

**О. В. ВОРОПАЙ, С. І. ПОВАЛЯЄВ, П. А. ЄГОРОВ**

### **ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ДЛЯ БАЛКИ ТИМОШЕНКО З ДОДАТКОВОЮ В'ЯЗКО-ПРУЖНОЮ ОПОРОЮ ПРИ НЕСТАЦІОНАРНОМУ ДЕФОРМУВАННІ**

Розглядається нестационарне навантаження механічної системи, яка складається з балки, шарнірно-обпертої по краях, і додаткової опори, встановленої в прольоті балки. Деформування балки моделюється на основі гіпотез С. П. Тимошенка з урахуванням інерції обертання та зсуву. Деформування балки описується системою диференціальних рівнянь у частинних похідних, яка розв'язується аналітично за допомогою розкладання шуканих функцій у відповідні ряди Фур'є і подальшого використання інтегрального перетворення Лапласа. Передбачається, що додаткова опора має лінійно-пружну і лінійно-в'язку складові, а в точці приєднання додаткової опори до балки переміщення збігаються. Реакція між балкою та додатковою опорою замінюється зовнішньою невідомою зосередженою силою, прикладеною до балки та є змінною у часі. Закон зміни у часі цієї невідомої реакції визначається з інтегрального рівняння Вольтерра. Викладається розв'язання оберненої задачі механіки деформівного твердого тіла, тобто передбачається, що нам відома зміна в часі прогину в деякій точці балки з додатковою опорою, а закон зміни в часі зовнішнього імпульсного навантаження, що викликав ці зміни прогину, є невідомим. Точка прикладення зовнішнього збурюючого навантаження і точка приєднання додаткової опори вважаються відомими і не змінюються в процесі деформування (при розв'язанні задачі передбачалося, що це можуть бути будь-які точки балки за винятком її країв). Описана обернена задача зводиться до системи двох інтегральних рівнянь Вольтерра першого роду щодо невідомих зовнішнього збурюючого навантаження і реакції між пластиною і додатковою опорою, яка розв'язується аналітично-числовим методом. Наведено аналітичні співвідношення та результати обчислень для конкретних числових параметрів. Результати, отримані в даній роботі, можуть бути використані для непрямого вимірювання імпульсних і ударних навантажень, що діють на балки з додатковими опорами, для яких враховуються не тільки пружні, але і лінійно-в'язкі характеристики.

**Ключові слова:** багатопрілітна балка Тимошенко, додаткова в'язко-пружна опора, імпульсне навантаження, інтегральні рівняння Вольтерра, обернена задача, ідентифікація.

**А. В. ВОРОПАЙ, С. И. ПОВАЛЯЕВ, П. А. ЕГОРОВ**

### **ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ БАЛКИ ТИМОШЕНКО С ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ВЯЗКО-УПРУГОЙ ОПОРОЙ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ**

Рассматривается нестационарное нагружение механической системы, которая состоит из балки, шарнирно-опёртой по краям, и дополнительной опоры, установленной в пролёте балки. Деформирование балки моделируется на основе гипотез С. П. Тимошенко с учётом инерции вращения и сдвига. Деформирование балки описывается системой дифференциальных уравнений в частных производных, которая решается аналитически при помощи разложения искомого функций в соответствующие ряды Фурье и дальнейшего использования интегрального преобразования Лапласа. Предполагается, что дополнительная опора имеет линейно-упругую и линейно-вязкую составляющие, а в точке присоединения дополнительной опоры к балке перемещения совпадают. Реакция между балкой и дополнительной опорой заменяется внешней неизвестной сосредоточенной силой, приложенной к балке, которая изменяется во времени. Закон изменения во времени этой неизвестной реакции определяется из решения интегрального уравнения Вольтерра. Излагается решение обратной задачи механики деформируемого твёрдого тела, то есть предполагается, что известны изменения во времени прогиба в некоторой точке балки с дополнительной опорой, а закон изменения во времени внешней импульсной нагрузки, вызвавший изменения прогиба, является неизвестным. Точка приложения внешней возмущающей нагрузки и точка присоединения дополнительной опоры считаются известными и не изменяются в процессе деформирования (при получении решения задачи предполагалось, что это могут быть любые точки балки за исключением её краёв). Описанная обратная задача сводится к системе двух интегральных уравнений Вольтерра первого рода относительно неизвестных внешней возмущающей нагрузки и реакции между пластиной и дополнительной опорой, которая решается аналитико-численным методом. Приведены аналитические соотношения и результаты вычислений для конкретных численных параметров. Результаты, полученные в данной работе, могут быть использованы для непрямого измерения импульсных и ударных нагрузок, воздействующих на балки с дополнительными опорами, для которых учитываются не только упругие, но и линейно-вязкие характеристики.

**Ключевые слова:** многопролетная балка Тимошенко, дополнительная вязко-упругая опора, импульсная нагрузка, интегральное уравнение Вольтерра, обратная задача, идентификация.

**A. V. VOROPAY, S. I. POVALIAIEV, P. A. YEGOROV**

### **INVERSE PROBLEM FOR A TIMOSHENKO BEAM WITH AN ADDITIONAL VISCOELASTIC SUPPORT UNDER NONSTATIONARY DEFORMATION**

The non-stationary loading of a mechanical system consisting of a beam hinged at the edges and an additional support installed in the span of the beam is considered. The deformation of the beam is modeled on the basis of Timoshenko's hypotheses, taking into account the influence of rotatory inertia and shear. The deformation of the beam is described by a system of partial differential equations, which is solved analytically by means of expansion of the unknown functions into the relevant Fourier series and further use of the Laplace integral transformation. It is assumed that the additional support has linear-elastic and linear-viscous components, and the displacements coincide at the point where the additional support is connected to the beam. The reaction between the beam and the additional support is replaced by an external unknown concentrated force applied to the beam, which varies in time. The law of time variation of this unknown reaction is determined by solving the Volterra integral equation. The inverse problem of deformable solid mechanics is solved, that is, it is assumed that the deflection at a point of the beam with the additional support is known, whereas the law of time variation of the external impulse load causing the deflection is unknown. The application point of the external load and the point of the additional support connection are considered to be known and do not change in the process of deformation (when obtaining the solution of the problem it was supposed that these could be any points of the beam except for its ends). The described inverse problem is reduced to a system of two Volterra integral equations of the first kind with regard to the unknowns of the external disturbing load and reaction between the plate and the additional support, which is solved by analytical and numerical method. Analytical relations and calculation results for specific numerical parameters are given. The results obtained in this work can be used for indirect measurement of impulse and shock loads acting on beams with additional supports, for which not only elastic but also linear-viscous characteristics are taken into account.

**Key words:** Timoshenko multi-span beam, additional viscoelastic support, impulse loading, Volterra integral equation, inverse problem, identification.

**Вступ та аналіз літератури.** Часто конструктори і розрахувачі стикаються з проблемою недостатньої інформації про дію навантажень на механічні системи. Особливо серйозні проблеми виникають у разі нестационарного деформування елементів конструкцій. У низці випадків під час аналізу напружено-деформованого стану ударні та інші подібні навантаження моделюються приблизно або взагалі замінюються коефіцієнтами запасу, динамічності навантаження тощо. І тільки для особливо відповідальних елементів або конструкцій загалом проводиться низка дорогих експериментальних досліджень. Розв'язання обернених задач ідентифікації невідомих нестационарних навантажень під час оброблення експериментальних даних може істотно знизити вартість і час досліджень, а іноді частково або повністю замінити реальні дослідження спеціальними обчислювальними експериментами.

У цій роботі розглядаються питання, пов'язані з нестационарним деформуванням шарнірно-обпертих балок із додатковими опорами. Деформування балки моделюється на основі гіпотез С. П. Тимошенка з урахуванням інерції обертання та зсуву [1 – 3]. Опори приймаються в'язко-пружними, тому що в реальності рідко трапляються суто пружні опори.

Ця робота є логічним продовженням роботи [4], в якій описано розв'язання прямої задачі про нестационарні коливання балки з додатковою в'язко-пружною опорою. Передбачається, що додаткова опора має лінійно-пружну і лінійно-в'язку складові, а в точці приєднання додаткової опори до балки переміщення збігаються. Реакція між балкою та додатковою опорою замінюється зовнішньою невідомою зосередженою силою, прикладеною до балки, та є змінною у часі. Закон зміни у часі цієї невідомої реакції визначається з інтегрального рівняння Вольтерра. Також в [4] наведено і більш докладний огляд літератури. Вкажемо тільки схожі статті [5, 6], в яких розв'язується задача для шарнірно-обпертої балки з додатковою лінійно-пружною опорою.

Для розглянутої механічної системи можливі наступні постановки обернених задач:

- 1) визначення параметрів додаткової в'язко-пружної опори (коефіцієнту жорсткості  $c$  і демпфування  $\kappa$ ) при відомому (тарованому) навантаженні, або підбір необхідних характеристик в'язко-пружної опори ( $c$  і  $\kappa$ ) для забезпечення необхідних параметрів напружено-деформованого стану або виконання деяких обмежень;
- 2) ідентифікація повної системи навантажень (збурювальної сили  $P(t)$  і реакції між балкою та додатковою опорою  $R(t)$ ) при відомих характеристиках в'язко-пружної опори (коефіцієнту жорсткості  $c$  і демпфування  $\kappa$ );
- 3) ідентифікація  $P(t)$  і  $R(t)$ , а також точки прикладення збурювальної сили  $x_0$  при відомих  $c$  і  $\kappa$ ;
- 4) ідентифікація збурювальної сили  $P(t)$  і реакції  $R(t)$  при невідомих характеристиках в'язко-пружної опори (коефіцієнту жорсткості  $c$  і демпфування  $\kappa$ );
- 5) ідентифікація повної системи навантажень ( $P(t)$  і  $R(t)$ ), а також їх місць прикладення при невідомих характеристиках в'язко-пружної опори (коефіцієнтів  $c$  і  $\kappa$ ).

П'ята постановка, із зазначених вище, є найбільш загальною. Розв'язання оберненої задачі для п'ятої постановки буде мати три етапи: перший – визначення координат; другий – знаходження законів зміни в часі двох невідомих навантажень ( $P(t)$  і  $R(t)$ ); третій – підбір необхідних характеристик в'язкопружної опори ( $c$  і  $\kappa$ ).

Розглянемо докладно розв'язання оберненої задачі для другої постановки, тому що у реальному випадку (найчастіше) геометрію об'єкта можна заміряти безпосередньо, а параметри опори, що встановлена (вже існує), теж відомі.

Як вихідні дані для перерахованих обернених задач використовуються зміни прогину або деформації балки в часі (вони можуть вимірюватись експериментально), причому похибка їхнього завдання (виміру) не перевищує величини  $\delta > 0$ , тобто  $\|w_\delta - \bar{w}\| \leq \delta$  ( $w_\delta$  – прогин, що вимірюється,  $\bar{w}$  – точні значення прогину).

В класичних монографіях [2, 3] розглянуто коливання багатопрогонних балок з додатковими пружними опорами під дією імпульсних і рухомих навантажень. Розв'язанню нестационарних прямих та обернених задач для багатопрогонних балок з додатковими пружними опорами присвячені роботи [5, 6]. Так у роботі [6] розв'язані задачі ідентифікації рухомих навантажень, що діють на в'язко-пружні балки.

Таким чином, можна стверджувати, що наведене дослідження є продовженням та поглибленим розвитком робіт [4 – 6]. При його виконанні використані аналогічні диференціальні рівняння деформування балок Тимошенка, аналогічні методи та подібні алгоритми розв'язання задачі. Втім, у цій роботі зазначені ідеї та підходи, застосовані до нестационарних коливань балки, що має додаткову в'язко-пружну опору.

Враховуючи сказане вище, актуальним завданням є створення математичної моделі в'язко-пружної проміжної опори, яку можна застосовувати для прямих та обернених задач нестационарного деформування багатопрогонних балок.

**Постановка задачі.** Механічна система складається з пружної ізотропної балки, шарнірно-обпертої по краях, і додаткової зосередженої в'язко-пружної опори, що контактує з балкою в певній точці (рис. 1). Вважається, що додаткова опора встановлена поперечно до балки і шарнірно з'єднана з нижньою гранню. Коефіцієнти жорсткості та демпфування опори постійні. На балку в деякій точці діє поперечне імпульсне навантаження  $P(t)$ , що викликає нестационарні коливання балки з додатковою опорою. Вплив додаткової в'язко-пружної опори на балку моделюється у вигляді зовнішньої нестационарної сили (яка є реакцією між балкою і додатковою опорою, взятою з протилежним знаком)  $-R(t)$ , прикладеної до балки в місці закріплення опори. При розв'язанні задачі передбачається, що координати точок прикладення навантаження і координати встановлення додаткової опори довільні (будь-які точки, що належать балці і не лежать на її краях), також ці координати не змінюються протя-

гом коливального процесу.

Розглянуто конкретний випадок з однією збурювальною силою і однією проміжною опорою, проте запропонований підхід може бути поширений на скінченне число збурюючих навантажень  $P_i(t)$ , причому  $i=1 \dots I$ , та проміжних опор  $R_j(t)$ ,  $j=1 \dots J$ .

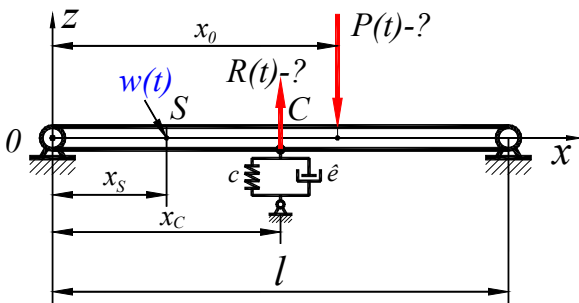


Рис. 1 – Схема навантаження балки з додатковою опорою.

В даному випадку, як вихідні дані, використовуються відомі залежності зміни прогину балки у часі  $w(t)$  в деякій точці, а потрібно при одночасній дії на балку системи з двох навантажень визначити невідомі зовнішню силу  $P(t)$  і реакцію між балкою і додатковою в'язко-пружною опорою  $R(t)$ .

**Математична модель.** Відповідно до [7] система диференціальних рівнянь з частинними похідними для балки Тимошенка, яка з урахуванням відповідних початкових та граничних умов визначає розв'язок, що описує нестационарні деформаційні процеси, має вигляд:

$$\begin{cases} G'F \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - P(x, t) + R(x, t); \\ EI \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + G'F \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \psi \right) = \rho \cdot I \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \end{cases} \quad (1)$$

де  $t$  – час;  $h$  – товщина балки;  $b$  – ширина балки;  $G' = k' \cdot G$ ;  $k'$  – коефіцієнт зсуву;  $F = bh$  – площа поперечного перерізу балки;  $I = bh^3/12$ ;  $w$  – прогин серединної лінії балки;  $\psi$  – кут повороту;  $\rho$  – густина матеріалу балки; пружні постійні:  $E$  – модуль пружності,  $G$  – модуль зсуву,  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона.

Вкажемо, що  $P(x, t)$  і  $R(x, t)$  – збурювальне навантаження та реакція взаємодії між балкою та додатковою опорою відповідно.

В результаті розв'язання системи диференціальних рівнянь (1) за нульових початкових умов для шарнірно-обпертої балки можна отримати наступний аналітичний вираз для функції прогинів:

$$w(x, t) = \int_0^t K_P(x, t-\tau) P(\tau) d\tau - \int_0^t K_R(x, t-\tau) R(\tau) d\tau, \quad (2)$$

де  $K_i(x, t)$  – відповідні ядра інтегралів Дюамеля (згорток) [8]:

$$K_i(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_{ik}}{\Delta_k} \cdot \sin \frac{k\pi \cdot x}{l} \sum_{p=1}^2 \Omega_{pk} \cdot \sin \omega_{pk} t.$$

Аналітичні вирази для визначення власних частот мають вигляд:

$$\omega_{1k} = \sqrt{0.5(\lambda_k^2(c_T^2 + c_p^2) + c_T^2 12/h^2 + \Delta_k)}; \quad \omega_{2k} = \sqrt{0.5(\lambda_k^2(c_T^2 + c_p^2) + c_T^2 12/h^2 - \Delta_k)}.$$

У наведених співвідношеннях використані такі позначення:

$c_T = \sqrt{\frac{G'}{\rho}}$  – швидкість поширення хвиль з теорії Тимошенка;  $c_b = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$  – швидкість поширення поздовжніх

хвиль у стержні / балці;  $\lambda_k = \frac{k}{l}$ ,  $\Delta_k = \sqrt{(\lambda_k^2(c_T^2 + c_b^2) + c_T^2 \cdot 12/h^2)^2 - 4 \cdot \lambda_k^4 \cdot c_T^2 \cdot c_b^2}$ ;  $\Omega_{1k} = \omega_{1k} - \frac{\lambda_k^2 \cdot c_b^2 + c_T^2 \cdot 12/h^2}{\omega_{1k}}$ ;  $\Omega_{2k} = \omega_{2k} - \frac{\lambda_k^2 \cdot c_b^2 + c_T^2 \cdot 12/h^2}{\omega_{2k}}$ .

У випадку зосередженого навантаження балки в точці з координатою  $x_i$  коефіцієнти  $C_{ik}$  матимуть вигляд:

$$C_{ik} = \frac{2}{\rho \cdot l \cdot b \cdot h} \sin(\lambda_k \cdot x_i).$$

Реакцію додаткової опори, яка встановлена в точці  $x_C$ , можна представити як:

$$R(t) = \kappa \frac{dw(x_C, t)}{dt} + c \cdot w(x_C, t), \quad (3)$$

де  $c$  – коефіцієнт жорсткості додаткової опори, Н/м;  $\kappa$  – коефіцієнт демпфування, Н·с/м;  $w(x_C, t)$  – прогин балки в точці приєднання додаткової опори, м.

Тоді для прогину в точці приєднання реакції в'язко-пружної опори можна записати наступний вираз [9]:

$$w(x_C, t) = \int_0^t K_e(t-\tau)R(\tau)d\tau, \quad (4)$$

де  $K_e(t) = \frac{1}{\kappa} \cdot e^{-\frac{t}{\kappa}}$  – кінцево-різницеве ядро інтеграла типу згортки, що враховує в'язкі і пружні характеристики додаткової опори.

Для точки  $x_C$  можна записати наступні співвідношення для прогину з боку балки та з боку додаткової опори:

$$w(x_C, t) \equiv w_C = \int_0^t K_e(t-\tau)R(\tau)d\tau = \int_0^t K_P(x_C, t-\tau)P(\tau)d\tau - \int_0^t K_R(x_C, t-\tau)R(\tau)d\tau. \quad (5)$$

У точці  $x_S$  (рис. 1) аналітичний вираз для визначення прогину балки буде мати такий вигляд:

$$w(x_S, t) \equiv w_S(t) = \int_0^t K_P(x_S, t-\tau)P(\tau)d\tau - \int_0^t K_R(x_S, t-\tau)R(\tau)d\tau. \quad (6)$$

Якщо у виразі (6) невідома зміна за часом збурювального навантаження  $P(t)$  і реакції між балкою та додатковою опорою  $R(t)$ , то цей вираз є інтегральним рівнянням Вольтерра з двома невідомими. Для розв'язання оберненої задачі інтегральне рівняння (6) необхідно доповнити двома виразами для прогину в точці контакту балки та додаткової опори (5).

Тоді з (5) і (6) можна скласти наступну систему інтегральних рівнянь:

$$\begin{cases} \int_0^t K_{11}(t-\tau)P(\tau)d\tau + \int_0^t K_{12}(t-\tau)R(\tau)d\tau = w_S(t); \\ \int_0^t K_{21}(t-\tau)P(\tau)d\tau + \int_0^t K_{22}(t-\tau)R(\tau)d\tau = 0, \end{cases} \quad (7)$$

де ядра  $K_{11}(t) = K_{PS}(t) = K_{PS}(x_S, t)$ ,  $K_{12}(t) = K_R(x_S, t)$ ,  $K_{21}(t) = K_P(x_C, t)$ ,  $K_{22}(t) = K_R(x_C, t) + K_e(t)$ .

Розв'язання подібної системи інтегральних рівнянь Вольтерра можна віднести до некоректних задач математичної фізики (причому, як по Адамару, так і по Тихонову), тому для розв'язання системи використовувався регуляризувальний алгоритм Тихонова [10].

Дискретний аналог системи інтегральних рівнянь (7) має такий вигляд:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_s \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

У матричній системі (8) вектор  $\mathbf{p}_1$  відповідає невідомій функції зміни в часі зовнішнього навантаження  $P(t)$ , вектор  $\mathbf{p}_2$  – реакції між пластиною і додатковою в'язко-пружною опорою  $R(t)$ ,  $\mathbf{w}_s$  – вихідним даним для ідентифікації (змінам прогину)  $w_S(t)$ ; матриці  $\mathbf{A}_{11}$ ,  $\mathbf{A}_{12}$ ,  $\mathbf{A}_{21}$  і  $\mathbf{A}_{22}$  – відповідають ядрам  $K_{11}(t)$ ,  $K_{12}(t)$ ,  $K_{21}(t)$  і  $K_{22}(t)$ .

Матрична система (8) зводиться до двох незалежних матричних рівнянь [11] на основі узагальнення методу Крамера, тобто застосування узагальненого алгоритму Крамера для блокових матриць:

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{p}_j = \mathbf{D}_j, \quad (9)$$

де  $\mathbf{D}$  – визначник блокової матриці  $\mathbf{A}$ , а  $\mathbf{D}_j$  – визначник блокової матриці  $\mathbf{A}_j$ , у якій  $j$ -й стовпець замінюється стовпцем правої частини.

Кожне матричне рівняння (9) є незалежною системою лінійних алгебраїчних рівнянь і згідно регуляризувального алгоритму Тихонова розв'язувалися еквівалентні регуляризовані СЛАР виду:

$$(\mathbf{D}^T \mathbf{D} + \alpha_j \mathbf{C}) \cdot \mathbf{p}_j = \mathbf{D}^T \mathbf{D}_j, \quad (10)$$

де  $\mathbf{C}$  – симетрична трьохдіагональна матриця, вид якої наведений в [7].

У результаті розв'язання двох СЛАР виду (10) знаходиться сила взаємодії між пластиною та додатковою в'язкопружною опорою  $R(t)$  і невідоме навантаження  $P(t)$ , що збурює коливання.

**Обчислювальний експеримент.** При розрахунках *серединна лінія балки* у недеформованому стані збігалася з віссю  $Ox$  декартової системи координат. Обчислення проводилися за наступних значень параметрів:  $\rho = 7890 \text{ кг/м}^3$ ;  $\nu = 0.3$ ;  $E = 2.07 \cdot 10^{11} \text{ Па}$  (значення механічних констант для балки відповідають легованій сталі); довжина балки  $l = 0.8 \text{ м}$ , ширина  $b = 0.05 \text{ м}$ , товщина  $h = 0.04 \text{ м}$ ; координати точки прикладення збурюючого навантаження мають значення:  $x_0 = 0.5 \text{ м}$ , точки кріплення додаткової в'язко-пружної опори до пластини:

$x_C = 0.4$  м (середина балки), точка, в якій досліджувалася зміна прогину у часі:  $x_S = 0.2$  м. Значення коефіцієнта лінійної жорсткості додаткової опори  $c_1 = 10^5$  Н/м, а коефіцієнт лінійно-в'язкого демпфування  $\kappa_1 = 100$  Н/(м·с); кількість членів у відповідних рядах Фур'є – 100.

При обчислювальному експерименті прогини не вимірювались на реальній балці, а визначались з розв'язання прямої (тестової) задачі, у якій збурювальне навантаження  $\bar{P}(t)$  задавалось. Як вихідні дані (рис. 2) вибиралися значення прогину в точці  $S - \bar{w}_S(t)$ . Ці дані взяті з розв'язку прямої задачі – товста («незашумлена») крива, а також використовувалися значення прогину, на які був накладений випадковий «шум» відповідно до закону нормального розподілу викидів («гауссів шум») – тонка («зашумлена») крива. «Гауссів шум» розраховувався в додатку MathCAD з використанням вбудованої функції для нормального розподілу  $rnorm$  відповідно до формули:

$$w_\delta(t) = \bar{w}_S(t) + rnorm(t, 0, \delta \cdot w_{\max}). \quad (11)$$

Тобто до значень вихідної функції  $\bar{w}_S(t)$  додавалися випадкові величини з дисперсією  $\sigma = \delta \cdot w_{\max}$  (середньоквадратичне відхилення), де  $\delta = 20\%$  – рівень шуму (відносна похибка);  $w_{\max}$  – величина максимального прогину пластини в розглянутій точці. Вкажемо, що процедура «зашумлення» добре моделює випадкові похибки, що виникають при реальних вимірах параметрів *напружено-деформованого стану* (НДС) елементів конструкцій, і дозволяє перевірити обчислювальний алгоритм на стійкість.

Результати числових розрахунків з ідентифікації невідомих навантажень наведені на рис. 3 та рис. 4.

У випадку правильного розв'язання оберненої задачі, ідентифіковані сили  $P_{id}(t)$  і  $R_{id}(t)$  повинні бути близькі (або збігатися) з тестовою силою  $P(t)$  і визначеною при розв'язанні прямої задачі реакцією  $R(t)$ , що наочно демонструє вірогідність отриманих результатів. Також з'являється можливість як якісної, так і кількісної оцінки розв'язання оберненої задачі.

На рис. 3 суцільними лініями показана зміна в часі збурювального навантаження  $P(t) = \bar{P}(t)$  (півхвиля синусоїди) і визначена в результаті розв'язання прямої задачі реакція між балкою та додатковою в'язко-пружною опорою  $R(t)$ , а точками показані ідентифіковані значення сил  $P_{id}(t)$  і  $R_{id}(t)$ , знайдені при чисельно-аналітичному розв'язанні оберненої задачі за вихідними даними, що «незашумлені».

Відзначимо, що незбуреним точним значенням прогину відповідає гладка крива, а зашумленим значенням – збурена (сильно осцилююча). Таким чином, збурювання вихідних даних значно погіршує стійкість розв'язання та підсилює «некоректність» поставленої задачі.

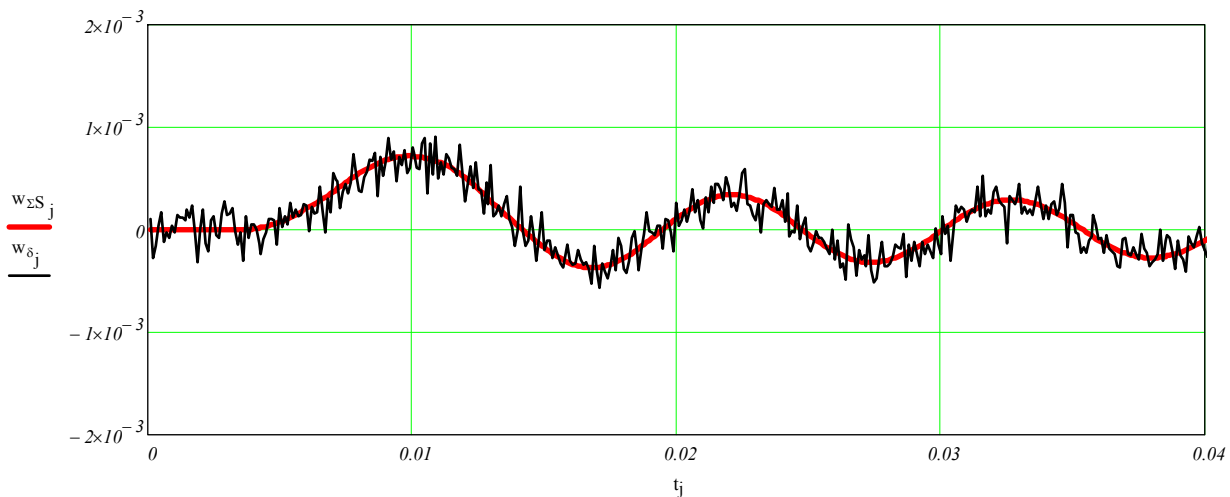


Рис. 2 – Зміна прогину балки у точці  $x_S$  внаслідок дії  $P(t)$  і  $R(t)$ :  $\bar{w}_S(t) = w_{Sj}(t)$  – точні значення функції прогину з прямої задачі;  $w_\delta(t)$  – збуренні («зашумлені») згідно залежності (11).

На рис. 3 продемонстровано, що у випадку ідентифікації невідомих навантажень по «незашумленим» вихідним даним криві повністю збігаються, це свідчить про вірність розв'язання оберненої задачі та точність розрахунків.

На рис. 4 показано ідентифіковані значення сил  $P_\delta(t)$  і  $R_\delta(t)$ , знайдені на основі аналітико-числового розв'язання системи двох інтегральних рівнянь Вольтера з неточно заданою правою частиною («зашумлені» вихідні дані). Для зручного візуального співставлення показано точні значення збурювального навантаження  $P(t)$  та реакції між додатковою в'язко-пружною опорою  $R(t)$  (товсті криві) і ідентифіковані значення сил за збуреними вихідними даними  $P_\delta(t)$  і  $R_\delta(t)$  (тонкі криві).

Рис. 4 демонструє, що у випадку ідентифікації невідомих навантажень по «зашумленим» вихідним даним ідентифіковані криві хоча і не збігаються, але досить близькі (їх відхилення не перевищує 20% – величину «зашумлення»), це свідчить про стійкість розв’язання оберненої задачі.

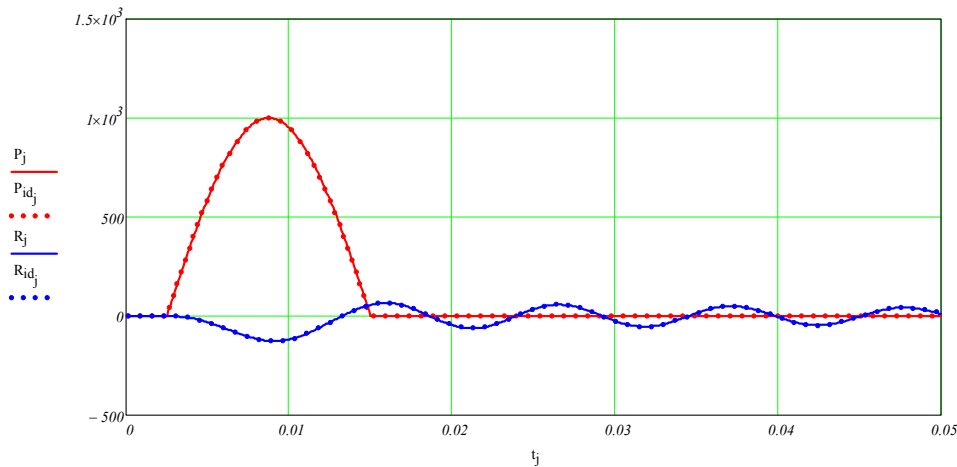


Рис. 3 – Збудуюча сила  $P(t)$  і реакція в’язко-пружної опори  $R(t)$ :  $P(t)$  і  $R(t)$  ( $\bar{P}(t)$  і  $\bar{R}(t)$ ) – точні значення з прямої задачі;  $P_{id}(t)$  і  $R_{id}(t)$  – ідентифіковані значення сил за вихідними даними, що «незашумлені».

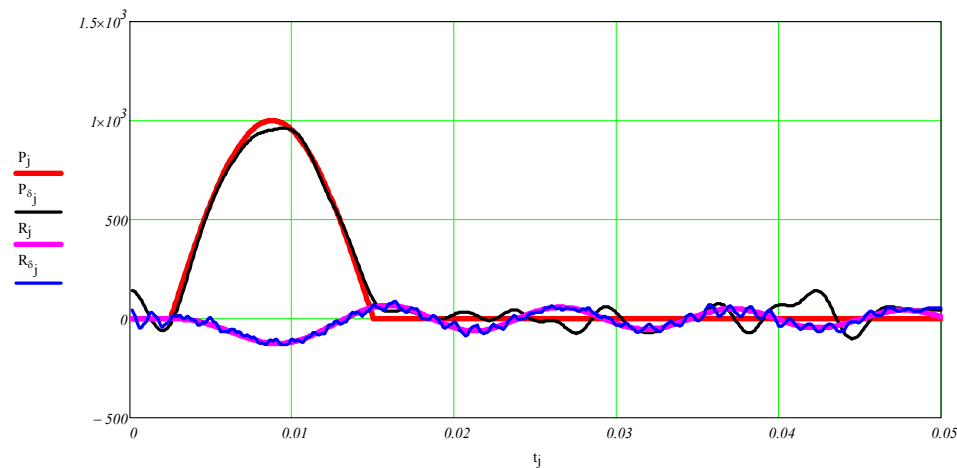


Рис. 4 – Результати розв’язання задачі ідентифікації (оберненої задачі):  $P(t)$  і  $R(t)$  – точні значення з прямої задачі (для візуального співставлення);  $P_{\delta}(t)$  і  $R_{\delta}(t)$  – ідентифіковані значення сил за збуреними («зашумленими») вихідними даними.

**Висновки.** В даній роботі розв’язано обернену задачу механіки деформівного твердого тіла при нестационарному деформуванні механічної системи, яка складається з шарнірно-обпертої балки та додаткової опори, встановленої в прольоті балки. Використано модель деформування балки на основі гіпотез С. П. Тимошенка з урахуванням інерції обертання та зсуву та модель додаткової опори, яка має лінійно-пружну та в’язку складові.

На основі запропонованого в роботі підходу показана можливість отримувати стійкі аналітично-числові розв’язки обернених нестационарних задач механіки деформівного твердого тіла. Наведено аналітичні співвідношення та результати обчислень для конкретних числових параметрів. Виконана ідентифікація невідомого збудуючого навантаження по «зашумленим» вихідним даним (з рівнем шуму  $\delta = 20\%$ ), що зумовлює можливість застосування описаної методики при експериментальних дослідженнях для реальних результатів вимірювань. Отримано стійке аналітично-числове рішення без використання ітераційних схем.

#### Список літератури

1. Timoshenko S. P. Vibration problems in engineering. – D. Van Nostrand Company INC., 1937. – 497 p.
2. Кохманюк С. С., Филиппов А. П. Колебания многопролетных балок на упругих опорах при подвижной нагрузке // Строительная механика и расчет сооружений. – 1965. – № 6. – С. 32 – 36.
3. Кохманюк С. С., Янютин Е. Г., Романенко Л. Г. Колебания деформируемых систем при импульсных и подвижных нагрузках. – К. : Наукова думка, 1980. – 232 с.
4. Воропай О. В., Поваляев С. I., Єгоров П. А. Моделирование промежуточной в’язко-пружної опори при нестационарных колебаниях балки Тимошенка // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Х. : НТУ «ХПІ», 2022. – № 1 (2022). – pp. 36 – 44. <https://doi.org/10.20998/2222-0631.2022.01.05>.

5. Янютин Є. Г., Гнатенко Г. О., Гришакін В. Т. Розв'язання нестационарних прямих та обернених задач для балок з пружним додатковим спіранням // *Машинознавство*. – 2007. – № 8. – С. 18 – 23.
6. Янютин Є. Г., Гришакін В. Т. Идентификация подвижной нагрузки для вязкоупругих балок // *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут»*. Зб. наукових праць. – 2008. – № 47. – С. 178 – 184.
7. Янютин Є. Г., Янчевський І. В., Воронай А. В., Шарапата А. С. Задачи импульсного деформирования элементов конструкций. Монография. – Харьков : ХНАДУ, 2004. – 392 с.
8. Korn G. A., Korn T. M. *Mathematical handbook for scientists and engineers: definitions, theorems, and formulas for reference and review*. – Mineola, N.Y.:Dover Publications, 2000. – 1130 p. ISBN 978-0-486-41147-7.
9. Beerends R. J. *Fourier and Laplace Transforms*. – Cambridge University Press, 2003. – 458 p. ISBN: 0521534410, 9780521806893.
10. Тихонов А. Н., Гончаровский А. В., Степанов В. В., Ягола А. Г. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. – М. : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983. – 200 с.
11. Voropay A., Gnatenko G., Yehorov P., Povaliaiev S., Naboka O. Identification of the pulse axisymmetric load acting on a composite cylindrical shell, inhomogeneous in length, made of different materials // *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. – 2022. – Vol. 5. – no. 7 (119). – pp. 21 – 34. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2022.265356>.

## References (transliterated)

1. Timoshenko S. P. *Vibration problems in engineering*. D.Van Nostrand Company INC., 1937. 497 p.
2. Kokhmanyuk S. S., Filippov A. P. Kolebaniya mnogoprolyetnykh balok na uprugikh oporakh pri podvizhnoy nagruzke [Vibrations of multispan beams on elastic support under moving loading]. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy* [Structural mechanics and computation of structures]. 1965, no. 6, pp. 32–36.
3. Kokhmanyuk S. S., Yanyutin Ye. G., Romanenko L. G. *Kolebaniya deformiruemyykh system pri impul'snykh i podvizhnykh nagruzkakh* [Vibrations of deformable systems under pulse and moving loads]. Kyiv, Naukova Dumka Publ., 1980. 232 p.
4. Voropay A. V., Povaliaiev S. I., Yehorov P. A. Modelyuvannya promizhnoyi v'yazko-pruzhnoyi opory pry nestatsionarnykh kolyvannykh balky Tymoshenko [Simulation of intermediate viscoelastic support under non-stationary vibrations of Timoshenko beams]. *Сериya : Matematychnye modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyak* [Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series : Mathematical modeling in engineering and technology]. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2022, no. 1 (2022), pp. 36–44. <https://doi.org/10.20998/2222-0631.2022.01.05>.
5. Yanyutin Ye. G., Gnatenko G. O., Gryshakin V. T. Rozv'yazannya nestatsionarnykh pryamykh ta obrnennykh zadach dlya balok z pruzhnim dodatkovym spyranniam [Solving nonstationary direct and inverse problems for beams with additional elastic support]. *Mashynoznavstvo* [Mechanical Engineering]. 2007, no. 8, pp. 18–23.
6. Yanyutin Ye. G., Gryshakin V. T. Identifikatsiya podvizhnoy nagruzki dlya vyazkouprugikh balok [Identification of moving loading for viscoelastic beams]. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут»*. Зб. наукових праць [Bulletin of the National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute". Collecion of scientific papers]. 2008, no. 47, pp. 178–184.
7. Yanyutin E. G., Yanchevskiy Y. I. V., Voropay A. V., Sharapata A. S. *Zadachi impul'snogo deformirovaniya yelemenov konstruksiy. Monografiya* [Problems of impulse deforming of structural elements. Monografiya]. Kharkov, KhNADU Publ., 2004. 392 p.
8. Korn G. A., Korn T. M. *Mathematical handbook for scientists and engineers : definitions, theorems, and formulas for reference and review*. Mineola, N.Y.:Dover Publications, 2000. 1130 p. ISBN 978-0-486-41147-7.
9. Beerends R. J. *Fourier and Laplace Transforms*. Cambridge University Press, 2003. 458 p. ISBN: 0521534410, 9780521806893.
10. Tikhonov A. N., Goncharovskiy A. V., Stepanov V. V., Yagola A. G. *Regulyarizuyushhie algoritmy i apriornaya informatsiya* [Regularization algorithms and a priori information]. Moscow, Nauka, Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoy literatury, 1983. 200 p.
11. Voropay A., Gnatenko G., Yehorov P., Povaliaiev S., Naboka O. Identification of the pulse axisymmetric load acting on a composite cylindrical shell, inhomogeneous in length, made of different materials // *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2022, vol. 5, no. 7 (119), pp. 21–34. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2022.265356>.

Надійшла (received) 12.04.2023

## Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

**Воронай Олексій Валерійович** – доктор технічних наук, професор, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, м. Харків; тел.: (050) 524-92-54; e-mail: voropay.alexey@gmail.com.

**Воронай Алексей Валериевич** – доктор технических наук, профессор, Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет, г. Харьков; тел.: (050) 524-92-54; e-mail: voropay.alexey@gmail.com.

**Voropay Alexey Valerievich** – Doctor of Engineering Sciences, Professor, Kharkiv National Automobile and Highway University, Kharkiv; tel.: (050) 524-92-54; e-mail: voropay.alexey@gmail.com.

**Повалієв Сергій Іванович** – кандидат технічних наук, доцент, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, м. Харків; тел.: (097) 199-23-31; e-mail: povalyaevsi@ukr.net.

**Повалієв Сергей Иванович** – кандидат технических наук, доцент, Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет, г. Харьков; тел.: (097) 199-23-31; e-mail: povalyaevsi@ukr.net.

**Povaliaiev Serhii Ivanovich** – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Kharkiv National Automobile and Highway University, Kharkiv; tel.: (097) 199-23-31; e-mail: povalyaevsi@ukr.net.

**Єгоров Павло Анатолійович** – кандидат технічних наук, доцент, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, м. Харків; тел.: (066) 225-33-51; e-mail: phd.egpavel@gmail.com.

**Егоров Павел Анатольевич** – кандидат технических наук, доцент, Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет, г. Харьков; тел.: (066) 225-33-51; e-mail: phd.egpavel@gmail.com.

**Yegorov Pavel Anatoliyevich** – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Kharkiv National Automobile and Highway University, Kharkiv; tel.: (066) 225-33-51; e-mail: phd.egpavel@gmail.com.