

О. Г. НИКОЛАЕВ, А. С. КРАЙНИЧЕНКО

ПРУЖНИЙ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНИЙ ПРОСТІР З ДВОМА ОДНОВІСНИМИ ПАРАЛЕЛЬНИМИ КРУГОВИМИ ТРІЩИНАМИ І СУПУТНІ ПРОБЛЕМИ БАЗИСНОСТІ

В даній статті проведено дослідження задачі про напружений стан у трансверсально-ізотропному просторі з двома паралельними круговими тріщинами, центри яких розташовано на осі анізотропії простору. На площини тріщин діє стале нормальне навантаження. Задача розв'язувалася узагальненим методом Фур'є. Для цього введено системи стиснутих сфероїдальних координат, початки яких пов'язані з центрами тріщин. Загальний розв'язок задачі будувався у вигляді рядів за осесиметричними варіантами загальних векторних розв'язків системи рівнянь рівноваги трансверсально-ізотропного тіла в сфероїдальних координатах, які раніше було побудовано одним з авторів статті. Для реалізації методу виконано його подальший розвиток на стиснуті сфероїдальні системи координат з початками, зсунутими за віссю Oz . Для цього отримано нові теореми додавання базисних векторних переміщень трансверсально-ізотропних тіл у вказаних вище системах координат. Після застосування узагальненого методу Фур'є задачу зведено до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Доведено, що при певних геометрично-механічних умовах оператор системи є фредгольмовим оператором. При чисельному розв'язанні системи використано метод редукції. Отримано графіки нормальних напружень в площині однієї з тріщин поза її межами, а також значення коефіцієнтів інтенсивності напружень у вершині тріщини при різних геометричних параметрах тріщин. Отримані результати узгоджуються з відомим значенням коефіцієнта інтенсивності напружень в задачі з однією тріщиною. Наведено дослідження практичної збіжності метода редукції.

Як важливу супутню проблему розглянуто задачу доведення базисності загального осесиметричного набору зовнішніх розв'язків системи рівнянь рівноваги трансверсально-ізотропного тіла, межа якого описується стиснутими сфероїдальними координатами. Ключовою проблемою тут є отримання тонких оцінок знизу модуля визначника першої крайової задачі. Наслідком отриманого результату є декілька важливих оцінок з теорії спеціальних функцій, в яких фігурують функції Лежандра другого роду від чисто уявного аргументу.

Ключові слова: трансверсально-ізотропний простір, тріщина, стиснуті сфероїдальні координати, узагальнений метод Фур'є, базисність розв'язків, теорема додавання, коефіцієнт концентрації напружень.

А. Г. НИКОЛАЕВ, А. С. КРАЙНИЧЕНКО

УПРУГОЕ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЕ ПРОСТРАНСТВО С ДВУМЯ ОДНООСНЫМИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ КРУГОВЫМИ ТРЕЩИНАМИ И СОПУТСТВУЮЩИЕ ПРОБЛЕМЫ БАЗИСНОСТИ

В данной статье проведено исследование задачи о напряженном состоянии в трансверсально-изотропном пространстве с двумя параллельными круговыми трещинами, центры которых расположены на оси анизотропии пространства. На плоскости трещин действует постоянная нормальная нагрузка. Задача решалась обобщенным методом Фурье. Общее решение задачи строилось в виде рядов по осесимметричным вариантам общих векторных решений системы уравнений равновесия трансверсально-изотропного тела в сфероидальных координатах, ранее построенных одним из авторов статьи. Для реализации метода выполнено его дальнейшее развитие на сжатые сфероидальные системы координат с началами, сдвинутыми по оси симметрии. Для этого получены новые теоремы сложения базисных векторных перемещений трансверсально-изотропных тел в указанных выше системах координат. После применения обобщенного метода Фурье задача сведена к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. Доказано, что при определенных геометрических и механических условиях оператор системы является фредгольмовым оператором. При численном решении системы использован метод редукции. Получены графики нормальных напряжений в плоскости одной из трещин вне ее границ, а также значение коэффициентов интенсивности напряжений в вершине трещины при различных геометрических параметрах трещин. Полученные результаты согласовываются с известным значением коэффициента интенсивности напряжений в задаче с одной трещиной. Приведены исследования практической сходимости метода редукции.

Как важная сопутствующая проблема рассмотрена задача доказательства базисности общего осесимметричного набора внешних решений системы уравнений равновесия трансверсально-изотропного тела, граница которого описывается сжатыми сфероидальными координатами. Ключевой проблемой здесь является получение тонких оценок снизу модуля определителя первой крайовой задачи. Следствием полученного результата явилось несколько важных оценок из теории специальных функций, в которых фигурируют функции Лежандра второго рода от чисто мнимого аргумента.

Ключевые слова: трансверсально-изотропное пространство, трещина, сжатые сфероидальные координаты, обобщенный метод Фурье, базисность решений, теорема сложения, коэффициент концентрации напряжений.

O. G. NIKOLAEV, A. S. KRAINICHENKO

ELASTIC TRANSVERSAL-ISOTROPIC SPACE WITH TWO UNIAXIAL PARALLEL CIRCULAR CRACKS AND ASSOCIATED PROBLEMS OF BASICITY

In the paper a problem of the stress state in a transversely isotropic space with two parallel circular cracks, the centers of which are located on the axis of anisotropy of the space, is investigated. A constant normal load acts on the crack planes. The problem is solved by the generalized Fourier method. For this purpose, systems of compressed spheroidal coordinates are introduced, the origins of which are connected to the centers of cracks. The general solution of the problem is constructed in the form of series based on axisymmetric variants of the general vector solutions of the system of equations of equilibrium of a transversely isotropic body in spheroidal coordinates, which were previously constructed by one of the authors of the paper. To implement the method, it is further generalized to compressed spheroidal coordinate systems with origins shifted along the axis. For this purpose, new addition theorems for basic vector displacements of transversally isotropic bodies in the above-mentioned coordinate systems are obtained. After applying the generalized Fourier method, the problem is reduced to an infinite system of linear algebraic equations. It is proved that under certain geometrical and mechanical conditions the operator of the system is a Fredholm operator. The reduction method is used for the numerical solution of the system. Graphs of normal stresses in the plane of one of the cracks outside its boundaries, as well as values of stress intensity factor at the top of the crack for different geometric parameters of the cracks, are obtained. The obtained results agree with the known value of the stress intensity factor in the problem with one crack. The practical convergence of the reduction method is studied.

As an important related problem, the problem of proving the basicity of a general axisymmetric set of external solutions of the system of equilibrium equations of a transversally isotropic body whose boundary is described in compressed spheroidal coordinates is considered. The key problem here is obtaining subtle estimates from below of the modulus of the determinant of the first boundary value problem. As a corollary of the obtained re-

sult, several important estimates from the theory of special functions are derived, in which Legendre functions of the second kind from a purely imaginary argument appear.

Key words: transverse-isotropic space, crack, compressed spheroidal coordinates, generalized Fourier method, basicity of solutions, addition theorem, stress concentration coefficient.

Вступ. Деталі, вузли, конструкції, що застосовуються в будівництві, машинобудуванні, аерокосмічній техніці, як правило, містять включення, порожнини, тріщини обумовлені конструктивними, технологічними особливостями або недосконалістю структури матеріалу, з якого вони зроблені, але і самі матеріали також можуть мати ускладнені *фізико-механічні характеристики*. Наявність включень, порожнин, тріщин у матеріалах, деталях, конструктивних елементах при певних критичних навантаженнях може призводити до їх руйнування в процесі експлуатації. З іншого боку, зараз постійно зростає необхідність в нових матеріалах із заздалегідь заданими властивостями. Тому на перший план виходять проблеми *математичного моделювання нових матеріалів*, проведення розрахунків на міцність різних інженерних об'єктів.

Сучасний світ без перебільшення можна назвати обчислювальним. Але навіть при використанні всіх комп'ютерно-обчислювальних технологій науковці-практики добре розуміють відсутність їх стовідсоткової ефективності. Пов'язано це з різними причинами. Сама по собі універсальність суперечить ефективності. У складних обчислювальних задачах необхідно мати хоча б локальний критерій для перевірки результату, але без тонкого аналітичного аналізу його отримати неможливо. Моделі зі складною структурою взагалі неможливо обчислити з високою точністю.

Все сказане вище дозволяє зробити такий висновок. В обчислювальному світі роль аналітичних і чисельно-аналітичних методів дослідження фізико-механічних полів не зменшується, а зростає. Дана робота як раз і присвячена подальшому розвитку і застосуванню одного з *чисельно-аналітичних методів – узагальненому методу Фур'є*, який вже довів свою високу ефективність. Саме за його допомогою можна об'єднати складну геометрію, ускладнені механічні характеристики і високу точність. Метод застосовується для розв'язання важливої задачі оцінки впливу однієї навантаженої тріщини на напружений стан в околі іншої.

Аналіз останніх досліджень. Чисельно-аналітичні методи в задачах *теорії тріщин* розвивалися кількома авторами. Так в роботі [1] *методом інтегральних перетворень* побудовано точний розв'язок задачі про кругову міжфазну тріщину в *кусково-однорідному трансверсально-ізотропному просторі* за дії довільних навантажень, прикладених до межі тріщини. Отримано формули для коефіцієнтів інтенсивності напружень на межі тріщини та значення цих коефіцієнтів для деяких комбінацій трансверсально-ізотропних матеріалів. В статті [2] запропонованим авторами *методом тонких включень* досліджуються задачі теорії тріщин, розташованих біля поверхонь об'ємних і тонкостінних тіл при теплових і силових статичних і динамічних навантаженнях. Описано вплив поверхонь тіла або межі розділу його матеріалів на статичні та динамічні коефіцієнти інтенсивності напружень в околі дефектів. В роботі [3] за допомогою *сингулярних інтегральних рівнянь* досліджено осесиметричну задачу про кругову підповерхневу тріщину радіального зсуву в напівнескінченному композиційному матеріалі з початковими напруженнями. Задачу зведено до *системи інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду*. Отримано представлення коефіцієнтів інтенсивності напружень в околі вершини тріщини залежно від початкових напружень. Для двох типів композиційних матеріалів (шаруваті композити з ізотропними шарами та композити, стохастично армовані короткими еліпсоїдальними волокнами) розраховано коефіцієнти інтенсивності напружень та досліджено їх залежність від початкових напружень, фізико-механічних характеристик композитів та геометричних параметрів задачі. У дисертації [4] для розв'язання низки *мішаних задач* теорії тріщин використовується техніка розділення змінних, інтегральних перетворень і методів розв'язання подвійних і потрійних інтегральних рівнянь. У роботі [5] методом сингулярних інтегральних рівнянь розглянуто *плоску задачу теорії пружності для квазіізотропної площини з криволінійними тріщинами*. Отримано коефіцієнти інтенсивності напружень для довільно розміщених прямолінійної та параболічної тріщин. В межах спрощеної *лінійної моделі поверхневої пружності Гуртіна – Мердока* у статті [6] досліджується сингулярність напружень і переміщень поблизу тріщини. Використовується *техніка інтегральних перетворень Мелліна та Вінера-Гонфа*. В деяких роботах при дослідженні напруженого стану в околі тріщин використовується *апарат функцій Гріна*. Так у статті [7] виведено *функції Гріна* для нескінченного тривимірного пружного тіла, що містить кругову тріщину, через інтегралі від елементарних функцій. Тверде тіло вважається або ізотропним, або трансверсально-ізотропним з тріщиною, паралельною площині ізотропії. В роботі [8] за допомогою функції Гріна виведені інтегральні рівняння задачі взаємодії паралельних кругових тріщин при довільному навантаженні в трансверсально-ізотропному пружному просторі. Використано *теорему про середнє значення інтеграла* для виділення особливостей, пов'язаних з вершинами тріщин. Після цього рівняння втрачають сингулярність і можуть бути розв'язані чисельно. Числові результати наведено тільки для коефіцієнтів інтенсивності напружень.

Проблеми побудови чисельно-аналітичних розв'язків в задачах з довільно орієнтованими, по відношенню до осі анізотропії, тріщинами привели до створення наближених моделей для напруженого стану таких тіл. Так у роботі [9] розглядається *наближена аналітична модель* для внеску довільно-орієнтованої кругової тріщини в ефективну пружну податливість трансверсально-ізотропного матеріалу. Досліджується застосування гіпотези про те, що зміна пружного потенціалу внаслідок довільно орієнтованої кругової тріщини в трансверсально-ізотропному матеріалі може бути апроксимована зміною, розрахованою для певного ізотропного середовища.

Стаття [10] зосереджена на розрахунку загальних пружних властивостей трансверсально-ізотропного матеріалу, що містить кілька випадково орієнтованих кругових тріщин. Запропоновано нову методологію для оцінки внеску однієї довільно орієнтованої тріщини в нескінченному трансверсально-ізотропному середовищі в загальній модулі пружності. В роботі використано *схему Морі – Танака – Бенвеніста*, яка збігається з наближенням без взаємодії для випадку тріщиноподібних неоднорідностей.

Метод Фур'є в задачах теорії пружності для трансверсально-ізотропних тіл з одним канонічним включенням або порожниною розглядався у роботах [11 – 15]. Розвиток і застосування узагальненого методу Фур'є для трансверсально-ізотропних двозв'язних тіл, центри граничних поверхонь яких збігаються, розглядалися в роботах [16 – 18]. Проблему *базисності* розв'язків рівнянь теорії пружності в загальній постановці вперше було поставлено і вирішено в статті [19]. Для розв'язків системи рівнянь рівноваги у переміщеннях трансверсально-ізотропних витягнутих сфероїдів проблему було вирішено в роботі [20] в осесиметричній постановці.

Наведений огляд літературних джерел, присвячених дослідженням у теорії тріщин, показує важливість і актуальність подальшого вивчення напруженого стану тріщин, які взаємодіють, а також розвитку математичного апарату для його виконання.

Постановка задачі. Розглянемо пружний трансверсально-ізотропний простір з двома одновісними паралельними плоскими круговими тріщинами Γ_1 і Γ_2 . Позначимо центри тріщин O_1 і O_2 , відстань між ними z_{12} ($z_{12} > 0$), радіуси тріщин a_1 і a_2 . Будемо вважати, що *вісь анізотропії* трансверсально-ізотропного простору проходить через центри тріщин. Зафіксуємо в просторі декартову (x, y, z) і зв'язану з нею циліндричну (ρ, φ, z) системи координат, з віссю Oz , яка має напрямний вектор O_1O_2 . Пружні сталі матеріалу простору позначимо константами $\{c_{ij}\}_{i,j=1}^3$. Будемо вважати ці сталі *додатними*. Для основних трансверсально-ізотропних матеріалів ця умова виконується.

Розглянемо задачу визначення напруженого стану вказаного вище простору у випадку, коли до берегів тріщин прикладене нормальне статне навантаження σ . Проблема зводиться до розв'язання крайової задачі для системи рівнянь рівноваги трансверсально-ізотропного тіла, яку в осесиметричній постановці можна записати так:

$$\left[c_{11} \left(\Delta_2 - \frac{1}{\rho^2} \right) + c_{44} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] V_\rho + (c_{13} + c_{44}) \frac{\partial^2 V_z}{\partial \rho \partial z} = 0, \quad (1)$$

$$\left[c_{44} \Delta_2 + c_{33} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] V_z + (c_{13} + c_{44}) \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial V_\rho}{\partial z} \right) = 0, \quad (2)$$

$$(x, y, z) \in \Omega \equiv \mathbb{R}^3 \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2).$$

Граничні умови на берегах тріщин мають вигляд:

$$\sigma_{z|\Gamma_i} = -\sigma, \quad \tau_{\rho z|\Gamma_i} = 0, \quad \tau_{\varphi z|\Gamma_i} = 0 \quad i=1, 2. \quad (3)$$

Вище позначено (V_ρ, V_z) , $(\sigma_z, \tau_{\rho z}, \tau_{\varphi z})$ – компоненти осесиметричного вектора переміщень і тензора напружень в циліндричних координатах, $\Delta_2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}$ – осесиметричний варіант двовимірного *оператора*

Лапласа в полярних координатах.

Для побудови частинних розв'язків системи рівнянь (1), (2), які відповідають геометрії області Ω , з кожною точкою O_j пов'яжемо однаково направлену з системою координат Ox_jz_j локальну декартову систему координат (x_j, y_j, z_j) , а також дві декартові $\{(x_{js}, y_{js}, z_{js})\}_{s=1}^2$ і дві стиснуті сфероїдальні $\{(\tilde{\xi}_{js}, \tilde{\eta}_{js}, \varphi)\}_{s=1}^2$ системи координат, такі, що:

$$x = x_j = x_{js} = a_j \mathbf{ch} \tilde{\xi}_{js} \sin \tilde{\eta}_{js} \cos \varphi, \quad y = y_j = y_{js} = a_j \mathbf{ch} \tilde{\xi}_{js} \sin \tilde{\eta}_{js} \sin \varphi, \quad \frac{z_j}{\sqrt{v_s}} = z_{js} = a_j \mathbf{sh} \tilde{\xi}_{js} \cos \tilde{\eta}_{js}. \quad (4)$$

Тут a_j – параметр сфероїдальної системи, який збігається з радіусом відповідної тріщини, $\tilde{\xi}_{js} \in [0, \infty)$, $\tilde{\eta}_{js} \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, рівняння поверхні j -ї тріщини є $\tilde{\xi}_{js} = 0$. Параметр v_s є коренем рівняння

$$c_{11}c_{44}v^2 - (c_{11}c_{33} - 2c_{13}c_{44} - c_{13}^2)v + c_{33}c_{44} = 0. \quad (5)$$

У подальшому буде розглядатися випадок, коли корені рівняння (5) є дійсними, додатними і різними.

З співвідношень (4) випливає, що на поверхні j -ї тріщини координати $\tilde{\eta}_{j1} = \tilde{\eta}_{j2} = \tilde{\eta}_j$.

В роботі [16] було побудовано набори лінійно незалежних частинних розв'язків загальної системи рівнянь рівноваги у переміщеннях у стиснутій сфероїдальній системі координат у формі базисних векторних функцій. У

випадку осесиметричного напруженого стану з тих розв'язків отримаємо:

$$\vec{V}_{s,n}^{\pm(6)}(\tilde{\xi}_{js}, \tilde{\eta}_{js}) = \frac{-ia_j}{2n+1} \vec{\nabla}_s [u_{n-1}^{\pm(6)}(\tilde{\xi}_{js}, \tilde{\eta}_{js}) - u_{n+1}^{\pm(6)}(\tilde{\xi}_{js}, \tilde{\eta}_{js})], \quad n = 0, 1, \dots, \quad s = 1, 2, \quad (6)$$

де

$$u_n^{\pm(6)}(\xi, \eta) = \begin{Bmatrix} Q_n(\text{ish}\xi) \\ P_n(\text{ish}\xi) \end{Bmatrix} P_n(\cos\eta); \quad \vec{\nabla}_s = \bar{e}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + k_s \bar{e}_z \frac{\partial}{\partial z}, \quad k_s = \frac{c_{11}V_s - c_{44}}{c_{13} + c_{44}}, \quad s = 1, 2, \quad (7)$$

$P_n(x), Q_n(x)$ – функції Лежандра першого і другого роду; $\{\bar{e}_\rho, \bar{e}_z\}$ – орти циліндричної системи координат. Переміщення (6) у координатній формі мають такий вигляд:

$$\vec{V}_{s,n}^{\pm(6)}(\tilde{\xi}_{js}, \tilde{\eta}_{js}) = u_n^{\pm(6)1}(\tilde{\xi}_{js}, \tilde{\eta}_{js}) \bar{e}_\rho - \frac{k_s}{\sqrt{V_s}} u_n^{\pm(6)}(\tilde{\xi}_{js}, \tilde{\eta}_{js}) \bar{e}_z, \quad s = 1, 2, \quad (8)$$

де

$$u_n^{\pm(6)1}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) = \begin{Bmatrix} Q_n^1(\text{ish}\tilde{\xi}) \\ P_n^1(\text{ish}\tilde{\xi}) \end{Bmatrix} P_n^{-1}(\cos\tilde{\eta}).$$

Розвиток математичного апарату. Однією з ключових проблем при розв'язанні крайової задачі в канонічній області є встановлення базисності розв'язків, які використовуються при побудові загального розв'язку. Розглянемо цю проблему в більш загальній постановці, яка відповідає зовнішній осесиметричній задачі для області, поверхню якої можна описати в стиснутих сфероїдальних системах координат рівняннями $\tilde{\xi}_s = \tilde{\xi}_s^0$.

У роботі [19] вперше було введено поняття базисності системи розв'язків *рівняння Ламе* в просторових канонічних областях і розв'язано проблему базисності для всіх основних канонічних областей. У статті [20] по аналогії було введено поняття базисності набору розв'язків системи рівнянь (1), (2) в осесиметричній постановці та доведена базисність розв'язків для трансверсально-ізотропного витягнутого сфероїда. Отримаємо відповідні результати для зовнішності стиснутого сфероїда.

Теорема 1. *За умови $v_1 \neq v_2$ розв'язки (6) першої крайової задачі для системи рівнянь (1), (2) в області $\Omega^{+(6)} = \{(\tilde{\xi}_s, \tilde{\eta}_s, \varphi) : \tilde{\xi}_s > \tilde{\xi}_s^0\}$ утворюють базисну систему розв'язків.*

Доведення. Будемо вважати, що граничною поверхнею області $\Omega^{+(6)}$ є поверхня сфероїда $\frac{\rho^2}{b_1^2} + \frac{z^2}{b_2^2} = 1$, причому $b_2/b_1 < \min\{\sqrt{v_1}, \sqrt{v_2}, 1\}$. Для її описання зручно користуватися стиснутою сфероїдальною системою координат (4). Тоді рівняння поверхні $\partial\Omega^{+(6)}$ задається рівнянням $\tilde{\xi}_s = \tilde{\xi}_s^0$, де $a_s \text{ch}\tilde{\xi}_s^0 = b_1$, $\sqrt{V_s} a_s \text{sh}\tilde{\xi}_s^0 = b_2$, звідки отримаємо таке співвідношення

$$a_s = \sqrt{b_1^2 - \frac{b_2^2}{V_s}}. \quad (9)$$

Для обґрунтування базисності зовнішніх розв'язків перш за все треба довести, що визначник

$$\Delta_n^{(1)6}(\tilde{\xi}_1^0, \tilde{\xi}_2^0) = \begin{vmatrix} Q_n^{(1)}(i\bar{q}_1) & \frac{k_1}{\sqrt{V_1}} Q_n(i\bar{q}_1) \\ Q_n^{(1)}(i\bar{q}_2) & \frac{k_2}{\sqrt{V_2}} Q_n(i\bar{q}_2) \end{vmatrix}, \quad (10)$$

де $q_s = \text{ch}\tilde{\xi}_s^0$, $\bar{q}_s = \text{sh}\tilde{\xi}_s^0$, відмінний від нуля і отримати нижню оцінку його модуля. Запишемо визначник у такому виді:

$$\Delta_n^{(1)6} = Q_n^{(1)}(i\bar{q}_1) Q_n^{(1)}(i\bar{q}_2) \left[\frac{k_2}{\sqrt{V_2}} \frac{Q_n(i\bar{q}_2)}{Q_n^{(1)}(i\bar{q}_2)} - \frac{k_1}{\sqrt{V_1}} \frac{Q_n(i\bar{q}_1)}{Q_n^{(1)}(i\bar{q}_1)} \right]. \quad (11)$$

Враховуючи, що $k_s = \frac{c_{11}V_s - c_{44}}{c_{13} + c_{44}}$, визначник $\Delta_n^{(1)6}$ можна подати у вигляді:

$$\Delta_n^{(1)6} = Q_n^{(1)}(i\bar{q}_1) Q_n^{(1)}(i\bar{q}_2) \left[\frac{1}{\sqrt{V_2}} \frac{c_{11}V_2 - c_{44}}{c_{13} + c_{44}} \frac{Q_n(i\bar{q}_2)}{Q_n^{(1)}(i\bar{q}_2)} - \frac{1}{\sqrt{V_1}} \frac{c_{11}V_1 - c_{44}}{c_{13} + c_{44}} \frac{Q_n(i\bar{q}_1)}{Q_n^{(1)}(i\bar{q}_1)} \right] =$$

$$= Q_n^{(1)}(i\bar{q}_1)Q_n^{(1)}(i\bar{q}_2) \left[\frac{c_{11}}{c_{13} + c_{44}} \left(\sqrt{v_2} \frac{Q_n(i\bar{q}_2)}{Q_n^{(1)}(i\bar{q}_2)} - \sqrt{v_1} \frac{Q_n(i\bar{q}_1)}{Q_n^{(1)}(i\bar{q}_1)} \right) - \frac{c_{44}}{c_{13} + c_{44}} \left(\frac{1}{\sqrt{v_2}} \frac{Q_n(i\bar{q}_2)}{Q_n^{(1)}(i\bar{q}_2)} - \frac{1}{\sqrt{v_1}} \frac{Q_n(i\bar{q}_1)}{Q_n^{(1)}(i\bar{q}_1)} \right) \right]. \quad (12)$$

Розглянемо функцію

$$\tau(v) = \sqrt{v} \frac{Q_n(i\bar{q})}{Q_n^{(1)}(i\bar{q})}, \quad (13)$$

де

$$\bar{q} = \mathbf{sh} \xi^0 = \frac{b_2}{\sqrt{va}} = \frac{b_2}{\sqrt{vb_1^2 - b_2^2}}.$$

Покажемо, що ця функція монотонно спадає на півосі \mathbb{R}_+ . Похідна цієї функції дорівнює

$$\frac{d\tau(v)}{dv} = \frac{1}{2\sqrt{v}} \frac{Q_n(i\bar{q})}{Q_n^{(1)}(i\bar{q})} + i\sqrt{v} \frac{\frac{dQ_n(i\bar{q})}{dz} Q_n^{(1)}(i\bar{q}) - Q_n(i\bar{q}) \frac{dQ_n^{(1)}(i\bar{q})}{dz}}{[Q_n^{(1)}(i\bar{q})]^2} \frac{d\bar{q}}{dv}.$$

Враховуючи, що $\frac{d\bar{q}}{dv} = -\frac{1}{2v} \bar{q}q^2$, отримаємо:

$$\begin{aligned} \frac{d\tau(v)}{dv} &= \frac{1}{2\sqrt{v}} \frac{1}{[Q_n^{(1)}(i\bar{q})]^2} \left\{ Q_n(i\bar{q})Q_n^{(1)}(i\bar{q}) - i\bar{q}q^2 \left[\frac{dQ_n(i\bar{q})}{dz} Q_n^{(1)}(i\bar{q}) - Q_n(i\bar{q}) \frac{dQ_n^{(1)}(i\bar{q})}{dz} \right] \right\} = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{v}} \frac{1}{[Q_n^{(1)}(i\bar{q})]^2} \left\{ Q_n(i\bar{q})Q_n^{(1)}(i\bar{q}) - \bar{q}q[Q_n^{(1)}(i\bar{q})]^2 + n(n+1)\bar{q}q[Q_n(i\bar{q})]^2 - \bar{q}^2 Q_n(i\bar{q})Q_n^{(1)}(i\bar{q}) \right\}. \end{aligned} \quad (14)$$

Визначимо знак виразу

$$\frac{1}{[Q_n^{(1)}(i\bar{q})]^2} \left\{ -\bar{q}q[Q_n^{(1)}(i\bar{q})]^2 + n(n+1)\bar{q}q[Q_n(i\bar{q})]^2 - \bar{q}^2 Q_n(i\bar{q})Q_n^{(1)}(i\bar{q}) \right\}. \quad (15)$$

Його можна перетворити за допомогою рекурентних формул:

$$\begin{aligned} \frac{1}{[Q_n^{(1)}(i\bar{q})]^2} \left\{ -\bar{q}q[Q_n^{(1)}(i\bar{q})]^2 + n(n+1)\bar{q}q[Q_n(i\bar{q})]^2 - \bar{q}^2 Q_n(i\bar{q})Q_n^{(1)}(i\bar{q}) \right\} = \\ = \frac{1}{[Q_n^{(1)}(i\bar{q})]^2} \left\{ -in\bar{q}Q_n(i\bar{q})Q_{n+1}^{(1)}(i\bar{q}) + i\bar{q}(n+1)Q_n^{(1)}(i\bar{q})Q_{n+1}(i\bar{q}) \right\}. \end{aligned} \quad (16)$$

Останній вираз запишемо, користуючись інтегральним поданням функції Лежандра другого роду:

$$Q_n^{(m)}(z) = (-1)^m \frac{n!}{(n-m)!} \int_0^\infty \frac{\mathbf{ch}(mt)}{(z + \sqrt{z^2 - 1}\mathbf{cht})^{n+1}} dt. \quad (17)$$

Після деяких перетворень отримаємо:

$$\begin{aligned} \frac{1}{[Q_n^{(1)}(i\bar{q})]^2} \left\{ -in\bar{q}Q_n(i\bar{q})Q_{n+1}^{(1)}(i\bar{q}) + i\bar{q}(n+1)Q_n^{(1)}(i\bar{q})Q_{n+1}(i\bar{q}) \right\} = \\ = -\frac{\bar{q}qn(n+1)}{2|Q_n^{(1)}(i\bar{q})|^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{(\mathbf{cht} - \mathbf{chs})^2}{(\bar{q} + q\mathbf{cht})^{n+2} (\bar{q} + q\mathbf{chs})^{n+2}} dt ds, \end{aligned} \quad (18)$$

звідки випливає від'ємність виразу (15), отже, і від'ємність похідної $\frac{d\tau(v)}{dv}$. Таким чином, показано, що функція $\tau(v)$ монотонно спадає на півосі \mathbb{R}_+ .

Наслідком отриманих нерівностей є оцінка:

$$\left| \frac{d\tau(v)}{dv} \right| > \frac{1}{2\sqrt{v}} \frac{|Q_n(i\bar{q})|}{|Q_n^{(1)}(i\bar{q})|}. \quad (19)$$

Тепер доведемо, що функція $\sigma(v) = \frac{1}{\sqrt{v}} \frac{Q_n(i\bar{q})}{Q_n^{(1)}(i\bar{q})}$ монотонно зростає на півосі \mathbb{R}_+ . Для цього обчислимо її похідну. Виконуючи аналогічні дії, отримаємо:

$$\frac{d\sigma(v)}{dv} = -\frac{1}{2\sqrt{v^3}} \frac{Q_n(i\bar{q})}{Q_n^{(1)}(i\bar{q})} + \frac{i}{\sqrt{v}} \frac{\frac{dQ_n(i\bar{q})}{dz} Q_n^{(1)}(i\bar{q}) - Q_n(i\bar{q}) \frac{dQ_n^{(1)}(i\bar{q})}{dz}}{[Q_n^{(1)}(i\bar{q})]^2} \frac{d\bar{q}}{dv} =$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{v^3}} \frac{1}{[Q_n^{(1)}(i\bar{q})]^2} \left\{ Q_n(i\bar{q})Q_n^{(1)}(i\bar{q}) + \bar{q}q[Q_n^{(1)}(i\bar{q})]^2 - n(n+1)\bar{q}q[Q_n(i\bar{q})]^2 + \bar{q}^2 Q_n(i\bar{q})Q_n^{(1)}(i\bar{q}) \right\}.$$

Перетворимо останній вираз за допомогою рекурентних формул:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2\sqrt{v^3}} \frac{1}{[Q_n^{(1)}(i\bar{q})]^2} \left\{ Q_n(i\bar{q})Q_n^{(1)}(i\bar{q}) + \bar{q}q[Q_n^{(1)}(i\bar{q})]^2 - n(n+1)\bar{q}q[Q_n(i\bar{q})]^2 + \bar{q}^2 Q_n(i\bar{q})Q_n^{(1)}(i\bar{q}) \right\} = \\ & = -\frac{1}{2\sqrt{v^3}} \frac{(n+1)}{[Q_n^{(1)}(i\bar{q})]^2} \left\{ i\bar{q}[Q_n Q_{n+1}^{(1)} - Q_n^{(1)} Q_{n+1}] - iq Q_n Q_{n+1} \right\}. \end{aligned} \quad (20)$$

Окремо перетворимо вираз:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{[Q_n^{(1)}(i\bar{q})]^2} i\bar{q}[Q_n Q_{n+1}^{(1)} - Q_n^{(1)} Q_{n+1}] = \frac{i\bar{q}}{[Q_n^{(1)}(i\bar{q})]^2} \left\{ Q_n[i\bar{q}Q_n^{(1)} + i(n+1)qQ_n] - Q_n^{(1)}[i\bar{q}Q_n + \frac{iq}{n+1}Q_n^{(1)}] \right\} = \\ & = \frac{i^2 \bar{q}q(n+1)}{[i^{n+1}Q_n^{(1)}]^2} \{ [i^{n+1}Q_n]^2 - \frac{1}{(n+1)^2} [i^{n+1}Q_n^{(1)}]^2 \} = \frac{i^2 \bar{q}q(n+1)}{|i^{n+1}Q_n^{(1)}|^2} [i^{n+1}Q_n - \frac{1}{n+1}i^{n+1}Q_n^{(1)}][i^{n+1}Q_n + \frac{1}{n+1}i^{n+1}Q_n^{(1)}]. \end{aligned} \quad (21)$$

Розглянемо

$$i^{n+1}qQ_n + \frac{1}{n+1}i^{n+1}qQ_n^{(1)} = i^{n+1}qQ_n + i^n[Q_{n+1} - i\bar{q}Q_n] = i^{n+1}(q - \bar{q})Q_n - i^{n+2}Q_{n+1}. \quad (22)$$

Перетворимо останній вираз за допомогою інтегрального подання (17):

$$\begin{aligned} i^{n+1}(q - \bar{q})Q_n - i^{n+2}Q_{n+1} &= \int_0^\infty \frac{q - \bar{q}}{(\bar{q} + q\mathbf{ch}t)^{n+1}} dt - \int_0^\infty \frac{1}{(\bar{q} + q\mathbf{ch}t)^{n+2}} dt = \int_0^\infty \frac{(q - \bar{q})(\bar{q} + q\mathbf{ch}t) - 1}{(\bar{q} + q\mathbf{ch}t)^{n+2}} dt = \\ &= \int_0^\infty \frac{q(q - \bar{q})(\mathbf{ch}t - 1)}{(\bar{q} + q\mathbf{ch}t)^{n+2}} dt. \end{aligned} \quad (23)$$

Тепер неважко побачити, що вираз (22) є додатним, вираз (21) – від’ємним, а (20) – додатним. Таким чином, похідна $\frac{d\sigma(v)}{dv} > 0$ $v \in \mathbb{R}_+$, тобто сама функція $\sigma(v) = \frac{1}{\sqrt{v}} \frac{Q_n(i\bar{q})}{Q_n^{(1)}(i\bar{q})}$ монотонно зростає на пів осі \mathbb{R}_+ .

З властивостей монотонності розглянутих функцій випливає, що обидва доданки у формулі (12) однакового знаку. Тоді можна записати:

$$|\Delta_n^{(1)6}(\xi_1^0, \xi_2^0)| > \frac{c_{11}}{c_{13} + c_{44}} |Q_n^{(1)}(i\bar{q}_1)Q_n^{(1)}(i\bar{q}_2)| \left| \sqrt{v_2} \frac{Q_n(i\bar{q}_2)}{Q_n^{(1)}(i\bar{q}_2)} - \sqrt{v_1} \frac{Q_n(i\bar{q}_1)}{Q_n^{(1)}(i\bar{q}_1)} \right|. \quad (24)$$

Модуль останнього множника в (24) оцінимо за допомогою формули Лагранжа і нерівності (19):

$$\left| \sqrt{v_2} \frac{Q_n(i\bar{q}_2)}{Q_n^{(1)}(i\bar{q}_2)} - \sqrt{v_1} \frac{Q_n(i\bar{q}_1)}{Q_n^{(1)}(i\bar{q}_1)} \right| = \left| \frac{d\tau}{dv}(\mu) \right| |v_2 - v_1| \geq \frac{|v_2 - v_1|}{2 \max(\sqrt{v_1}, \sqrt{v_2})} \frac{1}{n+1}.$$

Таким чином, остаточно маємо:

$$|\Delta_n^{(1)6}(\xi_1^0, \xi_2^0)| > \frac{c_{11}}{c_{13} + c_{44}} |Q_n^{(1)}(i\bar{q}_1)Q_n^{(1)}(i\bar{q}_2)| \frac{|v_2 - v_1|}{2 \max(\sqrt{v_1}, \sqrt{v_2})} \frac{1}{n+1}. \quad (25)$$

З оцінки (25) випливає виконання першої умови базисності для вектор-функцій $\{\vec{V}_{s,n}^{\pm(6)}(\xi_s, \eta_s)\}_{n=0, s=1}^{\infty, 2}$.

Доведення другої умови базисності мало відрізняється від доведення, наведеного в роботі [20] для витягнутого сфероїда, тому тут опускається.

Наслідок. Наслідком доведеної теореми крім важливої оцінки модуля визначника (25) є корисні нерівності, які пов’язують функції Лежандра другого роду

$$\left| \frac{Q_n(i\bar{q})}{Q_n^{(1)}(i\bar{q})} \right| > \frac{1}{n+1}, \quad n \in \mathbb{Z}_+; \quad \left| \frac{Q_n(i\bar{q})}{nQ_n^{(1)}(i\bar{q})} \right| > \left| \frac{Q_{n+1}(i\bar{q})}{(n+1)Q_{n+1}^{(1)}(i\bar{q})} \right|, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (26)$$

Повернемося до розв’язання поставленої задачі. Доведена теорема показує, що зовнішні розв’язки (6), які будуть використовуватися при побудові загального розв’язку, утворюють базисну систему розв’язків.

Зауважимо, що вектори напружень, які відповідають переміщенням (6) на поверхні тріщини Γ_j з нормаллю $\vec{n}_j = \vec{e}_{\xi_j}$ обчислюються за формулою:

$$FV_{s,n,m}^{\pm(5)}(0, \tilde{\eta}_{js}) = \frac{c_{44} k_s + 1}{H \sqrt{V_s}} \left[\frac{\partial}{\partial \tilde{\xi}_{js}} u_n^{\pm(6)}(\tilde{\xi}_{js}, \tilde{\eta}_{js}) \bar{e}_\rho - \sqrt{V_s} \frac{\partial}{\partial \tilde{\xi}_{js}} u_n^{\pm(6)}(\tilde{\xi}_{js}, \tilde{\eta}_{js}) \bar{e}_z \right]_{\tilde{\xi}_{js}=0}, \quad (27)$$

де $H_j = a_j |\cos \eta_j|$ – коефіцієнти Ламе.

При побудові загального розв'язку поставленої задачі будемо користуватися узагальненим методом Фур'є. Для його реалізації необхідним є результат, який доводиться у наступній теоремі.

Теорема 2. При $\sqrt{V_s} a_{1s} + \sqrt{V_s} a_{2s} \operatorname{ch} \tilde{\xi}_2 < z_{12}$ виконується теорема додавання:

$$V_{s,n}^{+(6)}(\tilde{\xi}_{1s}, \tilde{\eta}_{1s}) = \sum_{k=0}^{\infty} V_{s,k}^{-(6)}(\tilde{\xi}_{2s}, \tilde{\eta}_{2s}) \sum_{j=n}^{\infty} g_n^{+(64)j}(a_{1s}) f_j^{(46)k}(a_{2s}), \quad (28)$$

при $\sqrt{V_s} a_{2s} + \sqrt{V_s} a_{1s} \operatorname{ch} \tilde{\xi}_1 < z_{12}$ виконується теорема додавання:

$$V_{s,n}^{+(6)}(\tilde{\xi}_{2s}, \tilde{\eta}_{2s}) = \sum_{k=0}^{\infty} V_{s,k}^{-(6)}(\tilde{\xi}_{1s}, \tilde{\eta}_{1s}) (-1)^n \sum_{j=n}^{\infty} g_n^{-(64)j}(a_{2s}) f_j^{(46)k}(-a_{1s}), \quad (29)$$

де

$$g_n^{\pm(64)j}(a_{1s}) = \frac{\sqrt{\pi} \varepsilon_{j,n} (\pm 1)^n}{\Gamma(j/2 - n/2 + 1) \Gamma(j/2 + n/2 + 3/2)} \left(-\frac{i \sqrt{V_s} a_{1s}}{2 z_{12}} \right)^{j+1},$$

$$f_j^{(46)k}(a_{2s}) = \sum_{p=k}^{\infty} \frac{\sqrt{\pi} (k+1/2) \varepsilon_{p,k} (p+j)!}{\Gamma(p/2 - k/2 + 1) \Gamma(p/2 + k/2 + 3/2)} \left(\frac{i \sqrt{V_s} a_{2s}}{2 z_{12}} \right)^p,$$

$$\varepsilon_{n,k} = \begin{cases} 1, & n-k = 2p, \quad p \in \mathbb{Z}; \\ 0, & n-k = 2p+1, \quad p \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

$\Gamma(x)$ – гамма-функція Ейлера.

Доведення. Візьмемо за основу формулу, яку можна отримати з теореми додавання для гармонічних функцій [21]:

$$u_n^{+(6)}(\tilde{\xi}_{1s}, \tilde{\eta}_{1s}) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k^{-(6)}(\tilde{\xi}_{2s}, \tilde{\eta}_{2s}) \sum_{j=0}^{\infty} g_n^{+(64)j}(a_{1s}) f_j^{(46)k}(a_{2s}). \quad (30)$$

Перетворимо різницю

$$\begin{aligned} u_{n-1}^{+(6)}(\tilde{\xi}_{1s}, \tilde{\eta}_{1s}) - u_{n+1}^{+(6)}(\tilde{\xi}_{1s}, \tilde{\eta}_{1s}) &= \sum_{k=0}^{\infty} u_k^{-(6)}(\tilde{\xi}_{2s}, \tilde{\eta}_{2s}) \left[\sum_{j=n-1}^{\infty} g_{n-1}^{+(64)j}(a_{1s}) f_j^{(46)k}(a_{2s}) - \sum_{j=n+1}^{\infty} g_{n+1}^{+(64)j}(a_{1s}) f_j^{(46)k}(a_{2s}) \right] = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} u_k^{-(6)}(\tilde{\xi}_{2s}, \tilde{\eta}_{2s}) \sum_{j=n-1}^{\infty} [g_{n-1}^{+(64)j}(a_{1s}) - g_{n+1}^{+(64)j}(a_{1s})] f_j^{(46)k}(a_{2s}). \end{aligned} \quad (31)$$

Окремо перетворимо

$$\begin{aligned} g_{n-1}^{+(64)j}(a_{1s}) - g_{n+1}^{+(64)j}(a_{1s}) &= \left[\frac{\sqrt{\pi} \varepsilon_{j,n-1}}{\Gamma\left(\frac{j}{2} - \frac{n}{2} + \frac{3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{j}{2} + \frac{n}{2} + 1\right)} - \frac{\sqrt{\pi} \varepsilon_{j,n+1}}{\Gamma\left(\frac{j}{2} - \frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{j}{2} + \frac{n}{2} + 2\right)} \right] \left(-\frac{i \sqrt{V_s} a_{1s}}{2 z_{12}} \right)^{j+1} = \\ &= \frac{\sqrt{\pi} \varepsilon_{j+1,n}}{\Gamma\left(\frac{j}{2} - \frac{n}{2} + \frac{3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{j}{2} + \frac{n}{2} + 2\right)} \left(-\frac{i \sqrt{V_s} a_{1s}}{2 z_{12}} \right)^{j+1} \left(n + \frac{1}{2} \right) = i \frac{z_{12}}{\sqrt{V_s} a_{1s}} (2n+1) g_n^{+(64)j+1}(a_{1s}). \end{aligned} \quad (32)$$

Підставимо (32) у (31) і змінимо індекс підсумовування:

$$u_{n-1}^{+(6)}(\tilde{\xi}_{1s}, \tilde{\eta}_{1s}) - u_{n+1}^{+(6)}(\tilde{\xi}_{1s}, \tilde{\eta}_{1s}) = i \frac{z_{12}}{\sqrt{V_s} a_{1s}} (2n+1) \sum_{k=0}^{\infty} u_k^{-(6)}(\tilde{\xi}_{2s}, \tilde{\eta}_{2s}) \sum_{j=n}^{\infty} g_n^{+(64)j}(a_{1s}) f_{j-1}^{(46)k}(a_{2s}). \quad (33)$$

Тепер перетворимо вираз

$$\frac{f_j^{(46)k+1}(a_{2s})}{k+3/2} - \frac{f_j^{(46)k-1}(a_{2s})}{k-1/2} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{p=k+1}^{\infty} \frac{\sqrt{\pi} \varepsilon_{p,k+1} (p+j)!}{\Gamma\left(\frac{p-k}{2} + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{p+k}{2} + 2\right)} \left(\frac{i \sqrt{v_s} a_{2s}}{2 z_{12}}\right)^p - \sum_{p=k-1}^{\infty} \frac{\sqrt{\pi} \varepsilon_{p,k-1} (p+j+1)!}{\Gamma\left(\frac{p-k}{2} + \frac{3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{p+k}{2} + 1\right)} \left(\frac{i \sqrt{v_s} a_{2s}}{2 z_{12}}\right)^p = \\
 &= \sum_{p=k-1}^{\infty} \frac{\sqrt{\pi} \varepsilon_{p+1,k} (p+j)! \left(-k - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p-k}{2} + \frac{3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{p+k}{2} + 2\right)} \left(\frac{i \sqrt{v_s} a_{2s}}{2 z_{12}}\right)^p. \tag{34}
 \end{aligned}$$

Зсуємо індекс підсумовування в останній сумі на одиницю

$$\begin{aligned}
 \sum_{p=k-1}^{\infty} \frac{\sqrt{\pi} \varepsilon_{p+1,k} (p+j)! \left(-k - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p-k}{2} + \frac{3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{p+k}{2} + 2\right)} \left(\frac{i \sqrt{v_s} a_{2s}}{2 z_{12}}\right)^p &= - \sum_{p=k}^{\infty} \frac{\sqrt{\pi} \varepsilon_{p,k} (p+j-1)! \left(k + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p-k}{2} + 1\right) \Gamma\left(\frac{p+k}{2} + \frac{3}{2}\right)} \left(\frac{i \sqrt{v_s} a_{2s}}{2 z_{12}}\right)^{p-1} = \\
 &= \frac{2iz_{12}}{\sqrt{v_s} a_{2s}} f_{j-1}^{(46)k} (a_{2s}).
 \end{aligned}$$

Підстановка останньої формули в (34) дає

$$f_{j-1}^{(46)k} (a_{2s}) = \frac{\sqrt{v_s} a_{2s}}{2iz_{12}} \left[\frac{f_j^{(46)k+1} (a_{2s})}{k+3/2} - \frac{f_j^{(46)k-1} (a_{2s})}{k-1/2} \right]. \tag{35}$$

Підставимо (35) у (33)

$$u_{n-1}^{+(6)}(\tilde{\xi}_{1s}, \tilde{\eta}_{1s}) - u_{n+1}^{+(6)}(\tilde{\xi}_{1s}, \tilde{\eta}_{1s}) = \frac{a_{2s}}{a_{1s}} \left(n + \frac{1}{2} \right) \sum_{k=0}^{\infty} u_k^{-(6)}(\tilde{\xi}_{2s}, \tilde{\eta}_{2s}) \sum_{j=n}^{\infty} g_n^{+(64)j} (a_{1s}) \left[\frac{f_j^{(46)k+1} (a_{2s})}{k+3/2} - \frac{f_j^{(46)k-1} (a_{2s})}{k-1/2} \right].$$

Розіб'ємо внутрішню суму в останній формулі на дві і в кожній з отриманих зробимо зсув індексу підсумовування на крок вперед і назад:

$$\begin{aligned}
 u_{n-1}^{+(6)}(\tilde{\xi}_{1s}, \tilde{\eta}_{1s}) - u_{n+1}^{+(6)}(\tilde{\xi}_{1s}, \tilde{\eta}_{1s}) &= \frac{a_{2s}}{a_{1s}} \left(n + \frac{1}{2} \right) \sum_{k=1}^{\infty} u_{k-1}^{-(6)}(\tilde{\xi}_{2s}, \tilde{\eta}_{2s}) \sum_{j=n}^{\infty} g_n^{+(64)j} (a_{1s}) \frac{f_j^{(46)k} (a_{2s})}{k+1/2} - \\
 &- \frac{a_{2s}}{a_{1s}} \left(n + \frac{1}{2} \right) \sum_{k=-1}^{\infty} u_{k+1}^{-(6)}(\tilde{\xi}_{2s}, \tilde{\eta}_{2s}) \sum_{j=n}^{\infty} g_n^{+(64)j} (a_{1s}) \frac{f_j^{(46)k} (a_{2s})}{k+1/2} = \\
 &= \frac{a_{2s}}{a_{1s}} \left(n + \frac{1}{2} \right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1/2} [u_{k-1}^{-(6)}(\tilde{\xi}_{2s}, \tilde{\eta}_{2s}) - u_{k+1}^{-(6)}(\tilde{\xi}_{2s}, \tilde{\eta}_{2s})] \sum_{j=n}^{\infty} g_n^{+(64)j} (a_{1s}) f_j^{(46)k} (a_{2s}) + \\
 &+ \frac{a_{2s}}{a_{1s}} (2n+1) \sum_{j=n}^{\infty} g_n^{+(64)j} (a_{1s}) [f_j^{(46)(-1)} (a_{2s}) - f_j^{(46)0} (a_{2s})]. \tag{36}
 \end{aligned}$$

З останньої формули безпосередньо отримаємо:

$$\begin{aligned}
 \frac{-ia_{1s}}{2n+1} [u_{n-1}^{+(6)}(\tilde{\xi}_{1s}, \tilde{\eta}_{1s}) - u_{n+1}^{+(6)}(\tilde{\xi}_{1s}, \tilde{\eta}_{1s})] &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-ia_{2s}}{2k+1} [u_{k-1}^{-(6)}(\tilde{\xi}_{2s}, \tilde{\eta}_{2s}) - u_{k+1}^{-(6)}(\tilde{\xi}_{2s}, \tilde{\eta}_{2s})] \sum_{j=n}^{\infty} g_n^{+(64)j} (a_{1s}) f_j^{(46)k} (a_{2s}) - \\
 &- ia_{2s} \sum_{j=n}^{\infty} g_n^{+(64)j} (a_{1s}) [f_j^{(46)(-1)} (a_{2s}) - f_j^{(46)0} (a_{2s})]. \tag{37}
 \end{aligned}$$

Остаточний результат впливає з останньої тотожності, якщо до обох її частин застосувати оператор $\vec{\nabla}_s$.

Залишається довести, що ряди в формулі (30) збігаються абсолютно і рівномірно на кожному компактні з області $\sqrt{v_s} a_{1s} + \sqrt{v_s} a_{2s} \operatorname{ch} \tilde{\xi}_2 < z_{12}$. Для цього подвійний ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} |u_k^{-(6)}(\tilde{\xi}_{2s}, \tilde{\eta}_{2s})| \sum_{j=0}^{\infty} |g_n^{+(64)j} (a_{1s})| |f_j^{(46)k} (a_{2s})|$$

мажоруюємо рядом

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1/2) |P_k(\operatorname{ish} \tilde{\xi}_2)| \sum_{j=n}^{\infty} \frac{\sqrt{\pi} \varepsilon_{j,n} (Z_1/2)^{j+1}}{\Gamma\left(\frac{j-n}{2} + 1\right) \Gamma\left(\frac{j+n}{2} + \frac{3}{2}\right)} \sum_{p=k}^{\infty} \frac{\sqrt{\pi} \varepsilon_{p,k} (p+j)! (Z_2/2)^p}{\Gamma\left(\frac{p-k}{2} + 1\right) \Gamma\left(\frac{p+k}{2} + \frac{3}{2}\right)},$$

де $Z_j = \frac{\sqrt{V_s} a_{js}}{z_{12}}$. В свою чергу, можна показати, що останній ряд мажоруються таким:

$$\frac{Z_1}{Z_2} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1/2) |P_k(\text{ish } \tilde{\xi}_2)| Q_k \left(\frac{1}{Z_2} - \frac{Z_1}{Z_2} \right).$$

Збіжність останнього ряду при виконанні умови $\sqrt{V_s} a_{1s} + \sqrt{V_s} a_{2s} \text{ch } \tilde{\xi}_2 < z_{12}$ впливає з асимптотичної поведінки при $k \rightarrow \infty$ функцій Лежандра першого і другого роду. Неважко побачити, що також виконується умова диференціювання членами розглянутих функціональних рядів.

Формула (29) доводиться аналогічно.

Побудова загального розв'язку задачі та її зведення до розв'язувальної системи. Загальний розв'язок задачі (1) – (3) запишемо у вигляді:

$$\vec{V}(x, y, z) = \sum_{s=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} A_{s,n}^{(j)} \vec{V}_{s,n}^{+(6)}(\tilde{\xi}_{js}, \tilde{\eta}_{js}), \quad (38)$$

де $A_{s,n}^{(j)}$ – невідомі коефіцієнти, які необхідно знайти в процесі розв'язання задачі. Перетворимо вектор переміщень до кожної окремої системи координат. В результаті маємо:

$$\begin{aligned} \vec{V}(x_1, y_1, z_1) &= \sum_{s=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} A_{s,n}^{(1)} \vec{V}_{s,n}^{+(6)}(\tilde{\xi}_{1s}, \tilde{\eta}_{1s}) + \sum_{s=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} A_{s,n}^{(2)} \sum_{k=0}^{\infty} \vec{V}_{s,k}^{-(6)}(\tilde{\xi}_{1s}, \tilde{\eta}_{1s}) \sum_{j=n}^{\infty} g_n^{-(64)j} (a_{2s}) f_j^{(46)k} (-a_{1s}) = \\ &= \sum_{s=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} A_{s,n}^{(1)} \vec{V}_{s,n}^{+(6)}(\tilde{\xi}_{1s}, \tilde{\eta}_{1s}) + \sum_{s=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \vec{V}_{s,n}^{-(6)}(\tilde{\xi}_{1s}, \tilde{\eta}_{1s}) \sum_{k=0}^{\infty} A_{s,k}^{(2)} \sum_{j=k}^{\infty} g_k^{-(64)j} (a_{2s}) f_j^{(46)n} (-a_{1s}); \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \vec{V}(x_2, y_2, z_2) &= \sum_{s=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} A_{s,n}^{(2)} \vec{V}_{s,n}^{+(6)}(\tilde{\xi}_{2s}, \tilde{\eta}_{2s}) + \sum_{s=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} A_{s,n}^{(1)} \sum_{k=0}^{\infty} \vec{V}_{s,k}^{-(6)}(\tilde{\xi}_{2s}, \tilde{\eta}_{2s}) \sum_{j=n}^{\infty} g_n^{+(64)j} (a_{1s}) f_j^{(46)k} (a_{2s}) = \\ &= \sum_{s=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} A_{s,n}^{(2)} \vec{V}_{s,n}^{+(6)}(\tilde{\xi}_{2s}, \tilde{\eta}_{2s}) + \sum_{s=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \vec{V}_{s,n}^{-(6)}(\tilde{\xi}_{2s}, \tilde{\eta}_{2s}) \sum_{k=0}^{\infty} A_{s,k}^{(1)} \sum_{j=k}^{\infty} g_k^{+(64)j} (a_{1s}) f_j^{(46)n} (a_{2s}). \end{aligned} \quad (40)$$

Перейдемо в попередніх формулах від переміщень до напружень на поверхнях Γ_1 і Γ_2 , використовуючи для цього формулу (27):

$$F\vec{V}(\rho, z_1)_{\Gamma_1} = \sum_{s=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} A_{s,n}^{(1)} F\vec{V}_{s,n}^{+(6)}(\tilde{\xi}_{1s}, \tilde{\eta}_{1s})_{|\tilde{\xi}_{1s}=0} + \sum_{s=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} F\vec{V}_{s,n}^{-(6)}(\tilde{\xi}_{1s}, \tilde{\eta}_{1s})_{|\tilde{\xi}_{1s}=0} \sum_{k=0}^{\infty} A_{s,k}^{(2)} \sum_{j=k}^{\infty} g_k^{-(64)j} (a_{2s}) f_j^{(46)n} (-a_{1s});$$

$$F\vec{V}(\rho, z_2)_{\Gamma_2} = \sum_{s=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} A_{s,n}^{(2)} F\vec{V}_{s,n}^{+(6)}(\tilde{\xi}_{2s}, \tilde{\eta}_{2s})_{|\tilde{\xi}_{2s}=0} + \sum_{s=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} F\vec{V}_{s,n}^{-(6)}(\tilde{\xi}_{2s}, \tilde{\eta}_{2s})_{|\tilde{\xi}_{2s}=0} \sum_{k=0}^{\infty} A_{s,k}^{(1)} \sum_{j=k}^{\infty} g_k^{+(64)j} (a_{1s}) f_j^{(46)n} (a_{2s}).$$

Після переходу до координатної форми запису базисних напружень і виконання граничних умов отримаємо розв'язувальну систему у вигляді:

$$\sum_{s=1}^2 (k_s + 1) A_{s,n}^{(1)} W_n^{+0} + \sum_{s=1}^2 (k_s + 1) W_n^{-0} \sum_{k=0}^{\infty} A_{s,k}^{(2)} \sum_{j=k}^{\infty} g_k^{-(64)j} (a_{2s}) f_j^{(46)n} (-a_{1s}) = -\frac{\sigma a_1}{c_{44}} \delta_{n,1}; \quad (41)$$

$$\sum_{s=1}^2 \frac{k_s + 1}{\sqrt{V_s}} A_{s,n}^{(1)} W_n^{+1} + \sum_{s=1}^2 \frac{k_s + 1}{\sqrt{V_s}} W_n^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} A_{s,k}^{(2)} \sum_{j=k}^{\infty} g_k^{-(64)j} (a_{2s}) f_j^{(46)n} (-a_{1s}) = 0; \quad (42)$$

$$\sum_{s=1}^2 (k_s + 1) A_{s,n}^{(2)} W_n^{+0} + \sum_{s=1}^2 (k_s + 1) W_n^{-0} \sum_{k=0}^{\infty} A_{s,k}^{(1)} \sum_{j=0}^{\infty} g_k^{+(64)j} (a_{1s}) f_j^{(46)n} (a_{2s}) = -\frac{\sigma a_2}{c_{44}} \delta_{n,1}; \quad (43)$$

$$\sum_{s=1}^2 \frac{k_s + 1}{\sqrt{V_s}} A_{s,n}^{(2)} W_n^{+1} + \sum_{s=1}^2 \frac{k_s + 1}{\sqrt{V_s}} W_n^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} A_{s,k}^{(1)} \sum_{j=0}^{\infty} g_k^{+(64)j} (a_{1s}) f_j^{(46)n} (a_{2s}) = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (44)$$

де

$$W_n^{+1} = -Q_n(i0) = -(-i)^{n+1} \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2 \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}; \quad W_n^{-1} = -P_n(i0) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos \frac{\pi n}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)};$$

$$W_n^{+0} = -Q_n^{(1)}(i0) = (-i)^{n+1} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right)}; \quad W_n^{-0} = -P_n^{(1)}(i0) = i \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cos \frac{\pi(n+1)}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right)}.$$

Зауважимо, що при $n = 0$ система (41) – (44) задовольняється при $A_{s,n}^{(1)} = A_{s,n}^{(2)} = 0$ ($s = 1, 2$), що є необхідною умовою регулярності розв’язку (38).

Систему (41) – (44) можна подати у вигляді:

$$\sum_{s=1}^2 (k_s + 1) A_{s,n}^{(1)} + \sum_{s=1}^2 \sum_{k=1}^{\infty} t_{s,n,k}^{(1,2)} A_{s,k}^{(2)} = \frac{2}{\pi} \frac{\sigma a_1}{c_{44}} \delta_{n,1}; \tag{45}$$

$$\sum_{s=1}^2 \frac{k_s + 1}{\sqrt{V_s}} A_{s,n}^{(1)} + \sum_{s=1}^2 \sum_{k=1}^{\infty} t_{s,n,k}^{(2,2)} A_{s,k}^{(2)} = 0; \tag{46}$$

$$\sum_{s=1}^2 (k_s + 1) A_{s,n}^{(2)} + \sum_{s=1}^2 \sum_{k=1}^{\infty} t_{s,n,k}^{(1,1)} A_{s,k}^{(1)} = \frac{2}{\pi} \frac{\sigma a_2}{c_{44}} \delta_{n,1}; \tag{47}$$

$$\sum_{s=1}^2 \frac{k_s + 1}{\sqrt{V_s}} A_{s,n}^{(2)} + \sum_{s=1}^2 \sum_{k=1}^{\infty} t_{s,n,k}^{(2,1)} A_{s,k}^{(1)} = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \tag{48}$$

де

$$t_{s,n,k}^{(1,1)} = (k_s + 1) \frac{W_n^{-0}}{W_n^{+0}} h_{s,k,n}^{+(66)}; \quad t_{s,n,k}^{(1,2)} = (k_s + 1) \frac{W_n^{-0}}{W_n^{+0}} h_{s,k,n}^{-(66)}; \quad t_{s,n,k}^{(2,1)} = \frac{k_s + 1}{\sqrt{V_s}} \frac{W_n^{-1}}{W_n^{+1}} h_{s,k,n}^{+(66)}; \quad t_{s,n,k}^{(2,2)} = \frac{k_s + 1}{\sqrt{V_s}} \frac{W_n^{-1}}{W_n^{+1}} h_{s,k,n}^{-(66)};$$

$$h_{s,k,n}^{+(66)} = \sum_{j=k}^{\infty} g_k^{+(64)j} (a_{1s}) f_j^{(46)n} (a_{2s}); \quad h_{s,k,n}^{-(66)} = \sum_{j=k}^{\infty} g_k^{-(64)j} (-a_{2s}) f_j^{(46)n} (-a_{1s}).$$

Аналіз розв’язувальної системи.

Теорема 3. При $a_{1s} + a_{2s} < z_{12} / \sqrt{V_s}$, $s = 1, 2$ оператор системи є фредгольмовим оператором в просторі l_2 .

Доведення. Твердження теореми випливає з того, що оператор системи є сумою неперервно оборотного і цілком неперервного операторів. Тоді, за відомою *теоремою С. М. Нікольського*, такий оператор є фредгольмовим. Щоб обґрунтувати перше твердження достатньо показати, що визначник Δ , утворений коефіцієнтами при невідомих $A_{s,n}^{(1)}$, $A_{s,n}^{(2)}$ у перших сумах лівих частин рівнянь системи, відмінний від нуля. Це перевіряється безпосередньо, оскільки:

$$\Delta = \begin{vmatrix} k_1 + 1 & k_2 + 1 \\ \frac{k_1 + 1}{\sqrt{V_1}} & \frac{k_2 + 1}{\sqrt{V_2}} \end{vmatrix} = \frac{k_1 + 1}{\sqrt{V_1}} \frac{k_2 + 1}{\sqrt{V_2}} (\sqrt{V_1} - \sqrt{V_2}) \neq 0,$$

при $V_1 \neq V_2$.

Для доведення повної неперервності оператора системи, який задається нескінченною матрицею з елементами $t_{s,n,k}^{(i,j)}$, як відомо, треба показати збіжність числових рядів:

$$\sum_{n,k=1}^{\infty} |t_{s,n,k}^{(i,j)}|^2 < \infty \quad i, j, s = 1, 2. \tag{49}$$

Доведемо це, наприклад, для елементів $t_{s,n,k}^{(1,1)}$. Продиференціюємо обидві частини тотожності (30) за змінною $\tilde{\xi}_{2s}$, після чого підставимо $\tilde{\xi}_{2s} = 0$:

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{\xi}_{2s}} u_n^{+(6)}(\tilde{\xi}_{1s}, \tilde{\eta}_{1s})|_{\tilde{\xi}_{2s}=0} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \tilde{\xi}_{2s}} u_k^{-(6)}(\tilde{\xi}_{2s}, \tilde{\eta}_{2s})|_{\tilde{\xi}_{2s}=0} h_{s,k,n}^{+(66)}. \tag{50}$$

Зауважимо, що функція

$$\frac{\partial \tilde{\xi}_{1s}}{\partial \tilde{\xi}_{2s}} = \frac{a_{2s} \mathbf{ch} \tilde{\xi}_{2s} \cos \tilde{\eta}_{2s}}{a_{1s} \mathbf{ch} \tilde{\xi}_{1s} \cos \tilde{\eta}_{1s}}$$

є регулярною функцією при $\tilde{\xi}_{2s} = 0$, а ряд в (50) збігається при $a_{1s} + a_{2s} < z_{12} / \sqrt{V_s}$, $s = 1, 2$. Запишемо *рівність*

Парсеваля для розвинення (50):

$$\int_0^\pi \left| \frac{\partial \tilde{\xi}_{1s}}{\partial \tilde{\xi}_{2s}} \frac{\partial u_n^{+(6)}}{\partial \tilde{\xi}_{1s}} (\tilde{\xi}_{1s}, \tilde{\eta}_{1s}) \Big|_{\tilde{\xi}_{2s}=0} \right|^2 \sin \tilde{\eta}_{2s} d\tilde{\eta}_{2s} = \frac{1}{q^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{2k+1} |P_k^{(1)}(i0)|^2 |h_{s,k,n}^{+(66)}|^2.$$

Після підстановки в останню формулу $|P_k^{(1)}(i0)|^2$ підсумуємо обидві частини останньої формули за індексом n від одиниці до нескінченності:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\pi \left| \frac{\partial \tilde{\xi}_{1s}}{\partial \tilde{\xi}_{2s}} \frac{\partial u_n^{+(6)}}{\partial \tilde{\xi}_{1s}} (\tilde{\xi}_{1s}, \tilde{\eta}_{1s}) \Big|_{\tilde{\xi}_{2s}=0} \right|^2 \sin \tilde{\eta}_{2s} d\tilde{\eta}_{2s} = \frac{4}{\pi} \frac{1}{q^2} \sum_{n,k=1}^{\infty} \frac{2}{2k+1} \sin^2 \frac{\pi k}{2} \left| \frac{\Gamma(k/2+1)}{\Gamma(k/2+1/2)} \right|^2 |h_{s,k,n}^{+(66)}|^2. \quad (51)$$

З асимптотик функцій Лежандра першого и другого роду випливає, що ряд зліва в останній формулі збігається. Отже, збігається ряд і в правій частині тотожності (51). У такий же спосіб можна показати збіжність ряду

$$\sum_{n,k=1}^{\infty} \frac{2}{2k+1} \cos^2 \frac{\pi k}{2} \left| \frac{\Gamma(k/2+1)}{\Gamma(k/2+1/2)} \right|^2 |h_{s,k,n}^{+(66)}|^2. \quad (52)$$

З іншого боку,

$$\sum_{n,k=1}^{\infty} |t_{s,n,k}^{(1,1)}|^2 = (k_s + 1)^2 \sum_{n,k=1}^{\infty} \left| \frac{W_n^{-0}}{W_n^{+0}} h_{s,k,n}^{+(66)} \right|^2 = (k_s + 1)^2 \frac{4}{\pi^2} \sum_{n,k=1}^{\infty} \sin^2 \frac{\pi n}{2} |h_{s,k,n}^{+(66)}|^2 \quad s = 1, 2,$$

до того ж ряд

$$\sum_{n,k=1}^{\infty} \sin^2 \frac{\pi n}{2} |h_{s,k,n}^{+(66)}|^2$$

мажорнується рядом

$$\sum_{n,k=1}^{\infty} \frac{4}{2k+1} \left| \frac{\Gamma(k/2+1)}{\Gamma(k/2+1/2)} \right|^2 |h_{s,k,n}^{+(66)}|^2,$$

збіжність якого випливає зі збіжності рядів (51), (52).

Аналогічно доводиться нерівність (49) для інших значень індексів i та j .

Таким чином, теорему повністю доведено.

Чисельний експеримент. Для визначення напруженого стану в задачі, що розглядається, необхідно чисельно розв'язати систему (45) – (48). Оскільки оператор системи фредгольмів для цього можна коректно застосувати *метод редукції*. Чисельний розв'язок системи використовується для визначення деяких характерних напружень. Так формула для нормального напруження на поверхні $z_1 = 0$ зовні тріщини Γ_1 має такий вигляд:

$$\sigma_z = \frac{c_{44}}{\sqrt{\rho^2 - a_1^2}} \sum_{s=1}^2 (k_s + 1) \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} P_n^{(1)}(0) \left[A_{s,n}^{(1)} Q_n(\text{ish} \tilde{\xi}_{1s}) + P_n(\text{ish} \tilde{\xi}_{1s}) \sum_{k=1}^{\infty} A_{s,k}^{(2)} h_{s,k,n}^{-(66)} \right] \right\}, \quad (53)$$

Аналогічна формула має місце в площині тріщини Γ_2 .

Як показує формула (53), нормальне напруження має характерну кореневу особливість в околі вершини тріщини. Для порівняння числових значень напружень при різних параметрах задачі зазвичай вводять *коєфіцієнт інтенсивності напружень (КІН)*:

$$K_{1z} = \lim_{\rho \rightarrow a_1+0} \frac{\pi}{2} \frac{\sigma_{z|z_1=0}}{\sigma} \frac{\sqrt{\rho^2 - a_1^2}}{a_1}.$$

Перехід у системі (45) – (48) до безрозмірних невідомих за формулою:

$$A_{s,n}^{(j)} = \frac{2}{\pi} \frac{\sigma a_1}{c_{44}} \tilde{A}_{s,n}^{(j)}$$

приводить до такої формули для КІН:

$$K_{1z} = \sum_{s=1}^2 (k_s + 1) \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{A}_{s,2k-1}^{(1)}.$$

Чисельні розрахунки проводилися у випадку, коли матеріалом трансверсально-ізотропного простору вибрався пісковик з пружними константами $c_{11} = 5.8576 \cdot 10^{10}$ Па, $c_{12} = 2.5019 \cdot 10^{10}$ Па, $c_{13} = 2.0793 \cdot 10^{10}$ Па, $c_{33} = 6.1105 \cdot 10^{10}$ Па, $c_{44} = 1.6584 \cdot 10^{10}$ Па. Для нього корені рівняння (5) дорівнюють $\nu_1 = 0.52$, $\nu_2 = 2.01$.

В табл. 1 показано результати розрахунків КІН K_{Iz} в залежності від відносних розмірів тріщин, які визначаються відношеннями радіусів тріщин до відстані між їх центрами.

Результати розрахунків КІН показують, що він незначно спадає при фіксованому розмірі першої тріщини і зростанні розміру другої. Навпаки, при зростанні розміру першої тріщини при фіксованому розмірі другої спостерігається зростання коефіцієнта K_{Iz} . Отримані результати добре узгоджуються з відомим коефіцієнтом інтенсивності нормальних напружень 0.6366 для випадку однієї тріщини. За результатами розрахунків можна зробити такий якісний висновок:

КІН у вершині тріщини більше у випадку однієї навантаженої тріщини, ніж при двох навантажених тріщинах.

Таблиця 1 – Значення коефіцієнтів інтенсивності напружень K_{Iz} в залежності від відносних розмірів тріщин

$\frac{a_2}{z_{12}} \setminus \frac{a_1}{z_{12}}$	0.05	0.20	0.35
0.05	0.63644	0.636647	0.63651
0.20	0.62612	0.62758	0.63012
0.35	0.58966	0.59488	0.60468

Графіки розподілу нормальних напружень в площині $z_1 = 0$ зовні тріщини Γ_1 наведено на рис. 1, 2. Тут так само фіксується розмір першої тріщини $a_1/z_{12} = 0.05$ і змінюються розміри другої (рис. 1), або, навпаки, фіксується розмір другої $a_2/z_{12} = 0.35$, а змінюється розмір першої (рис. 2). У першому випадку величина напружень спадає з ростом розміру другої тріщини, у другому – зростає з ростом розміру першої тріщини.

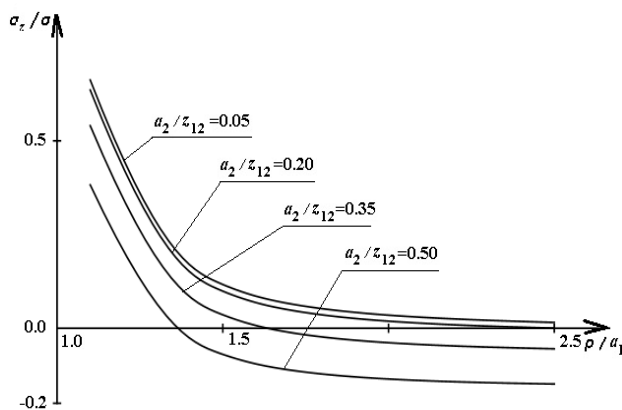


Рис. 1 – Графіки розподілу напружень σ_z/σ в площині $z_1 = 0$ зовні тріщини Γ_1 при $a_1/z_{12} = 0.05$.

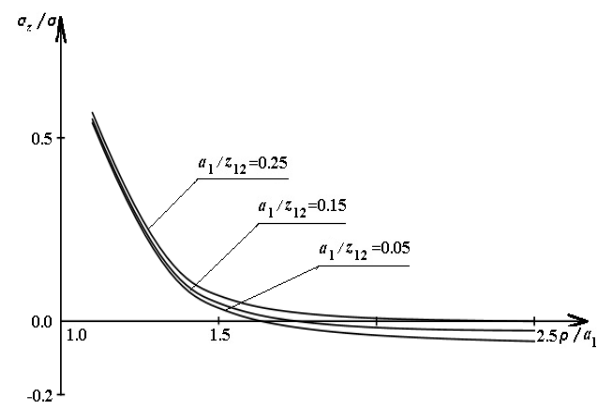


Рис. 2 – Графіки розподілу напружень σ_z/σ в площині $z_1 = 0$ зовні тріщини Γ_1 при $a_2/z_{12} = 0.35$.

Таблиця 2 – Збіжність методу редукції на прикладі обчислення напруження σ_z/σ при $a_1/z_{12} = a_2/z_{12} = 0.25$

ρ/a_1	1.1	1.3	1.5	1.7	1.9
$n_{\max} = 15$	0.625291	0.184617	0.0872431	0.0488844	0.0302942
$n_{\max} = 20$	0.625291	0.184617	0.0872429	0.0488430	0.0302903

У табл. 2 на прикладі обчислення напруження σ_z/σ при $a_1/z_{12} = a_2/z_{12} = 0.25$ показано практичну збіжність методу редукції. Тут параметр n_{\max} задає число невідомих коефіцієнтів $A_{s,n}^{(j)}$ однієї групи, які утримуються в редукованій системі. Отже розміром матриці такої системи є $4n_{\max} \times 4n_{\max}$. Результати, наведені в табл. 2, свідчать про те, що відносна похибка обчислення напружень на інтервалі $\rho/a_1 \in (1.1, 1.9)$ не перевищує 0.013 %.

В процесі дослідження знаходилися також і дотичні напруження $\tau_{\rho z}$ при $z_1 = 0$, $\rho/a_1 > 1$. Але їх значення виявилися на порядок менше нормальних напружень, тому вони не приводяться.

Перспективи подальших досліджень. Природним продовженням дослідження цієї статті є вивчення напруженого стану трансверсально-ізотропного простору з двома круговими тріщинами, які розташовані в одній площині. На відміну від розглянутого випадку двох паралельних тріщин, де особливості математичного апарату не дають можливості наблизити тріщини на будь-яку відстань, тріщини в одній площині можуть бути розташовані як завгодно близько. Визначення напруженого стану в околі двох сусідніх вершин дозволяє знайти критичне навантаження, при якому настає руйнування матеріалу. Зауважимо, однак, що для вказаного дослідження необхідним є подальший розвиток математичного апарату узагальненого методу Фур'є.

Висновки. В даній статті проведено дослідження задачі про напружений стан у трансверсально-ізотропному просторі з двома паралельними круговими тріщинами, центри яких розташовано на осі анізотропії простору. На площині тріщин діє стале нормальне навантаження. Задача розв'язувалася узагальненим методом Фур'є. Для цього введено системи стиснутих сфероїдальних координат, початки яких пов'язані з центрами тріщин. Загальний розв'язок задачі будувався у вигляді рядів за осесиметричними варіантами загальних векторних розв'язків системи рівнянь рівноваги трансверсально-ізотропного тіла в сфероїдальних координатах, які раніше було побудовано одним з авторів статті. Для реалізації методу виконано його подальший розвиток на стиснуті сфероїдальні системи координат з початками, зсунутими за віссю Oz . Для цього отримано нові теореми додавання базисних векторних переміщень трансверсально-ізотропних тіл у вказаних вище системах координат. Після застосування узагальненого методу Фур'є задачу зведено до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Доведено, що при певних геометрично-механічних умовах оператор системи є фредгольмовим оператором. При чисельному розв'язанні системи використано метод редукції. Отримано графіки нормальних напружень в площині однієї з тріщин поза її межами, а також значення коефіцієнтів інтенсивності напружень у вершині тріщини при різних геометричних параметрах тріщин. Отримані результати узгоджуються з відомим значенням коефіцієнта інтенсивності напружень в задачі з однією тріщиною. Наведено дослідження практичної збіжності метода редукції.

Як важливу супутню проблему розглянуто задачу доведення базисності загального осесиметричного набору зовнішніх розв'язків системи рівнянь рівноваги трансверсально-ізотропного тіла, межа якого описується стиснутими сфероїдальними координатами. Ключовою проблемою тут є отримання тонких оцінок знизу модуля визначника першої крайової задачі. Наслідком отриманого результату є декілька важливих оцінок з теорії спеціальних функцій, в яких фігурують функції Лежандра другого роду від чисто уявного аргументу.

Список літератури

1. Kryvyi O. F. Circular interface crack in the inhomogeneous transversely isotropic space // *Materials Science*. – 2012. – Vol. 47. – No. 6. – P. 726–736. DOI: 10.1007/s11003-012-9450-9.
2. Kit H. S., Kushnir R. M., Mykhas'kiv V. V., Nykolyshyn M. M. Methods for the determination of static and dynamic stresses in bodies with subsurface cracks // *Materials Science*. – 2011. – Vol. 47. – P. 177–187. DOI: 10.1007/s11003-011-9382-9.
3. Bogdanov V. L. On a circular shear crack in a semiinfinite composite with initial stresses // *Materials Science*. – 2007. – Vol. 43. – P. 321–330. DOI: 10.1007/s11003-007-0037-9.
4. Davidson S. Boundary Value Problems in Elasticity and Thermoelasticity // Doctor of Philosophy (PhD), Dissertation, Mathematics & Statistics, Old Dominion University. – 1990. – P. 105. DOI: 10.25777/wzrb-7781.
5. Shivay O. N., Mukhopadhyay S. On the solution of a problem of extended thermoelasticity theory (ETE) by using a complete finite element approach // *CMST*. – 2019. – Vol. 25. – No. 2. – P. 61–70.
6. Gorbushin N., Eremeyev V., Mishuris G. On stress singularity near the tip of a crack with surface stresses // *International Journal of Engineering Science*. – 2020. – Vol. 146, 103183. DOI: 10.1016/j.ijengsci.2019.103183.
7. Karapetian E., Kachanov M. Green's functions for the isotropic or transversely isotropic space containing a circular crack // *Acta Mechanica*. – 1998. – Vol. 126. – P. 169–187. DOI: 10.1007/BF01172806.
8. Fabrikant V. I. (1997) Interaction of a parallel circular cracks subjected to arbitrary loading in transversely isotropic elastic space // *Applicable Analysis*. – 1997. – Vol. 66. – No. 3–4. – P. 273–290. DOI: 10.1080/00036819708840587.
9. Guerrero F., Sevostianov I., Giraud A. On a Possible Approximation of Changes in Elastic Properties of a Transversely Isotropic Material due to an Arbitrarily Oriented Crack // *Int J Fract*. – 2008. – Vol. 153. – P. 169–176. DOI: 10.1007/s10704-009-9311-1.
10. Seyedkavoosi S., Vilchevskaya E., Sevostianov I. Randomly oriented cracks in a transversely isotropic material // *International Journal of Solids and Structures*. – 2018. – Vol. 150. – P. 222–229.
11. Zureick A. H. The asymmetric displacement of a rigid spheroidal inclusion embedded in transversely isotropic medium // *Acta. mech.* – 1989. – Vol. 77. – No. 1–2. – P. 273–290.
12. Zhong Z. Analysis of a transversely isotropic rod containing a single cylindrical inclusion with axisymmetric eigenstrains // *Int. Journal of Solids and Structures*. – 2002. – Vol. 39. – No. 23. – P. 5753–5765.
13. Wang X., Wang C., Lu G., Zhou B. M. Thermal stress-focusing in a transversely isotropic sphere and an isotropic sphere // *Journal Of Thermal Stresses*. – 2002. – Vol. 25. – No. 1. – P. 31–44.
14. Toshiaki H. Thermal stress-focusing effect in a transversely isotropic spherical inclusion embedded in an isotropic infinite elastic medium // *Journal of Thermal Stresses*. – 2002. – Vol. 25. – No. 7. – P. 691–702.
15. Подільчук Ю. Н. Точные аналитические решения пространственных граничных задач статики трансверсально-изотропного тела канонической формы (обзор) // *Прикладная механика*. – 1997. – Т. 33. – № 10. – С. 3–30.
16. Николаев А. Г. Теоремы сложности перемещений трансверсально-изотропных канонических тел // *Харьковский авиац. ин-т.* – Харьков, 1996. – 52 с. – Деп. В ГНТБ України 10.07.96, № 1569 – Ук96.
17. Николаев А. Г., Щербакова Ю. А. Круговая трещина в трансверсально-изотропном сфероиде под действием нормальной нагрузки // *Теоретическая и прикладная механика*. – 2003. – Вып. 38. – С. 9–14.
18. Николаев О. Г., Щербакова Ю. А. Аналіз напружено-деформісного стану трансферсально-ізотропного сфероїда зі сфероїдальною порожниною // *Вісник Львівського університету. Серія : прикладна математика та інформатика*. – 2007. – Вып. 12. – С. 176–181.
19. Николаев А. Г. Обоснование метода Фурье в основных краевых задачах теории упругости для некоторых пространственных канонических областей // *Доповіді НАН України*. – 1998. – № 2. – С. 78–83.
20. Николаев А. Г., Щербакова Ю. А. Базисность осесимметричных решений системы уравнений равновесия для трансверсально-изотропного вытянутого сфероїда // *Авиационно-космическая техника и технология*. – 2011. – № 1(78). – С. 32–39.
21. Николаев А. Г., Проценко В. С. Обобщенный метод Фурье в пространственных задачах теории упругости. Монография. – Харьков : Нац. аэрокосм. ун-т им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», 2011. – 344 с.

References (transliterated)

1. Kryvyi O. F. Circular interface crack in the inhomogeneous transversely isotropic space. *Materials Science*. 2012, vol. 47, no. 6, pp. 726–736. DOI: 10.1007/s11003-012-9450-9.
2. Kit H. S., Kushnir R. M., Mykhas'kiv V. V., Nykolyshyn M. M. Methods for the determination of static and dynamic stresses in bodies with sub-

- surface cracks. *Mater. Sci.* 2011, vol. 47, pp. 177–187. DOI: 10.1007/s11003-011-9382-9.
3. Kit H. S., Kushnir R. M., Mykhas'kiv V. V., Nykolysyn M. M. Methods for the determination of static and dynamic stresses in bodies with sub-surface cracks. *Mater. Sci.* 2011, vol. 47, pp. 177–187. DOI: 10.1007/s11003-011-9382-9.
 4. Davidson S. *Boundary Value Problems in Elasticity and Thermoelasticity*. Doctor of Philosophy (PhD), Dissertation, Mathematics & Statistics, Old Dominion University, 1990. p. 105. DOI: 10.25777/wzrb-7781.
 5. Shivay O. N., Mukhopadhyay S. On the solution of a problem of extended thermoelasticity theory (ETE) by using a complete fi-nite element approach. *CMST*. 2019, vol. 25, no. 2, pp. 61–70.
 6. Gorbushin N., Eremyev V., Mishuris G. On stress singularity near the tip of a crack with surface stresses. *International Journal of Engineering Science*. 2020, vol. 146, 103183. DOI: 10.1016/j.ijengsci.2019.103183.
 7. Karapetian E., Kachanov M. Green's functions for the isotropic or transversely isotropic space containing a circular crack. *Acta Mechanica*. 1998, vol. 126, pp. 169–187. DOI: 10.1007/BF01172806.
 8. Fabrikant V. I. Interaction of a parallel circular cracks subjected to arbitrary loading in transversely isotropic elastic space. *Applicable Analysis*. 1997, vol. 66, no. 3–4, pp. 273–290. DOI: 10.1080/00036819708840587.
 9. Guerrero F., Sevostianov I., Giraud A. On a Possible Approximation of Changes in Elastic Properties of a Transversely Iso-tropic Material due to an Arbitrarily Oriented Crack. *Int J Fract*. 2008, vol. 153, pp. 169–176. DOI:10.1007/s10704-009-9311-1.
 10. Seyedkavoosi S., Vilchevskaya E., Sevostianov I. Randomly oriented cracks in a transversely isotropic material. *International Journal of Solids and Structures*. 2018, vol. 150, pp. 222–229.
 11. Zureick A. H. The asymmetric displacement of a rigid spheroidal inclusion embedded in transversely isotropic medium. *Acta. mech.* 1989, vol. 77, no. 1–2, pp. 101–110.
 12. Zhong Z. Analysis of a transversely isotropic rod containing a single cylindrical inclusion with axisymmetric eigenstrains. *Int. Journal of Solids and Structures*. 2002, vol. 39, no. 23, pp. 5753–5765.
 13. Wang X., Wang C., Lu G., Zhou B. M. Thermal stress-focusing in a transversely isotropic sphere and an isotropic sphere. *Journal Of Thermal Stresses*. 2002, vol. 25, no. 1, pp. 31–44.
 14. Toshiaki H. Thermal stress-focusing effect in a transversely isotropic spherical inclusion embedded in an isotropic infinite elastic medium. *Journal Of Thermal Stresses*. 2002, vol. 25, no. 7, pp. 691–702.
 15. Podil'chuk Ju. N. Tochnye analiticheskie resheniya prostranstvennykh granichnykh zadach statiki transversal'no-izotropnogo tela kanonicheskoy formy (obzor) [Exact analytical solutions of spatial boundary value problems of statics of a transversally isotropic body of canonical form (review)]. *Prikladnaya mekhanika* [Applied Mechanics]. 1997, vol. 33, no. 10, pp. 3–30.
 16. Nikolaev A. G. *Teoremy slozheniya peremeshheniy transversal'no-izotropnykh kanonicheskikh tel* [Theorems for adding displacements of transversely isotropic canonical bodies]. Khar'kov, Khar'kovskiy aviac. in-t. Publ., 1996, 52 p. Dep. in the National Scientific and Technical Library of Ukraine, 10.07.96, no. 1569 – Uk96.
 17. Nikolaev A. G., Shherbakova Ju. A. Krugovaya treshhina v transversal'no-izotropnom sferoide pod deystviem normal'noy nagruzki [Circular crack in a transversely isotropic spheroid under normal load]. *Teoreticheskaya i prikladnaya mekhanika* [Theoretical and Applied Mechanics]. 2003, vol. 38, pp. 9-14.
 18. Nikolayev O. G., Shherbakova Yu. A. Analiz napruzhenno-deformivnogo stanu transfersal'no-izotropnogo sferoyida zi sferoyidal'noyu porozhny-noyu [Analysis of the stress-strain state of a transfer-isotropic spheroid with a spheroidal cavity]. *Visnyk L'vivs'kogo universytetu. Seriya : prykladna matematika ta informatyka* [Bulletin of Lviv University. Series : applied mathematics and informatics]. 2007, vol. 12, pp. 176–181.
 19. Nikolaev A. G. Obosnovanie metoda Fur'e v osnovnykh kraevykh zadachakh teorii uprugosti dlya nekotorykh prostranstvennykh kanonicheskikh oblastey [Justification of the Fourier method in the main boundary value problems of elasticity theory for some spatial canonical regions]. *Dopovidi NAN Ukrayiny* [Reports of the National Academy of Science of Ukraine]. 1998, no. 2, pp. 78–83.
 20. Nikolaev A. G., Shherbakova Ju. A. Bazisnost' osesimmetrichnykh resheniy sistemy uravneniy ravnovesiya dlya transversal'no-izotropnogo vyt-yanutogo sferoida [The basis property of axisymmetric solutions of the system of equilibrium equations for a transversely isotropic prolate spheroid]. *Aviacionno-kosmicheskaya tekhnika i tekhnologiya* [Aviation and Space Technique and Technology]. 2011, no 1(78), pp. 32–39.
 21. Nikolaev A. G., Protzenko V. S. *Obobshchennyy metod Fur'e v prostranstvennykh zadachakh teorii uprugosti. Monografiya* [Generalized Fourier Method in Spatial Problems of the Theory of Elasticity. Monograph]. Khar'kov, Nac. ayerokosm. un-t im. N. E. Zhukovskogo «KhAI» Publ., 2011. – 344 p.

Надійшла (received) 25.10.2022

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Николаев Олексій Георгійович – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри вищої математики та системного аналізу, Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського «Харківський авіаційний інститут», м. Харків; тел.: (067) 996-04-92; e-mail: a.nikolaev@khai.edu.

Николаев Алексей Георгиевич – доктор фізико-математических наук, професор, заведуючий кафедрой высшей математики и системного анализа, Национальный аэрокосмический университет им. М. Е. Жуковского «Харковский авиационный институт», г. Харьков; тел.: (067) 996-04-92; e-mail: a.nikolaev@khai.edu.

Nikolaev Olexsii Georgiovich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of Department of Higher Mathematics and System Analysis, M. Y. Zhukovsky National Aerospace University "Kharkiv Aviation Institute", Kharkiv; tel.: (067) 996-04-92; e-mail: a.nikolaev@khai.edu.

Крайниченко Аліна Сергійвна – аспірант кафедри вищої математики та системного аналізу, Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського «Харківський авіаційний інститут», м. Харків; тел.: (099) 152-15-69; e-mail: a.krainychenko@khai.edu.

Крайниченко Алина Сергеевна – аспирант кафедры высшей математики и системного анализа, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт», г. Харьков; тел.: (099) 152-15-69; e-mail: a.krainychenko@khai.edu.

Krainychenko Alina Sergiivna – postgraduate student at the Department of Higher Mathematics and System Analysis, M. Y. Zhukovsky National Aerospace University "Kharkiv Aviation Institute", Kharkiv; tel.: (099) 152-15-69; e-mail: a.krainychenko@khai.edu.