функціями. У роботах [13 – 15] узагальнений метод Фур'є розвинено на деякі осесиметричні стаціонарні термопружні задачі для двозв'язних тіл при сумісному використанні однаково напрямлених сферичної та циліндричної, сферичної та сфероїдальної систем координат. У статті [16] описано *метод аналітичного розв'язання задач* плоскої пружності та термопружності для площин і напівплощин з неоднорідними властивостями матеріалу в одному з напрямків. Основні рівняння зводяться до інтегрального рівняння, яке розв'язується за допомогою простої ітераційної техніки зі швидкою збіжністю.

Постановка задачі. Розглянемо *локальну модель* стаціонарного термопружного стану в пористому матеріалі в області між двома сферичними порами Ω_j ($j=1,2$), який визначається сталою температурою та відсутністю напружень на поверхнях пор. Центри пор знаходяться в точках O_j, а їх радіуси дорівнюють R_j. Вважаємо, що пори не перетинаються, тобто $|\overrightarrow{O_1O_2}| > R_1 + R_2$.

Уведемо однаково напрямлені декартові (x_j, y_j, z_j) і сферичні системи координат $(r_j, \theta_j, \varphi_j)$ з початками в точках O_j таким чином, щоб співвідношення між координатами задавалися формулами:

$$x_j = r_j \sin\theta_j \cos\varphi_j, \quad y_j = r_j \sin\theta_j \sin\varphi_j, \quad z_j = r_j \cos\theta_j; \tag{1}$$

$$x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2, \quad z_1 = z_2 + z_{12}, \quad \overrightarrow{O_1O_2} = (0, 0, z_{12}), \quad z_{12} > 0. \tag{2}$$

Області Ω_j та їх границі $\partial\Omega_j$ ($j=1,2$) в локальних системах координат описуються так:

$$\Omega_j=\{r_j<R_j,\theta_j\in[0,\pi],\varphi_j\in[0,2\pi]\},\ \partial\Omega_j=\{r_j=R_j,\theta_j\in[0,\pi],\varphi_j\in[0,2\pi]\}.$$

Математична модель незв'язаних температурного поля і поля переміщень задається крайовими задачами:

$$\Delta T(\vec{x})=0,\quad \vec{x}\in\Omega;\ T(\vec{x})_{|\vec{x}\in\partial\Omega_j}=T_j,\quad j=1,2; \tag{3}$$

$$\Delta\vec{U}(\vec{x})+(1-2\nu)^{-1}\vec{\nabla}(\mathbf{div}\vec{U}(\vec{x}))=\alpha_T\frac{2(1+\nu)}{1-2\nu}\vec{\nabla}T(\vec{x}),\ \ \vec{x}\in\Omega;\ \ (\sigma_r)_{|\partial\Omega_j}=(\tau_{r\theta})_{|\partial\Omega_j}=0,\quad j=1,2, \tag{4}$$

де $\Omega=\mathrm{R}^3\setminus\overline{\Omega_1\bigcup\Omega_2}$; $T(\vec{x})$ – температурне поле; $\vec{U}(\vec{x})$ – поле переміщень; α_T – коефіцієнт лінійного теплового розширення; ν – *коефіцієнт Пуассона*; σ_r, $\tau_{r\theta}$ – компоненти тензора напружень; $\vec{\nabla}=\mathbf{grad}$.

Розвиток математичного апарату. Введемо базисні осесиметричні розв'язки *рівняння Лапласа* для зовнішності та внутрішності кулі $\Omega^{\pm}=\{(r,\theta,\varphi):r_{<R}^{>R}\}$:

$$w_n^{\pm}(r,\theta)=r^{\mp(n+1/2)-1/2}P_n(\cos\theta). \tag{5}$$

Тут і далі $P_n(x)$ – *многочлени Лежандра*, знак + (–) відповідає зовнішньому (внутрішньому) розв'язку для кулі.

З використанням *теорем додавання базисних гармонічних функцій для кулі* в системах координат (r_j,θ_j,φ_j) [17] отримано теореми додавання для осесиметричних базисних розв'язків бігармонічного рівняння.

Теорема 1. *При виконанні співвідношень (1), (2) правильними є формули*:

$$w_n^+\left(r_j,\theta_j\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{h_{n,k}^{(j)}}{z_{12}^{n+k-1}}w_k^-\left(r_{3-j},\theta_{3-j}\right),\ \ r_{3-j}<z_{12},\ \ n=0\div\infty,\quad j=1,2; \tag{6}$$

$$r_j^2w_n^+\left(r_j,\theta_j\right)=\sum_{k=0}^{\infty}h_{n,k}^{(j)}\left[\frac{1}{z_{12}^{n+k-1}}\frac{2nk-n-k}{(n+k)(2k-1)}-\frac{r_{3-j}^2}{z_{12}^{n+k+1}}\frac{2n-1}{2k+3}\right]w_k^-\left(r_{3-j},\theta_{3-j}\right),\ \ r_{3-j}<z_{12},\ \ n=0\div\infty,\quad j=1,2, \tag{7}$$

де $h_{n,k}^{(j)}=(-1)^{jk+(j-1)n}\dfrac{(n+k)!}{n!k!}$.

У подальшому будуть потрібні базисні розв'язки *рівняння Ламе* (однорідне рівняння (4)) для кулі. Вперше такі розв'язки було побудовано в роботі [18], хоча строге поняття базисної системи розв'язків рівняння Ламе в довільній канонічній просторовій області було введено в статті [19]. У монографії [17] було введено модифікований базис для кулі. В даній роботі побудовано новий осесиметричний базис. Доведено таку теорему.

Теорема 2. *При* $\nu\in(0,25;0,5)$ *система вектор-функцій* $\{\vec{W}_{1,n}^{\pm}(r,\theta),\vec{W}_{2,n}^{\pm}(r,\theta)\}_{n=0}^{\infty}$, *де*

$$\vec{W}_{1,n}^{\pm}(r,\theta)=\vec{\nabla}w_n^{\pm}(r,\theta),\ \vec{W}_{2,n}^{\pm}(r,\theta)=\alpha_n^{\pm}\vec{V}_n^{\pm}(r,\theta)-(\alpha_n^{\pm}-1)r^2\vec{W}_{1,n}^{\pm}(r,\theta); \tag{8}$$

$$\vec{V}_n^{\pm}(r,\theta)=\vec{\nabla}[r^2w_n^{\pm}(r,\theta)]; \tag{9}$$

$$\alpha_n^+=\frac{(2n+1)(2\nu-1)-n-1}{n+4\nu-4},\ \ \alpha_n^-=\frac{(2n+1)(2\nu-1)-n}{n+5-4\nu}$$

є базисними осесиметричними системами розв'язків рівняння Ламе в областях $\Omega^{\pm}$.

Отримано нові теореми додавання базисних розв'язків рівняння Ламе (8) і розв'язку векторного бігармонічного рівняння (9) у сферичних системах координат з початками в точках O_j.

Теорема 3. *При виконанні співвідношень (1), (2) правильними є формули*:

$$\vec{W}_{1,n}^+\left(r_j,\theta_j\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{h_{n,k}^{(j)}}{z_{12}^{n+k+1}}\vec{W}_{1,k}^-\left(r_{3-j},\theta_{3-j}\right),\ \ r_{3-j}<z_{12},\ \ n=0\div\infty,\quad j=1,2; \tag{10}$$

$$\vec{W}_{2,n}^+\left(r_j,\theta_j\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{h_{n,k}^{(j)}}{z_{12}^{n+k+1}}\left[z_{12}^2\gamma_{n,k}^{(1)}\vec{W}_{1,k}^-\left(r_{3-j},\theta_{3-j}\right)-\gamma_{n,k}^{(2)}\vec{W}_{2,k}^-\left(r_{3-j},\theta_{3-j}\right)\right],\ \ r_{3-j}<z_{12},\ \ n=0\div\infty,\quad j=1,2; \tag{11}$$

$$\vec{V}_n^+\left(r_j,\theta_j\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{h_{n,k}^{(j)}}{z_{12}^{n+k+1}}\left[z_{12}^2\lambda_{n,k}^{(1)}\vec{W}_{1,k}^-\left(r_{3-j},\theta_{3-j}\right)-\lambda_{n,k}^{(2)}\vec{V}_k^-\left(r_{3-j},\theta_{3-j}\right)\right],\ \ r_{3-j}<z_{12},\ \ n=0\div\infty,\quad j=1,2, \tag{12}$$

де $\gamma_{n,k}^{(1)}=\dfrac{n(2nk-n-k-4\sigma+4)}{(n+k)(2k-1)(n+4\sigma-4)}$, $\gamma_{n,k}^{(2)}=\dfrac{(2n-1)n(k+5-4\sigma)}{(2k+3)(n+4\sigma-4)(k+1)}$; $\lambda_{n,k}^{(1)}=\dfrac{2nk-n-k}{(n+k)(2k-1)}$, $\lambda_{n,k}^{(2)}=\dfrac{2n-1}{2k+3}$.

Побудова загального розв'язку задачі та її зведення до розв'язувальної системи. Крайову задачу (3), (4) будемо розв'язувати послідовно, тобто спершу розв'яжемо задачу (3) для визначення температурного поля.

Шукаємо розв'язок у вигляді:

$$T(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{2} \sum_{n=0}^{\infty} t_n^{(j)} R_j^{n+1} w_n^{+}\left(r_j, \theta_j\right) \tag{13}$$

з невідомими коефіцієнтами $t_n^{(j)}$.

Користуючись формулами (5), (6) розв'язок (13) можна записати в сферичній системі координат з початком у точці O_j, таким чином:

$$T(\vec{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} t_n^{(j)} \left(\frac{R_j}{r_j}\right)^{n+1} P_n(\cos\theta_j) + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r_j}{z_{12}}\right)^{n} P_n(\cos\theta_j) \sum_{k=0}^{\infty} h_{n,k}^{(j)} \left(\frac{R_{3-j}}{z_{12}}\right)^{k+1} t_k^{(3-j)}, \quad j = 1, 2. \tag{14}$$

Після виконання граничних умов (3) для визначення коефіцієнтів $t_n^{(j)}$ отримано розв'язувальну систему:

$$t_n^{(j)} + \left(\frac{R_j}{z_{12}}\right)^{n} \sum_{k=0}^{\infty} h_{n,k}^{(j)} \left(\frac{R_{3-j}}{z_{12}}\right)^{k+1} t_k^{(3-j)} = T_j \delta_{n0}, \quad n = 0 \div \infty, \quad j = 1, 2. \tag{15}$$

Теорема 4. *За умови* $z_{12} > R_1 + R_2$ *оператор системи (15) є фредгольмовим оператором в просторі* l_2.

Як відомо, загальний розв'язок неоднорідного рівняння (4) можна записати в такому вигляді:

$$\vec{U}(\vec{x}) = \vec{U}_0(\vec{x}) + \vec{U}_T(\vec{x}), \tag{16}$$

де $\vec{U}_0(\vec{x})$ – загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння, а $\vec{U}_T(\vec{x})$ – частинний розв'язок неоднорідного рівняння (далі називається вектором термічних переміщень).

Будемо вважати, що в області Ω задано стаціонарне температурне поле (13).

Теорема 5. *Вектор термічних переміщень, який відповідає температурному полю (13), має вигляд*:

$$\vec{U}_T(\vec{x}) = \alpha_T^{\nu} \sum_{j=1}^{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t_n^{(j)}}{2n-1} R_j^{n+1} \vec{V}_n^{+}\left(r_j, \theta_j\right), \quad \alpha_T^{\nu} = -\frac{\alpha_T}{2} \frac{1+\nu}{1-\nu}. \tag{17}$$

Тепер запишемо загальний розв'язок крайової задачі (4):

$$\vec{U}(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{2} \sum_{n=0}^{\infty} a_{1,n}^{(j)} R_j^{n+2} \vec{W}_{1,n}^{+}\left(r_j, \theta_j\right) + \sum_{j=1}^{2} \sum_{n=0}^{\infty} a_{2,n}^{(j)} R_j^{n} \vec{W}_{2,n}^{+}\left(r_j, \theta_j\right) + \alpha_T^{\nu} \sum_{j=1}^{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t_n^{(j)}}{2n-1} R_j^{n+1} \vec{V}_n^{+}\left(r_j, \theta_j\right), \quad \vec{x} \in \Omega, \tag{18}$$

де $\{a_{i,n}^{(j)}\}_{n=0,\, i,j=1}^{\infty,2}$ – невідомі коефіцієнти. З використанням теорем додавання (10) – (12) вектор-функцію (18) запишемо у сферичній системі координат з початком у точці O_j ($j = 1, 2$):

$$\begin{aligned}
\vec{U}\left(r_j, \theta_j\right) = {} & \sum_{n=0}^{\infty} a_{1,n}^{(j)} R_j^{n+2} \vec{W}_{1,n}^{+}\left(r_j, \theta_j\right) + \sum_{n=0}^{\infty} \vec{W}_{1,n}^{-}\left(r_j, \theta_j\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h_{n,k}^{(j)}}{z_{12}^{n+k+1}} R_{3-j}^{k+2} a_{1,k}^{(3-j)} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2,n}^{(j)} R_j^{n} \vec{W}_{2,n}^{+}\left(r_j, \theta_j\right) + \\
& + \sum_{n=0}^{\infty} \vec{W}_{1,n}^{-}\left(r_j, \theta_j\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h_{n,k}^{(j)}}{z_{12}^{n+k-1}} \gamma_{k,n}^{(1)} R_{3-j}^{k} a_{2,k}^{(3-j)} - \sum_{n=0}^{\infty} \vec{W}_{2,n}^{-}\left(r_j, \theta_j\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h_{n,k}^{(j)}}{z_{12}^{n+k+1}} \gamma_{k,n}^{(2)} R_{3-j}^{k} a_{2,k}^{(3-j)} + \alpha_T^{\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t_n^{(j)}}{2n-1} R_j^{n+1} \vec{V}_n^{+}\left(r_j, \theta_j\right) + \\
& + \alpha_T^{\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \vec{W}_{1,n}^{-}\left(r_j, \theta_j\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h_{n,k}^{(44)j}}{z_{12}^{n+k-1}} \frac{\lambda_{n,k}^{(1)}}{2n-1} R_{3-j}^{k+1} t_k^{(3-j)} - \alpha_T^{\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+3} \vec{V}_n^{-}\left(r_j, \theta_j\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h_{n,k}^{(44)j}}{z_{12}^{n+k+11}} R_{3-j}^{k+1} t_k^{(3-j)}.
\end{aligned} \tag{19}$$

Перехід у переміщенні (19) до вектора напружень на поверхні $\partial\Omega_j$ і виконання граничних умов (4) приводить до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{aligned}
-\tilde{a}_{1,n}^{(j)}(n+1) + \tilde{a}_{2,n}^{(j)}(2\alpha_n^{+} - n - 1) + \frac{T_{3-j}}{T_j} \sum_{k=0}^{\infty} u_{n,k}^{r(1,3-j)} \tilde{a}_{1,k}^{(3-j)} + \frac{T_{3-j}}{T_j} \sum_{k=0}^{\infty} u_{n,k}^{r(2,3-j)} \tilde{a}_{2,k}^{(3-j)} = \\
= \tilde{t}_n^{(j)} \frac{n-1}{2n-1} \frac{R_j}{z_{12}} - \frac{T_{3-j}}{T_j} \sum_{k=0}^{\infty} u_{n,k}^{tr(3-j)} \tilde{t}_k^{(3-j)};
\end{aligned} \tag{20}$$

$$\tilde{a}_{1,n}^{(j)} + \tilde{a}_{2,n}^{(j)} + \frac{T_{3-j}}{T_j} \sum_{k=0}^{\infty} u_{n,k}^{\theta(1,3-j)} \tilde{a}_{1,k}^{(3-j)} + \frac{T_{3-j}}{T_j} \sum_{k=0}^{\infty} u_{n,k}^{\theta(2,3-j)} \tilde{a}_{2,k}^{(3-j)} = -\frac{\tilde{t}_n^{(j)}}{2n-1} \frac{R_j}{z_{12}} - \frac{T_{3-j}}{T_j} \sum_{k=0}^{\infty} u_{n,k}^{t\theta(3-j)} \tilde{t}_k^{(3-j)}; \tag{21}$$

$$\tilde{a}_{1,n}^{(j)}(n+2)(n+1) + \tilde{a}_{2,n}^{(j)} \mu_n^{+} + \frac{T_{3-j}}{T_j} \sum_{k=0}^{\infty} f_{n,k}^{r(1,3-j)} \tilde{a}_{1,k}^{(3-j)} + \frac{T_{3-j}}{T_j} \sum_{k=0}^{\infty} f_{n,k}^{r(2,3-j)} \tilde{a}_{2,k}^{(3-j)} =$$

$$= -\tilde{t}_n^{(j)} \frac{n^2+3n-2}{2n-1} \frac{R_j}{z_{12}} - \frac{T_{3-j}}{T_j} \sum_{k=0}^{\infty} f_{n,k}^{tr(3-j)} \tilde{t}_k^{(3-j)} ; \quad (22)$$

$$-\tilde{a}_{1,n}^{(j)}(n+2) + \tilde{a}_{2,n}^{(j)}(\alpha_n^+ - n - 1) + \frac{T_{3-j}}{T_j} \sum_{k=0}^{\infty} f_{n,k}^{\theta(1,3-j)} \tilde{a}_{1,k}^{(3-j)} + \frac{T_{3-j}}{T_j} \sum_{k=0}^{\infty} f_{n,k}^{\theta(2,3-j)} \tilde{a}_{2,k}^{(3-j)} =$$

$$= \tilde{t}_n^{(j)} \frac{n}{2n-1} \frac{R_j}{z_{12}} - \frac{T_{3-j}}{T_j} \sum_{k=0}^{\infty} f_{n,k}^{t\theta(3-j)} \tilde{t}_k^{(3-j)} , \quad (23)$$

де прийнято нормування $t_n^{(j)} = T_j \tilde{t}_n^{(j)}$, $a_{i,n}^{(j)} = z_{12} \alpha_T^{\nu} T_j \tilde{a}_{i,n}^{(j)}$ і такі позначення:

$$u_{n,k}^{r(1,3-j)} = n h_{n,k}^{(j)} \omega_{n-1,k+2}^{(j,3-j)} ; \quad u_{n,k}^{r(2,3-j)} = h_{n,k}^{(j)} \left[n\gamma_{k,n}^{(1)} - (2\alpha_n^- + n)\gamma_{k,n}^{(2)} \left(\frac{R_1}{z_{12}} \right)^2 \right] \omega_{n-1,k}^{(j,3-j)} ;$$

$$u_{n,k}^{\theta(2,3-j)} = h_{n,k}^{(j)} \left[\gamma_{k,n}^{(1)} - \gamma_{k,n}^{(2)} \left(\frac{R_1}{z_{12}} \right)^2 \right] \omega_{n-1,k}^{(j,3-j)} ;$$

$$u_{n,k}^{\theta(1,3-j)} = h_{n,k}^{(j)} \omega_{n-1,k+2}^{(j,3-j)} ; \quad f_{n,k}^{r(1,3-j)} = n(n-1) h_{n,k}^{(j)} \omega_{n-1,k+2}^{(j,3-j)} ; \quad f_{n,k}^{r(2,3-j)} = h_{n,k}^{(j)} \left[n(n-1)\gamma_{k,n}^{(1)} - \mu_n^- \gamma_{k,n}^{(2)} \left(\frac{R_1}{z_{12}} \right)^2 \right] \omega_{n-1,k}^{(j,3-j)} ;$$

$$f_{n,k}^{\theta(1,3-j)} = (n-1) h_{n,k}^{(j)} \omega_{n-1,k+2}^{(j,3-j)} ; \quad f_{n,k}^{\theta(2,3-j)} = h_{n,k}^{(j)} \left[(n-1)\gamma_{k,n}^{(1)} - (\alpha_n^- + n)\gamma_{k,n}^{(2)} \left(\frac{R_1}{z_{12}} \right)^2 \right] \omega_{n-1,k}^{(j,3-j)} ;$$

$$u_{n,k}^{tr(3-j)} = h_{n,k}^{(j)} \left[n \frac{\lambda_{n,k}^{(1)}}{2n-1} - \frac{n+2}{2n+3} \left(\frac{R_1}{z_{12}} \right)^2 \right] \omega_{n-1,k+1}^{(j,3-j)} ; \quad u_{n,k}^{t\theta(3-j)} = h_{n,k}^{(j)} \left[\frac{\lambda_{n,k}^{(1)}}{2n-1} - \frac{1}{2n+3} \left(\frac{R_1}{z_{12}} \right)^2 \right] \omega_{n-1,k+1}^{(j,3-j)} ;$$

$$f_{n,k}^{tr(3-j)} = h_{n,k}^{(j)} \left[n(n-1) \frac{\lambda_{n,k}^{(1)}}{2n-1} - \frac{n^2-n-4}{2n+3} \left(\frac{R_1}{z_{12}} \right)^2 \right] \omega_{n-1,k+1}^{(j,3-j)} ; \quad f_{n,k}^{t\theta(3-j)} = h_{n,k}^{(j)} \left[(n-1) \frac{\lambda_{n,k}^{(1)}}{2n-1} - \frac{n+1}{2n+3} \left(\frac{R_1}{z_{12}} \right)^2 \right] \omega_{n-1,k+1}^{(j,3-j)} ;$$

$$\mu_n^+ = \frac{2\nu}{1-2\nu} \left[3\alpha_n^+ - (n+1)(\alpha_n^+ + 1) \right] - n(2\alpha_n^+ - n - 1) ; \quad \mu_n^- = \frac{2\sigma}{1-2\sigma} \left[3\alpha_n^- + n(\alpha_n^- + 1) \right] + (n+1)(2\alpha_n^- + n) ;$$

$$\omega_{n,k}^{(j,3-j)} = \left(\frac{R_j}{z_{12}} \right)^n \left(\frac{R_{3-j}}{z_{12}} \right)^k .$$

Для системи (20) – (23) доведено теорему, аналогічну теоремі 4.

Чисельний експеримент. Для визначення напруженого стану в задачі необхідно чисельно розв’язати систему (20) – (23). Оскільки оператор системи фредгольмів, для цього можна коректно застосувати *метод редукції*. Чисельний розв’язок системи використовується для визначення деяких характерних напружень.

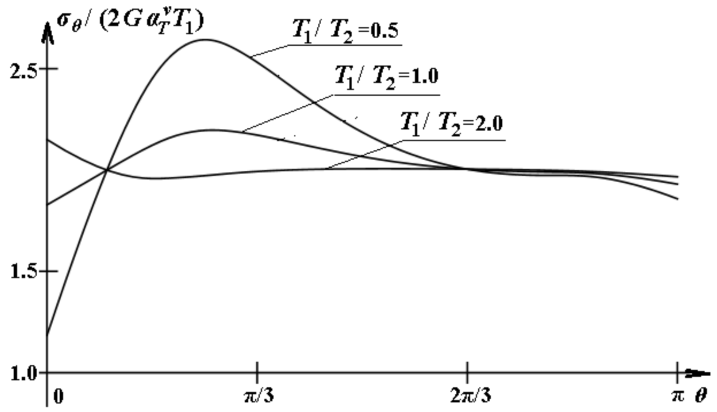

Рис. 1 – Графіки напружень $\sigma_\theta / (2G\alpha_T^\nu T_1)$ на поверхні порожнини $r_1 = R_1$ при $R_1 / z_{12} = 0.5$, $R_2 / z_{12} = 0.2$.

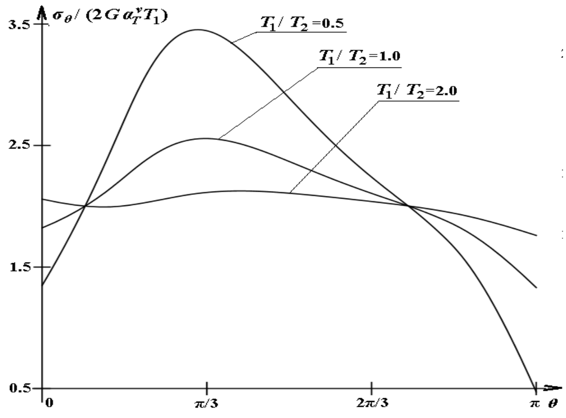

Рис. 2 – Графіки напружень $\sigma_\theta / (2G\alpha_T^\nu T_1)$ на поверхні порожнини $r_1 = R_1$ при $R_1 / z_{12} = 0.3$, $R_2 / z_{12} = 0.3$.

Графіки напружень $\sigma_\theta / (2G\alpha_T^\nu T_1)$ на поверхні порожнини $r_1 = R_1$ в залежності від відношення температур поверхонь порожнин ($T_1 / T_2 = 0.5; 1.0; 2.0$) наведено при: $R_1 / z_{12} = 0.5$, $R_2 / z_{12} = 0.2$ (рис. 1), $R_1 / z_{12} = 0.3$, $R_2 / z_{12} = 0.3$ (рис. 2), $R_1 / z_{12} = 0.2$, $R_2 / z_{12} = 0.5$ (рис. 3). На рис. 4 зображено графіки напружень $\sigma_z / (2G\alpha_T^\nu T_1)$ на осі між порожнинами також при різних температурах поверхонь і $R_1 / z_{12} = 0.2$, $R_2 / z_{12} = 0.5$. Якісний аналіз напружень показує, що найбільша їх концентрація спостерігається на поверхні порожнини, температура якої менше. Ефект концентрації напружень зростає зі зменшенням розміру порожнини, на якій він спостерігається.

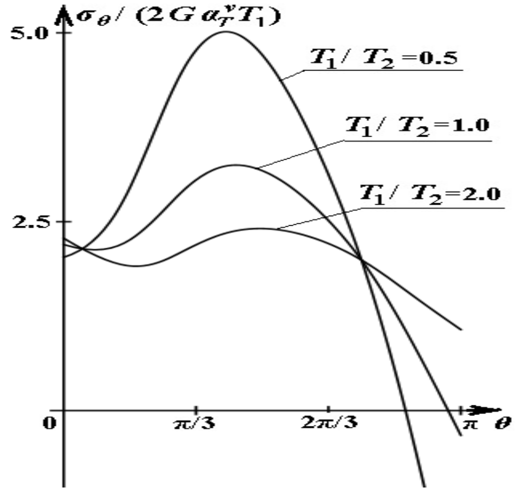

Рис. 3 – Графіки напружень $\sigma_\theta / (2G\alpha_T^\nu T_1)$ на поверхні порожнини $r_1 = R_1$ при $R_1 / z_{12} = 0.2$, $R_2 / z_{12} = 0.5$.

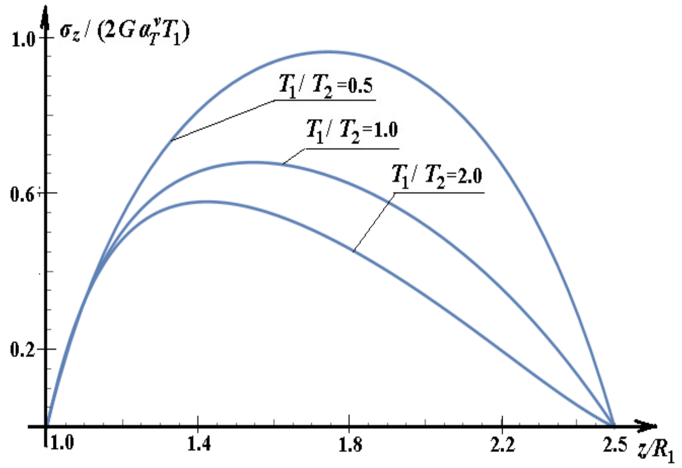

Рис. 4 – Графіки напружень $\sigma_z / (2G\alpha_T^\nu T_1)$ на осі між порожнинами $R_1 / z_{12} = 0.2$, $R_2 / z_{12} = 0.5$.

Перспективи подальших досліджень. Природним продовженням дослідження цієї статті є перехід від локальної до глобальної моделі термопружного стану пористого і композиційного матеріалів. Зауважимо, однак, що для цього необхідним є подальший розвиток математичного апарату узагальненого методу Фур'є.

Висновки. В даній статті побудовано локальну стаціонарну модель термонапруженого стану пористого матеріалу. Модель основана на незв'язаних крайових задачах для стаціонарних рівнянь теплопровідності і термопружності для простору з двома сферичними порожнинами. Температурне поле визначається сталою температурою на поверхнях порожнин, які вважаються вільними від зусиль. Задача розв'язувалася узагальненим методом Фур'є (УМФ), для чого у роботі наведено його подальший розвиток на певний клас задач термопружності. Для цього введено системи однаково напрямлених сферичних координат, початки яких пов'язані з центрами порожнин. У роботі побудовано новий набір осесиметричних базисних розв'язків рівняння Ламе для кулі та доведено теореми додавання для нього і для розв'язків векторного бігармонічного рівняння в уведених системах координат. Формалізм УМФ дав можливість звести крайові задачі до алгебраїчних розв'язувальних систем з фредгольмовими операторами у просторі l_2 за умови неперетинання сферичних поверхонь. При чисельному розв'язанні систем використано метод редукції. Отримано графіки напружень σ_θ на поверхні однієї з порожнин і напружень σ_z на осі симетрії задачі між порожнинами при різних відносних розмірах порожнин та різних температурах їх нагріву. Отримані результати узгоджуються з відомими для однієї порожнини і опосередковано підтверджуються графіками з рис. 4. Збіжність методу редукції перевірено чисельно.

Список літератури

1. *Kassab A.*, *Divo E.* Application of the boundary element method to non-homogeneous media: heat conduction and thermoelasticity // WIT Transactions on State of the Art in Science and Engineering. – 2010. – Vol 43. – P. 87 – 101. DOI:10.2495/978-1-84564-492-5/07.
2. *Hemayati M.*, *Karami G. A.* Boundary Elements and Particular Integrals Implementation for Thermoelastic Stress Analysis // International Journal of Engineering. – 2002. – Vol. 15. – Issue 2. – P. 197 – 204.
3. *Shiah Y. C.*, *Tan C. L.* Thermoelastic analysis of 3D generally anisotropic bodies by the boundary element method // European Journal of Computational Mechanics. – 2016. – Vol. 25. – No. 1-2. – P. 91 – 108. DOI: 10.1080/17797179.2016.1181038.
4. *Zander N.*, *Kollmannsberger S.*, *Ruess M.*, *Yosibach Z.*, *Rank E.* The Finite Cell Method for linear thermoelasticity // Computers and Mathematics with Applications. – 2012. – Vol. 64. – P. 3527 – 3541. DOI:10.1016/j.camwa.2012.09.
5. *Al-Ali A. Y.*, *Almutairi K. H.*, *Rawy E. K.*, *Ghaleb A. F.*, *Abou-Dina M.S.* Deformation of a long thermoelastic rod of rectangular normal cross-section under mixed boundary conditions by boundary integrals // Journal of the Egyptian Mathematical Society. – 2016. – Vol. 24. – P. 449 –

457. DOI: 10.1016/j.joems.2015.09.003.

6. *Kaczyński A.* On 3D symmetrical thermoelastic anticrack problems // Arch. Mech. – 2016. – Vol. 68. – No. 2. – P. 99 – 112.
7. *Кіт Г. С.*, *Івасько Н. М.* Двовимірна задача термопружності для півпростору з вільною, жорсткою, гладко або гнучко закріпленою межею за дії джерел тепла // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2020. – Т. 63. – № 4. – С. 73 – 80.
8. *Сулим Г. Т.*, *Томашевский М. М.*, *Пастернак Я. М.* Интегральные уравнения плоской термоупругости для полуплоскости с тонкими включениями // Теоретическая и прикладная механика. – 2013. – Вып. 7 (53). – С. 101 – 108.
9. *Сулим Г. Т.* Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. – Львів : НТШ, 2007. – 716 с.
10. *Процюк Б. В.* Визначення статичного термопружного стану шаруватих термочутливих плити, циліндра і кулі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2021. – Т. 64. – № 1. – С. 87 – 106. DOI: 10.15407/mmpmf2021.64.1.87-106.
11. *Protsyuk B. V.* Axisymmetric static thermoelastic state of a smoothly fixed finite cylinder layered along the axis // J. Math. Sci. – 2012. – Vol. – 187. – P. 737 – 757. DOI: 10.1007/s10958-012-1098-3.
12. *Bitsadze L.* Boundary value problems of the theory of thermoelasticity for the sphere with voids // Seminar of I. Vekua Institute of Applied Mathematics REPORTS. – 2019. – Vol. 45. – P. 16 – 27.
13. *Kurennov S .S.*, *Nikolaev A. G.* First Fundamental Axisymmetric Problem of Thermoelasticity for a Compressed Spheroid with a Concentric Spherical Cavity // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 2004. – Vol. 45. – P. 76 – 81.
14. *Nikolaev A. G.*, *Kurennov S. S.* The nonaxisymmetric contact thermoelastic problem for a half-space with a motionless rigid spherical inclusion // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. – 2004. – Vol. 77. – P. 209 – 215. DOI: 10.1023/B:JOEP.0000020741.03468.6e.
15. *Николаев А. Г.*, *Куреннов С. С.* Термоупругие напряжения в пространстве с периодически расположенными упругими шаровыми включениями // Проблемы машиностроения. – 2004. – № 1. – С. 35 – 48.
16. *Tokovyy Y.*, *Ma C.* Analytical solutions to the 2D elasticity and thermoelasticity problems for inhomogeneous planes and half-planes // Arch Appl Mech. – 2009. – vol. 79. – P. 441 – 456. DOI: 10.1007/s00419-008-0242-5.
17. *Николаев А. Г.*, *Танчик Е. А.* Упругая механика многокомпонентных тел: монография. – Харьков: Нац. аэрокосм. ун-т им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», 2014. – 272 с.
18. *Николаев А. Г.* Формулы переразложения векторных решений уравнения Ламе в сферической и сфероидальной системах координат // Математические методы анализа динамических систем. – 1984. – Вып. 8. – С. 100 – 104.
19. *Николаев А. Г.* Обоснование метода Фурье в основных краевых задачах теории упругости для некоторых пространственных канонических областей // Доповіді НАН України. – 1998. – № 2. – С. 78 – 83.

References (transliterated)

1. Kassab A., Divo E. Application of the boundary element method to non-homogeneous media: heat conduction and thermoelasticity. *WIT Transactions on State of the Art in Science and Engineering*. 2010, vol 43, pp. 87–101. DOI:10.2495/978-1-84564-492-5/07.
2. Hemayati M., Karami G. A. Boundary Elements and Particular Integrals Implementation for Thermoelastic Stress Analysis. *International Journal of Engineering*. 2002, vol. 15, no. 2, pp. 197–204.
3. Shiah Y. C., Tan C. L. Thermoelastic analysis of 3D generally anisotropic bodies by the boundary element method. *European Journal of Computational Mechanics*. 2016, vol. 25, no. 1-2, pp. 91–108. DOI: 10.1080/17797179.2016.1181038.
4. Zander N., Kollmannsberger S., Ruess M., Yosibach Z., Rank E. The Finite Cell Method for linear thermoelasticity. *Computers and Mathematics with Applications*. 2012, vol. 64, pp. 3527–3541. DOI:10.1016/j.camwa.2012.09.
5. Al-Ali A. Y., Almutairi K. H., Rawy E. K., Ghaleb A. F., Abou-Dina M.S. Deformation of a long thermoelastic rod of rectangular normal cross-section under mixed boundary conditions by boundary integrals. *Journal of the Egyptian Mathematical Society*. 2016, vol. 24, pp. 449–457. DOI: 10.1016/j.joems.2015.09.003.
6. Kaczyński A. On 3D symmetrical thermoelastic anticrack problems. *Arch. Mech*. 2016, vol. 68, no. 2, pp. 99–112.
7. Kit G. S., Ivas`ko N. M. Dvovymirna zadacha termopruzhnosti dlya pivprostoru z vil'noyu, zhorstkoyu, gladko abo gnuchko zakriplenoyu mezheyu za diyi dzherel tepla [Two-dimensional problem of thermoelasticity for a half-space with a free, rigid, smoothly or flexibly fixed boundary under the action of heat sources]. *Mat. metody ta fiz.-mekhx. Polya* [Mathematical methods and physical and mechanical fields]. 2020, vol. 63, no. 4, pp. 73–80.
8. Sulim G. T., Tomashevskiy M. M., Pasternak Ya. M. Integral'nye uravneniya ploskoy termouprugosti dlya poluploskosti s tonkimi vklyucheniyami [Integral equations of plane thermoelasticity for a half-plane with thin inclusions]. *Teoreticheskaya i prikladnaya mekhanika* [Theoretical and applied mechanics]. 2013, vol. 7 (53), pp. 101–108.
9. Sulym G. T. *Osnovy matematychnoyi teoriyi termopruzhnoyi rivnovagy deformivnykhx tverdykh til z tonkymy vklyuchennyamy* [Fundamentals of the mathematical theory of thermoelastic equilibrium of deformable solids with thin inclusions]. L`viv, NTSh Publ., 2007. 716 p.
10. Protsyuk B. V. Vyznachennya statychnogo termopruzhnogo stanu sharuvatykh termochutlyvykh plyty, tsylindra i kuli [Determination of the static thermoelastic state of layered thermosensitive plates, cylinders and spheres]. *Mat. metody ta fiz.-mekh. Polya* [Mathematical methods and physical and mechanical fields]]. 2021, vol. 64, no. 1, pp. 87–106. DOI: 10.15407/mmpmf2021.64.1.87-106.
11. Protsyuk B. V. Axisymmetric static thermoelastic state of a smoothly fixed finite cylinder layered along the axis. *J. Math. Sci*. 2012, vol, 187, pp. 737–757. DOI: 10.1007/s10958-012-1098-3.
12. Bitsadze L. Boundary value problems of the theory of thermoelasticity for the sphere with voids. *Seminar of I. Vekua Institute of Applied Mathematics REPORTS*. 2019, vol. 45, pp. 16–27.
13. Kurennov S .S., Nikolaev A. G. First Fundamental Axisymmetric Problem of Thermoelasticity for a Compressed Spheroid with a Concentric Spherical Cavity. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2004, vol. 45, pp. 76–81.
14. Nikolaev A. G., Kurennov S. S. The nonaxisymmetric contact thermoelastic problem for a half-space with a motionless rigid spherical inclusion. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 2004, vol. 77, pp. 209–215. DOI: 10.1023/B:JOEP.0000020741.03468.6e.
15. Nikolaev A. G., Kurennov S. S. Termouprugie napryazheniya v prostranstve s periodicheski raspolozhennymi uprugimi sharovymi vklyucheniyami [Thermoelastic stresses in space with periodically located elastic spherical inclusions]. *Problemy mashinostroeniya* [Problems of mechanical engineering]. 2004, vol. 1, pp.35–48.
16. Tokovyy Y., Ma C. Analytical solutions to the 2D elasticity and thermoelasticity problems for inhomogeneous planes and half-planes. *Arch Appl Mech*. 2009, vol. 79, pp. 441–456. DOI: 10.1007/s00419-008-0242-5.
17. Nikolaev A. G., Tanchik E. A. *Uprugaya mekhanika mnogokomponentnykh tel: monografiya* [Elastic mechanics of multicomponent bodies: mo-

nograph.]. Kharkov, Nac. ayerokosm. un-t im. N. E. Zhukovskogo «KhAI» Publ., 2014. 272 p.

18. Nikolaev A. G. Formuly pererazlozheniya vektornykh resheniy uravneniya Lame v sfericheskoy i sferoidal'noy sistemakh koordinat [Re-expansion formulas for vector solutions of the Lame equation in spherical and spheroidal coordinate systems]. *Matematicheskie metody analiza dinamicheskikh system* [Mathematical methods for the analysis of dynamical systems]. 1984, vol. 8, pp. 100–104.
19. Nikolaev A. G. Obosnovanie metoda Fur'e v osnovnykh kraevykh zadachakh teorii uprugosti dlya nekotorykh prostranstvennykh kanonicheskikh oblastey [Justification of the Fourier method in the main boundary value problems of the theory of elasticity for some spatial canonical regions.]. *Dopovidi NAN Ukrayiny* [Reports of the National Academy of Science of Ukraine]. 1998, no. 2, pp. 78–83.

Надійшла (received) 10.04.2023

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Ніколаєв Олексій Георгійович – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри вищої математики та системного аналізу, Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського «Харківський авіаційний інститут», м. Харків; тел.: (067) 996-04-92; e-mail: a.nikolaev@khai.edu.

Николаев Алексей Георгиевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики и системного анализа, Национальный аэрокосмический университет им. М. Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт», г. Харьков; тел.: (067) 996-04-92; e-mail: a.nikolaev@khai.edu.

Nikolaev Oleksii Georgiovich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of the Department of Higher Mathematics and System Analysis, M. Y. Zhukovsky National Aerospace University "Kharkiv Aviation Institute", Kharkiv; tel.: (067) 996-04-92; e-mail: a.nikolaev@khai.edu.

Скіцка Марія Вікторівна **–** аспірант кафедри вищої математики та системного аналізу, Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського «Харківський авіаційний інститут», м. Харків; тел.: (095) 596-30-79; e-mail: m.skitska@khai.edu.

Скицка Мария Викторовна – аспирант кафедры высшей математики та системного аналізу, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт», г. Харьков; тел.: (095) 596-30-79; e-mail: m.skitska@khai.edu.

Skitska Mariia Viktorivna – postgraduate student at the Department of Higher Mathematics and System Analysis, M. Y. Zhukovsky National Aerospace University "Kharkiv Aviation Institute", Kharkiv; tel.: (095) 596-30-79; e-mail: m.skitska@khai.edu.