

О. О. КОРЯК**АКСОЇДИ ШАРНИРА ГУКА**

Аналіз літературних джерел, присвячених дослідженню і конструюванню карданних передач з використанням шарніра Гука, показав, що особливості сферичного руху хрестовини карданного шарніра освітлені недостатньо повно. Це пояснюється відносно незначною масою хрестовини, через що вона майже не впливає на динаміку карданної передачі. Потреба врахування масово-геометричних параметрів хрестовини та всебічного аналізу її руху може виникнути при точних розрахунках високошвидкісних карданних передач. В цьому разі рух хрестовини зручно розглядати як обкочування без ковзання рухомого аксоїда по нерухомому аксоїду. Такий підхід дозволяє більш повно дослідити особливості сферичного руху хрестовини і дає наочне уявлення про орієнтацію її миттєвої осі обертання в нерухомій і рухомій системах координат. Виходячи з цього, дана робота присвячена побудові кінематичної моделі хрестовини шарніра Гука, рух якої розглядається як обкочування без ковзання рухомого аксоїда по нерухомому.

В результаті проведеного кінематичного аналізу шарніра Гука отримано рівняння годографів вектора абсолютної кутової швидкості хрестовини у нерухомій і рухомій системах координат, а також визначено параметри нерухомого і рухомого аксоїдів хрестовини карданного шарніра. Доведено, що нерухомий аксоїд хрестовини шарніра Гука являє собою похилий еліптичний конус з вершиною в центрі хрестовини, а його протилежні твірні, які перетинають велику вісь напрямного еліпса, збігаються з осями ведучого і веденого валів шарніра. Рухомий аксоїд хрестовини є замкнутою конічною поверхнею зі змінним кутом розчину, максимальне значення якого дорівнює подвоєному значенню міжосевого кута передачі. При невеликих значеннях міжосевого кута, що має місце в практиці використання одинарного шарніра Гука, рухомим аксоїдом можна наближено вважати прямий круговий конус з вершиною в центрі хрестовини і кутом розчину, який дорівнює подвоєному значенню міжосевого кута передачі. Похибка такого припущення стрімко зростає зі збільшенням міжосевого кута передачі. Підтверджена правильність отриманої математичної моделі шляхом комп'ютерного моделювання в середовищі Autodesk Inventor.

Отримані результати можуть бути використані при дослідженнях динамічних процесів, які відбуваються в карданних передачах з використанням шарніра Гука.

Ключові слова: шарнір Гука, хрестовина, міжосевий кут передачі, кутова швидкість, сферичний рух, годограф, аксоїд.

А. А. КОРЯК**АКСОИДЫ ШАРНИРА ГУКА**

Анализ литературных источников, посвященных исследованию и конструированию карданных передач с использованием шарнира Гука, показал, что особенности сферического движения крестовины карданного шарнира освещены недостаточно полно. Это объясняется относительно незначительной массой крестовины, вследствие чего она почти не влияет на динамику карданной передачи. Потребность в учете массово-геометрических параметров крестовины и всестороннего анализа ее движения может возникнуть при точных расчетах высокоскоростных карданных передач. В этом случае движение крестовины удобно рассматривать как обкатывание без скольжения подвижного аксоида по неподвижному аксоиду. Такой подход позволяет более полно исследовать особенности сферического движения крестовины и дает наглядное представление об ориентации ее мгновенной оси вращения в неподвижной и подвижной системах координат. Исходя из этого, данная работа посвящена построению кинематической модели крестовины шарнира Гука, движение которой рассматривается как обкатывание без скольжения подвижного аксоида по неподвижному.

В результате проведенного кинематического анализа шарнира Гука получены уравнения годографов вектора абсолютной угловой скорости крестовины в неподвижной и подвижной системах координат, а также определены параметры неподвижного и подвижного аксоидов крестовины карданного шарнира. Доказано, что неподвижный аксоид крестовины шарнира Гука представляет собой наклонный эллиптический конус с вершиной в центре крестовины, а его противоположные образующие, пересекающие большую ось направляющего эллипса, совпадают с осями ведущего и ведомого валов шарнира. Подвижный аксоид крестовины является замкнутой конической поверхностью с переменным углом раствора, максимальное значение которого равно удвоенному значению межосевого угла передачи. При небольших значениях межосевого угла, что имеет место в практике использования одинарного шарнира Гука, подвижным аксоидом можно приближенно считать прямую круговую конус с вершиной в центре крестовины и углом раствора, равным удвоенному значению межосевого угла передачи. Погрешность такого предположения стремительно растет с увеличением межосевого угла передачи. Правильность полученной математической модели подтверждена путем компьютерного моделирования в среде Autodesk Inventor.

Полученные результаты могут быть использованы при исследованиях динамических процессов, происходящих в карданных передачах с использованием шарнира Гука.

Ключевые слова: шарнир Гука, крестовина, межосевой угол передачи, угловая скорость, сферическое движение, годограф, аксоид.

О. О. KORIAK**AXOIDS OF HOOKE'S JOINT**

The analysis of literary sources devoted to the research and construction of cardan transmissions using the Hooke's joint showed that the peculiarities of the spherical movement of the cardan joint crosspiece are insufficiently covered. This is explained by the relatively small weight of the crosspiece, due to which it almost does not affect the dynamics of the cardan transmission. The need to take into account the mass-geometric parameters of the crosspiece and to analyze comprehensively its movement may arise during accurate calculations of high-speed cardan transmissions. In this case, it is convenient to consider the movement of the crosspiece as rolling without sliding of the moving axoid on the stationary axoid. This approach makes it possible to more fully investigate the peculiarities of the spherical movement of the crosspiece and gives a visual representation of the orientation of its instantaneous axis of rotation in fixed and moving coordinate systems. Based on this, this work is devoted to the construction of a kinematic model of the Hooke's joint crosspiece, the movement of which is considered as rolling without sliding of a moving axoid on a stationary one.

As a result of the kinematic analysis of the Hooke's joint, the equations of the hodographs of the vector of the absolute angular velocity of the crosspiece in the fixed and moving coordinate systems were obtained, and the parameters of the fixed and moving axoids of the crosspiece of the cardan joint were determined. It is proved that the stationary axoid of the crosspiece of the Hooke's joint is an oblique elliptic cone with the apex in the center of the crosspiece, and its opposite generatrices, crossing the major axis of the guide ellipse, coincide with the axes of the drive and driven shafts of the joint. The moving axoid of the crosspiece is a closed conical surface with a variable opening angle, the maximum value of which is equal to twice the value of the interaxial transmission angle. With small values of the interaxial angle, which occur in the practice of using a single Hooke's joint, a moving axoid can be approximately considered as a straight circular cone with a vertex in the center of the crosspiece and an opening angle equal to twice the value of the interaxial transmission angle. The error of this assumption increases rapidly with the increase of the interaxial transmis-

© О. О. Коряк, 2022

sion angle. The correctness of the obtained mathematical model was confirmed by computer modeling in the Autodesk Inventor environment.

The obtained results can be used in the study of dynamic processes that occur in cardan transmissions using Hooke's joint.

Key words: Hooke's joint, crosspiece, interaxial transmission angle, angular velocity, spherical motion, godograf, axoid.

Вступ. Шарнір Гука дозволяє передавати обертальний рух у випадках, коли осі валів перетинаються під деяким кутом α , який може змінюватися в процесі роботи передачі. Даний шарнір отримав широке розповсюдження в приводах різноманітних механізмів завдяки простоті і надійності конструкції. Головний недолік шарніра Гука полягає в тому, що при $\alpha \neq 0$ вихідний вал обертається нерівномірно відносно вхідного вала, періодично то випереджаючи його, то відстаючи від нього. В результаті рівномірний обертальний рух ведучого вала перетворюється на періодичний нерівномірний обертальний рух веденого вала. Нерівномірність обертання різко збільшується зі збільшенням кута α . Тому використання *одинарного* шарніра Гука обмежується тихохідними передачами при невеликих значеннях міжосьового кута передачі α . Поширити область використання шарніра Гука на відповідальні швидкохідні передачі можна шляхом застосування *подвійного* шарніра Гука.

Аналіз останніх досліджень. Базові теоретичні відомості, які стосуються *геометричних, кінематичних і силових параметрів шарніра* нерівних кутових швидкостей, викладені в підручниках з теорії механізмів і машин [1 – 3] та теоретичної механіки [4], а також в спеціалізованій літературі [5, 6]. Відповіді на питання, що пов'язані з практичним використанням шарніра Гука, можна знайти в літературі, орієнтованій на конструювання шарніра Гука та розрахунок його елементів [6, 7]. Крім того, значна кількість робіт присвячена дослідженню *динаміки шарніра Гука* [5, 8 – 11] та його *надійності* [11, 12].

Втім, як показав аналіз літературних джерел, деякі питання кінематики шарніра Гука висвітлені недостатньо повно. Це, зокрема, стосується кінематичних характеристик *сферичного руху хрестовини*. В загальних курсах *теорії механізмів і машин* при розгляді кінематики шарніра нерівних кутових швидкостей головна увага приділяється отриманню і аналізу формул, які пов'язують кути повороту вхідного і вихідного валів, а також їх кутові швидкості [1 – 3]. Аналіз руху хрестовини зазвичай обмежується розрахунковими залежностями для визначення її відносних кутових швидкостей відносно *карданних вилок* [2, 3]. При більш докладному кінематичному аналізі визначаються відносні кути повороту ланок в кінематичних парах хрестовини і карданних вилок [5, 13], а також кутове прискорення хрестовини в її відносному та абсолютному рухах [13]. Але при цьому орієнтація миттєвої осі обертання хрестовини при її сферичному русі залишається поза увагою.

Слід визнати, що в глибокому аналізі сферичного руху хрестовини шарніра Гука в переважній більшості випадків немає практичної необхідності. Це пояснюється відносно незначною масою хрестовини, через що вона майже не впливає на динаміку карданної передачі. Сферичний рух хрестовини зі змінним, відносно миттєвої осі обертання, моментом інерції позначається на нерівномірності обертання валів карданної передачі. Проте цей вплив досить незначний і ним зазвичай нехтують.

Потреба врахування *масово-геометричних параметрів хрестовини* та всебічного аналізу її руху може виникнути при точних розрахунках високошвидкісних карданних передач. В цьому разі рух хрестовини зручно розглядати, згідно *теорему Л. Пуансо*, як обкочування без ковзання *рухомого аксоїда по нерухомому аксоїду* [4, 14]. Це дасть наочне уявлення щодо орієнтації миттєвої осі обертання хрестовини в нерухомій і рухомій системах координат.

Літературний аналіз показав, що у роботах, включаючи класичні підручники з теорії механізмів і машин і теоретичної механіки, недостатньо освітлені питання, які пов'язані з позиціонуванням миттєвої осі обертання хрестовини. В [4] відзначається, що миттєва вісь обертання хрестовини, яка утворює її рухомий аксоїд, здійснює коливання всередині конуса з кутом розчину, який дорівнює подвоєному міжосьовому куту передачі, і вершиною в центрі хрестовини. Також сказано, що нерухомим аксоїдом є деяка конічна поверхня, яка знаходиться всередині рухомого аксоїда. Але при цьому відсутні розрахункові залежності, які б дозволили визначити параметри рухомого і рухомого аксоїдів хрестовини.

Постановка задачі. Виходячи з аналізу літературних джерел, **метою даної роботи** є визначення параметрів рухомого і рухомого аксоїдів хрестовини шарніра Гука.

Для досягнення поставленої мети необхідно розв'язати наступні задачі:

- отримати *рівняння годографа вектора абсолютної кутової швидкості хрестовини* в нерухомій і рухомій системах координат;
- визначити параметри рухомого і рухомого аксоїдів хрестовини шарніра Гука;
- оцінити вплив міжосьового кута передачі на кінематичні характеристики хрестовини.

Математична модель. Рівняння годографа вектора кутової швидкості хрестовини в нерухомій системі координат. Розглянемо одинарний шарнір Гука, схема якого представлена на рис. 1 [13]. Вали 1 (вхідний) і 3 (вихідний), а також нерухомо пов'язані з ними карданні вилки здійснюють прості обертальні рухи. Вектори кутових швидкостей ланок 1 і 3 на схемі позначені $\vec{\omega}_1$ і $\vec{\omega}_3$ відповідно. Кут між зазначеними векторами (міжосьовий кут передачі) позначений α . Вектори відносних кутових швидкостей хрестовини 2 відносно ланки 1, а також ланки 3 відносно хрестовини позначені відповідно $\vec{\omega}_{21}$ і $\vec{\omega}_{32}$. Очевидно, що $\vec{\omega}_{21} \perp \vec{\omega}_1$; $\vec{\omega}_{32} \perp \vec{\omega}_{21}$; $\vec{\omega}_3 \perp \vec{\omega}_{32}$.

Тоді, згідно розрахункової схеми на рис. 2, а також враховуючи (1), запишемо вирази для напрямних косинусів вектора $\bar{\omega}_2$:

$$\cos(\bar{\omega}_2; \bar{i}_1) = \frac{\omega_{2x1}}{\omega_2} = \frac{\omega_{21} \cos \varphi_1}{\omega_2} = \frac{\cos \alpha \sin \alpha \cos^2 \varphi_1}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi_1 (1 + \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi_1)}}; \quad (2)$$

$$\cos(\bar{\omega}_2; \bar{j}_1) = \frac{\omega_{2y1}}{\omega_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi_1}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi_1 (1 + \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi_1)}}; \quad (3)$$

$$\cos(\bar{\omega}_2; \bar{k}_1) = \frac{\omega_{2z1}}{\omega_2} = -\frac{\omega_{21} \sin \varphi_1}{\omega_2} = -\frac{\cos \alpha \sin \alpha \cos \varphi_1 \sin \varphi_1}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi_1 (1 + \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi_1)}}. \quad (4)$$

де ω_{21} – величина відносної кутової швидкості хрестовини 2 відносно ланки 1 [2 – 6, 13],

$$\omega_{21} = \omega_1 \frac{\cos \alpha \sin \alpha \cos \varphi_1}{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi_1}; \quad (5)$$

ω_2 – величина абсолютної кутової швидкості хрестовини 2 [13],

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi_1 (1 + \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi_1)}}{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi_1}. \quad (6)$$

Очевидно, що вектор $\bar{\omega}_2$ завжди знаходиться в площині карданної вилки вхідного вала, а кінець зазначеного вектора належить лінії перетину двох площин: згаданої площини карданної вилки та площини, яка паралельна координатній площині x_1Oz_1 і має координату $y_1 = |\bar{\omega}_2|$. Оскільки кінці векторів $\bar{\omega}_2$ і $\bar{\omega}_{21}$ завжди співпадають, то залежність (5) можна розглядати, як рівняння годографа вектора $\bar{\omega}_2$ в полярних координатах. Скористаємося формулами переходу від полярної до декартової системи координат і отримаємо в параметричному вигляді рівняння годографа вектора $\bar{\omega}_2$ у прямокутних декартових координатах:

$$\begin{cases} x_1 = \omega_{21} \cos \varphi_1 = \omega_1 \frac{\cos \alpha \sin \alpha \cos^2 \varphi_1}{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi_1}; \\ y_1 = \omega_1; \\ z_1 = -\omega_{21} \sin \varphi_1 = -\omega_1 \frac{\cos \alpha \sin \alpha \cos \varphi_1 \sin \varphi_1}{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi_1}. \end{cases} \quad (7)$$

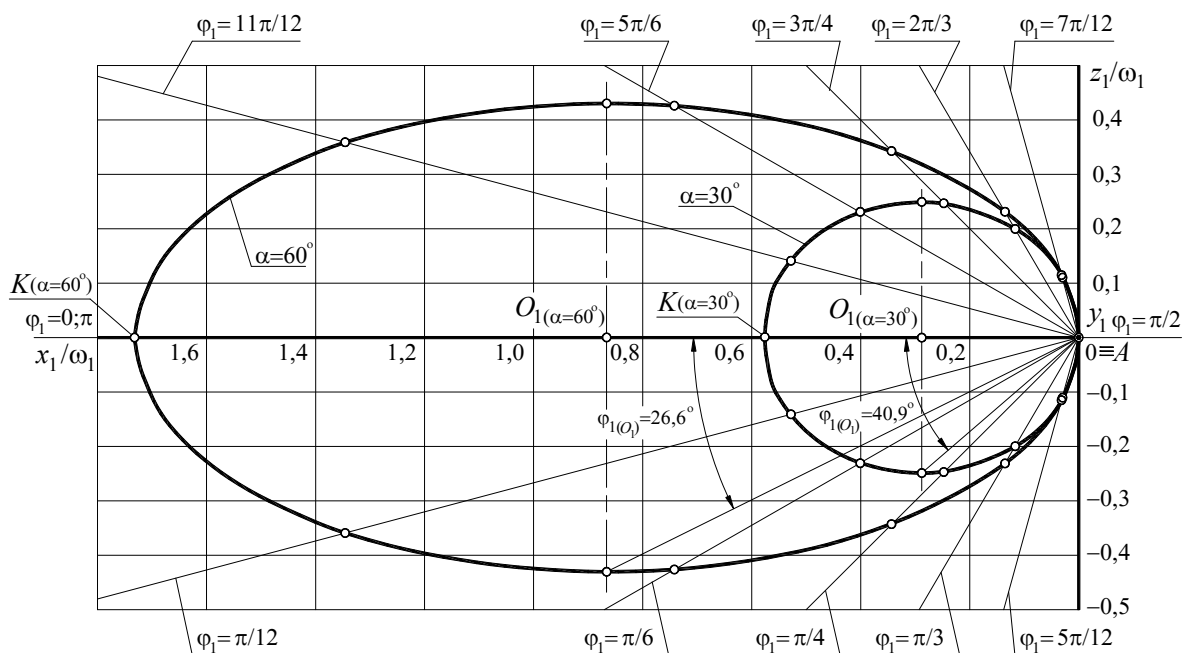


Рис. 3 – Годографи вектора $\bar{\omega}_2$ для двох значень міжосьового кута передачі.

На рис. 3 показані годографи вектора $\bar{\omega}_2$, які побудовані за залежностями (7) для двох значень міжосьового кута передачі: $\alpha = 30^\circ$ і $\alpha = 60^\circ$.

Переконаємося у тому, що годографами вектора $\bar{\omega}_2$ в нерухомій системі координат є еліпси.

Розглянемо залежність (5). Позначимо:

$$A = \omega_1 \cos \alpha \sin \alpha ; \quad (8)$$

$$B = \sin^2 \alpha . \quad (9)$$

Оскільки косинус полярного кута

$$\cos \varphi_1 = \frac{x_1}{\rho} = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + z_1^2}} , \quad (10)$$

то, величина полярного радіуса, враховуючи (5) і (10),

$$\rho = \sqrt{x_1^2 + z_1^2} = \frac{A \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + z_1^2}}}{1 - B \frac{x_1^2}{x_1^2 + z_1^2}} = \frac{Ax_1 \sqrt{x_1^2 + z_1^2}}{x_1^2 (1 - B) + z_1^2} . \quad (11)$$

Звідси отримаємо рівняння

$$x_1^2 - \frac{Ax_1}{1 - B} + \frac{z_1^2}{1 - B} = 0 . \quad (12)$$

Виділивши повний квадрат змінної x_1 , перетворимо (12) до виду:

$$\left(x_1 - \frac{A}{2(1-B)} \right)^2 + \frac{z_1^2}{\left(\frac{A}{2\sqrt{1-B}} \right)^2} = 1 . \quad (13)$$

Враховуючи (8) і (9), отримаємо рівняння годографа вектора $\bar{\omega}_2$ абсолютної кутової швидкості хрестовини **2** в системі координат $Ox_1y_1z_1$

$$\left(x_1 - \frac{\omega_1 \operatorname{tg} \alpha}{2} \right)^2 + \frac{z_1^2}{\left(\frac{\omega_1 \sin \alpha}{2} \right)^2} = 1 . \quad (14)$$

Залежність (14) більш зручна для аналізу, ніж система параметричних рівнянь (7), оскільки являє собою канонічне рівняння еліпса з центром в точці O_1 з координатами $\left(\frac{\omega_1 \operatorname{tg} \alpha}{2}; 0 \right)$ та півсями:

велика піввісь еліпса

$$a = \frac{\omega_1 \operatorname{tg} \alpha}{2} ; \quad (15)$$

мала піввісь еліпса

$$b = \frac{\omega_1 \sin \alpha}{2} . \quad (16)$$

Найменший полярний кут $\varphi_1(O_1)$, якому відповідає точка перетину еліпса з його малою віссю, можна знайти, скориставшись першим рівнянням системи (7) і прийнявши $x_1 = 0, 5\omega_1 \operatorname{tg} \alpha$. В результаті отримаємо рівняння:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{2} = \frac{\cos \alpha \sin \alpha \cos^2 \varphi_{1(O_1)}}{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi_{1(O_1)}} . \quad (17)$$

Звідси знаходимо величину полярного кута (кута повороту карданної вилки вхідного вала), який відтинає першу чверть еліпса

$$\varphi_{1(O_1)} = \arccos \sqrt{\frac{1}{1 + \cos^2 \alpha}} . \quad (18)$$

Підставивши в (18) $\alpha = 30^\circ$ і $\alpha = 60^\circ$, отримаємо $\varphi_1(O_1) = 40,893^\circ$ і $\varphi_1(O_1) = 26,565^\circ$ відповідно (рис. 3).

Визначимо інші важливі характеристики еліпса [15]: його ексцентриситет:

$$\mu = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} = \sin \alpha, \quad (19)$$

а також відстань між фокусами еліпса:

$$2c = 2a\mu = \omega_1 \operatorname{tg} \alpha \sin \alpha. \quad (20)$$

Визначення параметрів нерухомого аксоїда хрестовини. Як відомо [1 – 4, 14], геометричне місце миттєвих осей обертання в нерухомій системі координат утворює конічну поверхню, яка є нерухомим аксоїдом. Його можна отримати, провівши з центру хрестовини промені через кожну точку еліпса, який є годографом вектора $\bar{\omega}_2$ в нерухомій системі координат.

З властивостей конічних перерізів випливає, що будь-який еліпс можна отримати як лінію перетину довільного кругового конуса (конуса обертання) з відповідним чином підбраною площиною. Тому можна припустити, що нерухомий аксоїд хрестовини є конусом обертання з кутом розчину, який дорівнює міжосьовому куту передачі α , а годограф вектора в нерухомій системі координат являє собою лінію перетину даного кругового конуса з площиною $y_1 = |\bar{\omega}_1|$.

На рис. 4 показана частина нерухомого аксоїда хрестовини, обмеженого ділянкою площини $y_1 = |\bar{\omega}_1|$, яка проектується на площину малюнку у вигляді відрізка AK , який утворює з віссю OM конуса гострий кут $\delta = \pi/2 - \alpha/2$.

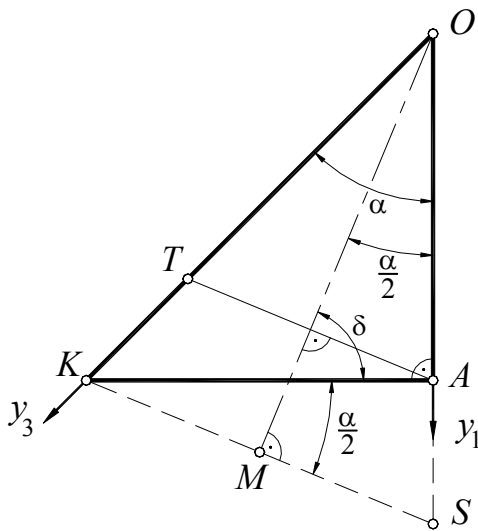


Рис. 4 – Схема для визначення характеристик конічного перерізу.

З (22) випливає:

$$\lambda = \frac{y_{1Q}}{\omega_1}; \quad (23)$$

$$x_{1C} = \frac{x_{1Q}}{\lambda} = x_{1Q} \frac{\omega_1}{y_{1Q}}; \quad (24)$$

$$z_{1C} = \frac{z_{1Q}}{\lambda} = z_{1Q} \frac{\omega_1}{y_{1Q}}. \quad (25)$$

Як вже зазначалося, координати точки C в системі координат $Ox_1y_1z_1$ задовольняють рівнянню (14). Враховуючи вирази (14), (24) і (25), запишемо:

$$\frac{\left(x_{1Q} \frac{\omega_1}{y_{1Q}} - \frac{\omega_1 \operatorname{tg} \alpha}{2}\right)^2}{\left(\frac{\omega_1 \operatorname{tg} \alpha}{2}\right)^2} + \frac{\left(z_{1Q} \frac{\omega_1}{y_{1Q}}\right)^2}{\left(\frac{\omega_1 \sin \alpha}{2}\right)^2} = 1. \quad (26)$$

Після перетворень і узагальнення на всі точки конічної поверхні, отримуємо рівняння нерухомого аксоїда в

системі координат $Ox_1y_1z_1$:

$$\frac{x_1^2}{\operatorname{tg}^2 \alpha} + \frac{z_1^2}{\sin^2 \alpha} - \frac{x_1 y_1}{\operatorname{tg} \alpha} = 0. \quad (27)$$

Дане рівняння можна також отримати, скориставшись рівнянням миттєвої осі обертання в нерухомій системі координат [4, 14], тобто

$$\frac{x_1'}{\omega_{2x1}} = \frac{y_1'}{\omega_{2y1}} = \frac{z_1'}{\omega_{2z1}}. \quad (28)$$

В рівнянні (28) координати написані зі штрихами, щоб до отримання кінцевого рівняння відрізнати їх від координат точок годографа вектора $\bar{\omega}_2$ в нерухомій системі координат $Ox_1y_1z_1$. Очевидно, що параметричні рівняння системи (7) є проєкціями $(\omega_{2x1}; \omega_{2y1}; \omega_{2z1})$ вектора $\bar{\omega}_2$ на відповідні координатні осі.

Враховуючи (7) і зводячи до квадрату всі частини рівняння (28), отримаємо:

$$\frac{((x_1')^2 + (z_1')^2)(1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi_1)^2}{\cos^2 \alpha \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi_1} - (y_1')^2 = 0. \quad (29)$$

Після ряду перетворень з метою виключення з рівняння (29) координати φ_1 , а також враховуючи

$$\operatorname{tg}^2 \varphi_1 = \frac{(z_1')^2}{(x_1')^2}, \quad (30)$$

отримаємо, опускаючи штрихи в координатах, рівняння нерухомого аксоїда в системі координат $Ox_1y_1z_1$, яке збігається з рівнянням (27), отриманим раніше з використанням рівняння напрямного еліпса.

Як випливає з рівняння (27), нерухомий аксоїд являє собою похилий еліптичний конус з вершиною в центрі хрестовини. При цьому одна з його твірних, яка перетинає велику вісь напрямного еліпса, співпадає з віссю Oy_1 нерухомої системи координат $Ox_1y_1z_1$, тобто співпадає з віссю ведучого вала, а його протилежна твірна утворює з нею кут α і співпадає з віссю веденого вала (співпадає з віссю Oy_3 нерухомої системи координат $Ox_3y_3z_3$).

Рівняння годографа вектора абсолютної кутової швидкості хрестовини в рухомій системі координат.

Геометричне місце миттєвих осей обертання в рухомій системі координат $Ox_2y_2z_2$, пов'язаній з самою хрестовиною 2, утворює конічну поверхню, яка є рухомим аксоїдом хрестовини. При русі хрестовини її рухомий аксоїд обкочується по нерухомому аксоїду без ковзання. Обидва аксоїди в кожний момент часу мають спільну вершину – центр хрестовини, а також спільну твірну – миттєву вісь обертання. Орієнтація миттєвої осі обертання в рухомій системі координат $Ox_2y_2z_2$ може бути визначена за допомогою напрямних косинусів вектора $\bar{\omega}_2$ (рис. 2).

Позначимо $\bar{i}_2, \bar{j}_2, \bar{k}_2$ – одиничні вектори (орти) додатних напрямків координатних осей Ox_2, Oy_2, Oz_2 відповідно (рис. 2). Розкладемо вектор $\bar{\omega}_2$ за ортонормованим базисом $(\bar{i}_2; \bar{j}_2; \bar{k}_2)$:

$$\bar{\omega}_2 = \bar{i}_2 \omega_{2x2} + \bar{j}_2 \omega_{2y2} + \bar{k}_2 \omega_{2z2}, \quad (31)$$

де $\omega_{2x2}; \omega_{2y2}; \omega_{2z2}$ – проєкції вектора $\bar{\omega}_2$ на координатні осі системи координат $Ox_2y_2z_2$.

Знайдемо координати вектора $\bar{\omega}_2$ в базисі $(\bar{i}_2; \bar{j}_2; \bar{k}_2)$. З аналізу розрахункової схеми на рис. 2 випливає:

$$\omega_{2x2} = \omega_{21} = \omega_1 \frac{\cos \alpha \sin \alpha \cos \varphi_1}{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi_1}; \quad (32)$$

$$\omega_{2y2} = \omega_1 \cos \varphi_{21} = \omega_1 \cos(\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \alpha \sin \varphi_1)) = \frac{\omega_1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha \sin^2 \varphi_1}} = \frac{\omega_1 \cos \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi_1}}; \quad (33)$$

$$\omega_{2z2} = -\omega_1 \sin \varphi_{21} = -\omega_1 \sin(\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \alpha \sin \varphi_1)) = -\frac{\omega_1 \operatorname{tg} \alpha \sin \varphi_1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha \sin^2 \varphi_1}} = -\frac{\omega_1 \sin \alpha \sin \varphi_1}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi_1}}. \quad (34)$$

де φ_{21} – кут повороту хрестовини 2 відносно карданної вилки вхідного вала 1 [5, 13] визначається за формулою:

$$\varphi_{21} = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \alpha \sin \varphi_1). \quad (35)$$

Тоді, з урахуванням залежностей (6), (31) – (34), запишемо вирази для напрямних косинусів вектора $\bar{\omega}_2$ в базисі $(\bar{i}_2; \bar{j}_2; \bar{k}_2)$:

$$\cos(\bar{\omega}_2; \bar{i}_2) = \frac{\omega_{2x2}}{\omega_2} = \frac{\cos \alpha \sin \alpha \cos \varphi_1}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi_1} (1 + \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi_1)}; \quad (36)$$

$$\cos(\bar{\omega}_2; \bar{j}_2) = \frac{\omega_{2y2}}{\omega_2} = \frac{\cos \alpha \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi_1}}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi_1} (1 + \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi_1)}; \quad (37)$$

$$\cos(\bar{\omega}_2; \bar{k}_2) = \frac{\omega_{2z2}}{\omega_2} = -\frac{\sin \alpha \sin \varphi_1 \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi_1}}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi_1} (1 + \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi_1)}. \quad (38)$$

Оскільки початок вектора $\bar{\omega}_2$ співпадає з початком координат, координати даного вектора в базисі $(\bar{i}_2; \bar{j}_2; \bar{k}_2)$ являють собою координати точок його годографа в рухомій системі координат $Ox_2y_2z_2$. Отже, згідно (32) – (34), в рухомій системі координат параметричні рівняння годографа вектора $\bar{\omega}_2$ мають вид:

$$\begin{cases} x_2 = \omega_1 \frac{\cos \alpha \sin \alpha \cos \varphi_1}{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi_1}; \\ y_2 = \frac{\omega_1 \cos \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi_1}}; \\ z_2 = -\frac{\omega_1 \sin \alpha \sin \varphi_1}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi_1}}. \end{cases} \quad (39)$$

Таким чином, годографом вектора $\bar{\omega}_2$ в системі координат $Ox_2y_2z_2$ є замкнена просторова крива.

Визначення параметрів рухомого аксоїда хрестовини. Промені, які виходять з початку координат, розташованого в центрі хрестовини, і проходять через кожен точку годографа вектора $\bar{\omega}_2$ в рухомій системі координат $Ox_2y_2z_2$, який описується системою параметричних рівнянь (39), утворюють рухомий аксоїд хрестовини. Для більш повного уявлення про його геометричні особливості, знайдемо рівняння кривої, за якою рухомий аксоїд перетинає площину $y_2 = |\bar{\omega}_1|$. Дана площина в початковому положенні шарніра співпадає з площиною годографа вектора $\bar{\omega}_2$ в нерухомій системі координат $Ox_1y_1z_1$.

Нехай в точці P з координатами $(x_{2P}; \bar{\omega}_1; z_{2P})$ промінь OC (рис. 2) перетинає площину $y_2 = |\bar{\omega}_1|$ (цієї площині належать точки P, A_1, A_2'). Тоді, беручи до уваги (22), запишемо:

$$\frac{x_{2P} - 0}{x_{2C} - 0} = \frac{\omega_1 - 0}{y_{2C} - 0} = \frac{z_{2P} - 0}{z_{2C} - 0} = v. \quad (40)$$

З (40) випливає, що:

$$v = \frac{\omega_1}{y_{2C}}; \quad (41)$$

$$x_{2P} = x_{2C}v = x_{2C} \frac{\omega_1}{y_{2C}}; \quad (42)$$

$$z_{2P} = z_{2C}v = z_{2C} \frac{\omega_1}{y_{2C}}. \quad (43)$$

Оскільки координати точки C в системі координат $Ox_2y_2z_2$ задовольняють системі параметричних рівнянь (39), а точка P є поточною точкою шуканої кривої, отримаємо, враховуючи вирази (42) і (43), систему параметричних рівнянь, які описують лінію перетину рухомого аксоїда з площиною $y_2 = |\bar{\omega}_1|$:

$$\begin{cases} x_2' = \omega_1 \frac{\sin \alpha \cos \varphi_1}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi_1}}; \\ y_2' = \omega_1; \\ z_2' = -\omega_1 \operatorname{tg} \alpha \sin \varphi_1. \end{cases} \quad (44)$$

Для перевірки вірності отриманих рівнянь скористаємося рівнянням миттєвої осі обертання в рухомій сис-

темі координат [4, 14], складеним для точок лінії перетину рухомого аксоїда з площиною $y_2 = |\bar{\omega}_1|$:

$$\frac{x'_2}{\omega_{2x2}} = \frac{y'_2}{\omega_{2y2}} = \frac{z'_2}{\omega_{2z2}}, \quad (45)$$

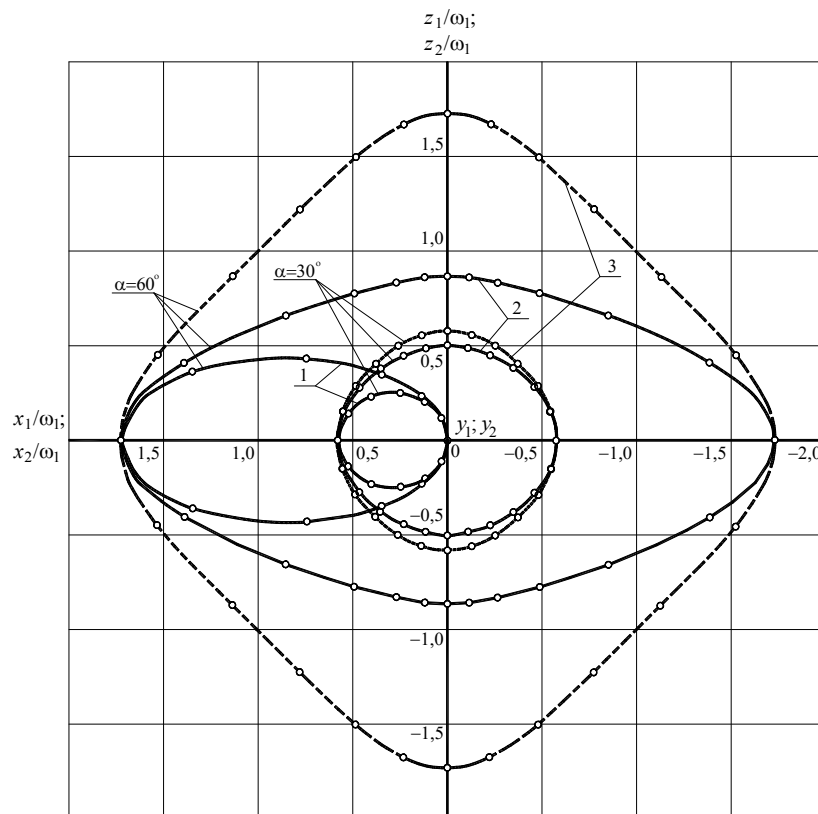
Враховуючи рівняння (45), вирази (32), (33), (34) для визначення координат вектора $\bar{\omega}_2$ в базисі $(\bar{i}_2; \bar{j}_2; \bar{k}_2)$, систему рівнянь (44), те, що $y'_2 = \omega_1$, а також залежності (5) і (35), отримаємо:

$$\frac{x'_2}{\omega_{2x2}} = \frac{\omega_1 \sin \alpha \cos \varphi_1}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi_1}} \frac{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi_1}{\omega_1 \cos \alpha \sin \alpha \cos \varphi_1} = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi_1}}{\cos \alpha} = \frac{1}{\cos \varphi_{21}}; \quad (46)$$

$$\frac{y'_2}{\omega_{2y2}} = \omega_1 \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi_1}}{\omega_1 \cos \alpha} = \frac{1}{\cos \varphi_{21}}; \quad (47)$$

$$\frac{z'_2}{\omega_{2z2}} = -\omega_1 \operatorname{tg} \alpha \sin \varphi_1 \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi_1}}{-\omega_1 \sin \alpha \sin \varphi_1} = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi_1}}{\cos \alpha} = \frac{1}{\cos \varphi_{21}}. \quad (48)$$

Оскільки праві частини виразів (46), (47) і (48) однакові, точки кривої, яка в площині $y_2 = |\bar{\omega}_1|$ описується системою параметричних рівнянь (44), належать рухомому аксоїду хрестовини 2.



1 – годографи вектора $\bar{\omega}_2$ в системі координат $Ox_1y_1z_1$; 2 – проєкції годографів вектора $\bar{\omega}_2$ в системі координат $Ox_2y_2z_2$, яка зображена в початковому положенні шарніра Гука, на площину $y_2 = |\bar{\omega}_1|$; 3 – лінії перетину рухомих аксоїдів хрестовини в початковому положенні шарніра Гука з площиною $y_2 = |\bar{\omega}_1|$.

Рис. 5 – Годографи вектора $\bar{\omega}_2$ в нерухомій і рухомій системах координат, а також лінії перетину рухомих аксоїдів з площиною $y_2 = |\bar{\omega}_1|$ для двох значень міжосьового кута передачі α .

На рис. 5 показані годографи вектора $\bar{\omega}_2$ в нерухомій системі координат $Ox_1y_1z_1$, які розташовані в площині $y_1 = |\bar{\omega}_1|$ – криві 1; проєкції на цю ж площину годографів вектора $\bar{\omega}_2$ в рухомій системі координат $Ox_2y_2z_2$, яка зображена в початковому положенні шарніра Гука – криві 2; лінії перетину рухомих аксоїдів хрестовини в початковому положенні шарніра Гука з площиною $y_2 = |\bar{\omega}_1|$ – пунктирна крива 3, для двох значень міжосьового

кута передачі: $\alpha = 30^\circ$ і $\alpha = 60^\circ$. Зазначимо, що за кривими *I* відбувається перетин нерухомих аксоїдів хрестовини площиною $y_1 = |\bar{\omega}_1|$. Точки на кривих відповідають положенням вхідної ланки через кожні $\pi/12$ рад (15°) кута її повороту φ_1 .

З рівнянь (46), (47) і (48) випливає, що координати точок лінії перетину рухомого аксоїда з площиною $y_2 = |\bar{\omega}_1|$ в рухомій системі координат $Ox_2y_2z_2$ можна отримати, поділивши відповідну проекцію вектора $\bar{\omega}_2$ ($\omega_{2x2}; \omega_{2y2}; \omega_{2z2}$) на $\cos \varphi_{21}$. Крім того, за рівнянням лінії перетину рухомого аксоїда з площиною $y_2 = |\bar{\omega}_1|$ можна визначити проекції вектора $\bar{\omega}_2$ на осі рухомої системи координат, а також величину абсолютної кутової швидкості хрестовини *2*, тобто:

$$\omega_2 = \cos \varphi_{21} \sqrt{(x'_2)^2 + (y'_2)^2 + (z'_2)^2}. \quad (49)$$

Криві *3* на рис. 5 свідчать про те, що кут між твірними рухомого аксоїда хрестовини і координатною віссю Oy_2 безперервно змінюється (інакше вони б мали вигляд концентричних кіл). Позначимо вказаний кут β_2 . Значення цього кута можна знайти, скориставшись залежністю (37), з якої отримуємо:

$$\beta_2 = \arccos\left(\frac{\omega_{2y2}}{\omega_2}\right) = \arccos\left(\frac{\cos \alpha \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi_1}}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi_1 (1 + \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi_1)}}\right). \quad (50)$$

На рис. 6 показані графіки кута β_2 між твірними рухомого аксоїда і координатною віссю Oy_2 в залежності від кута повороту вхідної ланки φ_1 . Аналіз залежності (50) і графіків на рис. 6 показує, що зі збільшенням міжосьового кута передачі α з 30° до 60° коливання кута β_2 відносно його максимального значення ($\beta_{2\max} = \alpha$) збільшується з 3% до майже 9%. Зауважимо, що при $\alpha = 20^\circ$ відносне коливання кута β_2 складає приблизно 1,45%.

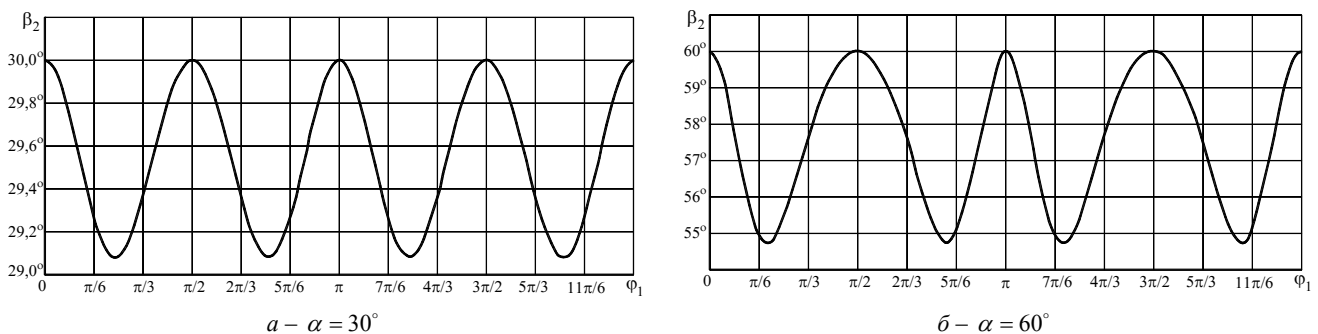


Рис. 6 – Графіки зміни кута β_2 між твірними рухомого аксоїда і координатною віссю Oy_2 в залежності від кута повороту вхідної ланки φ_1 .

Рівняння рухомого аксоїда можна отримати з рівнянь (44) і (45) шляхом виключення параметру φ_1 . Після перетворень отримуємо рівняння рухомого аксоїда хрестовини в системі координат $Ox_2y_2z_2$:

$$(y_2^4 + y_2^2 z_2^2 + x_2^2 z_2^2)(y_2^2 \operatorname{tg}^2 \alpha - z_2^2) \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha - x_2^2 y_2^2 (y_2^2 \operatorname{tg}^2 \alpha - z_2^2) \cos^4 \alpha - x_2^2 y_2^2 z_2^2 = 0. \quad (51)$$

Рівняння (51) досить громіздке. Проте, при визначенні орієнтації миттєвої осі обертання хрестовини в рухомій системі координат у випадку малих кутів α , що має місце в практиці використання одинарного шарніра Гука, рухомих аксоїдом хрестовини можна наближено вважати прямий круговий конус з вершиною в центрі хрестовини і кутом розчину, який дорівнює подвоєному міжосьовому куту передачі, тобто 2α .

Перевірка правильності математичної моделі. Для перевірки вірності отриманих рівнянь, які визначають параметри годографів вектора $\bar{\omega}_2$ і аксоїдів хрестовини шарніра Гука, було виконано комп'ютерне моделювання кінематики шарніра в середовищі *Autodesk Inventor*.

На рис. 7, а показано початкове положення шарніра Гука (при $\varphi_1 = 0$), а на рис. 7, б показано положення, яке відповідає куту повороту вхідної ланки $\varphi_1 = \pi/2$. Для наочності і кращої демонстрації геометричних особ-

ливостей аксоїдів хрестовини було використано значення міжосьового кута передачі $\alpha = 60^\circ$, яке далеко виходить за межі практичного застосування одинарного шарніра Гука. Зображені на рис. 7 годографи вектора $\bar{\omega}_2$ відповідають деякому довільному значенню кутової швидкості вхідної ланки ω_1 .

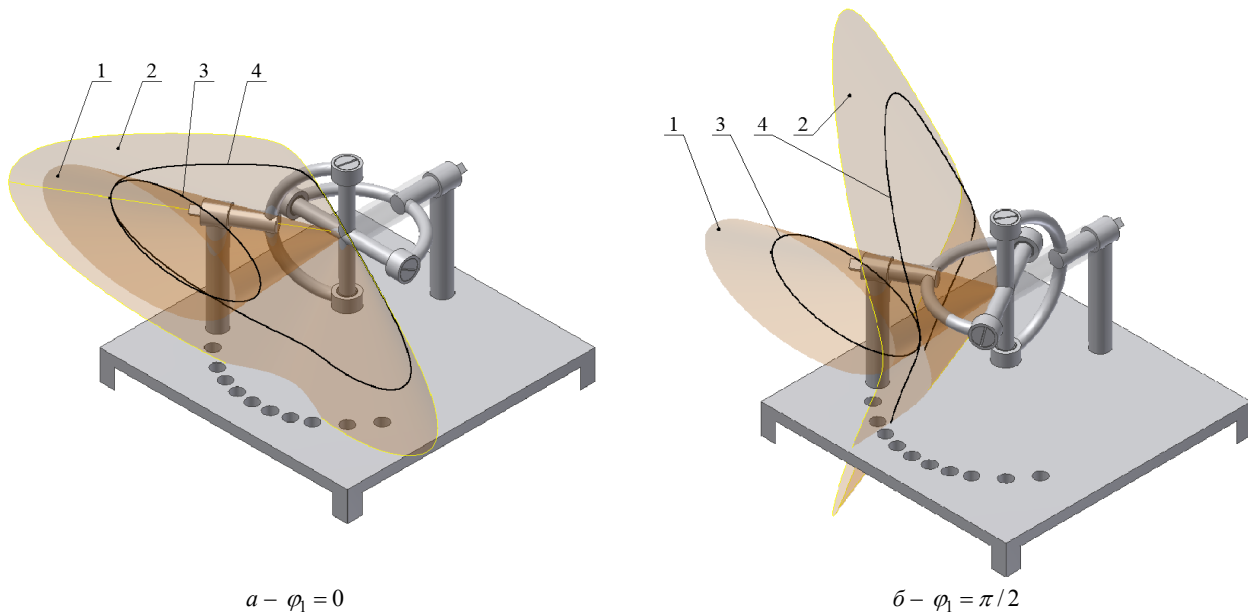


Рис. 7 – Моделювання руху хрестовини шарніра Гука в середовищі Autodesk Inventor: 1 – нерухомий аксоїд; 2 – рухомий аксоїд; 3 – годограф вектора $\bar{\omega}_2$ в нерухомій системі координат; 4 – годограф вектора $\bar{\omega}_2$ в рухомій системі координат.

Результат моделювання кінематики шарніра Гука в середовищі Autodesk Inventor підтвердив вірність отриманої математичної моделі.

Перспективи подальших досліджень. Моделювання руху хрестовини шарніра Гука у вигляді обкочування без ковзання рухомого аксоїда по нерухомому аксоїду дає наочне уявлення щодо орієнтації її миттєвої осі обертання в рухомій і нерухомій системах координат. Це може знадобитися при точних розрахунках високошвидкісних карданних передач з урахуванням масово-геометричних параметрів хрестовини. Таким чином, результати даної роботи можуть бути корисними при дослідженнях динамічних процесів, які відбуваються в карданних передачах з використанням шарніра Гука.

Висновки. В результаті проведеного кінематичного аналізу універсального шарніра Гука отримано рівняння годографів вектора абсолютної кутової швидкості хрестовини у нерухомій та рухомій системах координат. Визначено параметри нерухомого і рухомого аксоїдів хрестовини карданного шарніра. При цьому нерухомий аксоїд знаходиться всередині рухомого аксоїда.

Доведено, що нерухомий аксоїд хрестовини шарніра Гука являє собою похилий еліптичний конус з вершиною в центрі хрестовини, а його протилежні твірні, які перетинають велику вісь напрямного еліпса, збігаються з осями ведучого і веденого валів шарніра.

Рухомий аксоїд хрестовини шарніра Гука є замкненою конічною поверхнею зі змінним кутом розчину, максимальне значення якого дорівнює подвоєному значенню міжосьового кута передачі, тобто 2α . Зі збільшенням міжосьового кута передачі збільшується різниця між максимальним і мінімальним значеннями кута розчину конічної поверхні, яка утворює рухомий аксоїд хрестовини.

При визначенні орієнтації миттєвої осі обертання хрестовини в рухомій системі координат у випадку малих кутів α , що має місце в практиці використання одинарного шарніра Гука, рухомим аксоїдом хрестовини можна наближено вважати прямий круговий конус з вершиною в центрі хрестовини і кутом розчину 2α . Похибка такого припущення стрімко зростає зі збільшенням кута α .

Виконане моделювання руху шарніра Гука в середовищі Autodesk Inventor підтвердило правильність отриманої математичної моделі.

Список літератури

1. Артоболовский И. И. Теория механизмов и машин : учебник для вузов. – 4-е изд., перераб. и доп. – М. : Наука, 1988. – 640 с.
2. Фролов К. В., Попов С. А., Мусатов А. К., Тимофеев Г. А., Никоноров В. А. Теория механизмов и механика машин: учебник для вузов. – М. : Изд-во МГТУ имени Н. Э. Баумана, 2004. – 664 с.
3. Заблонский К. И., Белоконов И. М., Щекин Б. М. Теория механизмов и машин. – Киев : Выща школа, 1989. – 376 с.

4. Лойцянский Л. Г., Лурье А. И. Курс теоретической механики. Т. 1. – М. : Гостехиздат, 1955. – 380 с.
5. Кожневников С. Н., Перфильев П. Д. Карданные передачи. – Киев : «Техніка», 1978. – 264 с.
6. Малаховский Я. Э., Латин А. А., Веденев Н. К. Карданные передачи. – М. : Государственное научно-техническое издательство машиностроительной литературы, 1962. – 156 с.
7. Гришкевич А. И. Проектирование трансмиссий автомобилей : Справочник. – М. : Машиностроение, 1984. – 272 с.
8. Alfayo A. Alugongo. Parametric Vibration of a Cardan Shaft and Sensitivity Analysis // Proceedings of the World Congress on Engineering and Computer Science. Vol. II WCECS 2018. October 23 – 25, 2018. – USA, San Francisco, 2018.
9. Yuanfeng Xia, Jian Pang, Liang Yang, Qin Zhao, Xianwu Yang. Nonlinear numerical and experimental study on the second-order torsional and lateral vibration of driveline system connected by cardan joint // Journal of Vibration and Control. – 2019. – no. 26(7 – 8). – pp. 540 – 551. DOI: 10.1177/1077546319889846.
10. Reza Golafshan, Catalin Dascalu, Georg Jacobs, David Roth, Joerg Berroth, Stephan Neumann. Damage Diagnosis of Cardan Shafts in Mobile Mining Machines using Vibration Analysis // 19th Drive Train Technology Conference (ATK 2021). IOP Conf. Series : Materials Science and Engineering, 1097 (2021) 012019. DOI: 10.1088/1757-899X/1097/1/012019.
11. Farzad Vesali, Mohammad Ali Rezvani, Mohammad Kashfi. Dynamics of universal joints, its failures and some propositions for practically improving its performance and life expectancy // Journal of Mechanical Science and Technology. – August 2012. no. 26(8). – pp. 2439 – 2449. DOI: 10.1007/s12206-012-0622-1.
12. Aleksandar Asonja, Eleonora Desnica. Reliability of agriculture universal joint shafts based on temperature measuring in universal joint bearing assemblies // Spanish Journal of Agricultural Research. – No. 13(1), e02-001, 8 pages (2015). DOI: 10.5424/sjar/2015131-6371.
13. Подригало М. А., Перегон В. А., Бобошко О. А., Богдан Д. І., Коряк О. О. Кінематика шарніра Гука // Автомобіль і електроніка. Сучасні технології. – 2022. – № 21/2022. – с. 48 – 56. DOI: 10.30977/VEIT.2022.21.0.09.
14. Яблонский А. А., Никифорова В. М. Курс теоретической механики. Часть 1. – М. : Высшая школа, 1966. – 439 с.
15. Мусхелишвили Н. И. Курс аналитической геометрии. – М. : Изд-во «Высшая школа», 1967. – 655 с.

References (transliterated)

1. Artobolevskiy I. I. *Teoriya mekhanizmov i mashin : uchebnik dlya vtuzov. 4-e izd., pererab. i dop* [Theory of mechanisms and machines : Textbook for Higher Educational Institutions. – 4-th ed., revised and expanded]. Moscow, Nauka Publ., 1988. 640 p.
2. Frolov K. V., Popov S. A., Musatov A. K., Timofeev G. A., Nikonorov V. A. *Teoriya mekhanizmov i mekhanika mashin : uchebnik dlya vuzov.* [Theory of mechanisms and mechanics of machines]. Moscow, Izd-vo MGTU im. N. E. Bauman Publ., 2004. 664 p.
3. Zablonskiy K. I., Belokonev I. M., Shhekin B. M. *Teoriya mekhanizmov i mashin* [Theory of mechanisms and machines]. Kiev, Vyshcha shkola Publ., 1989. 376 p.
4. Loitsyanskiy L. G., Lur'e A. I. *Kurs teoreticheskoy mekhaniki. T. 1* [Course in theoretical mechanics. Vol. 1]. Moscow, Gostekhizdat Publ., 1955. 380 p.
5. Kozhevnikov S. N., Perfil'ev P. D. *Kardannye peredachi* [Cardan transmissions]. Kiev, "Tekhnika" Publ., 1978. 264 p.
6. Malakhovskiy Ya. E., Lapin A. A., Vedenev N. K. *Kardannye peredachi* [Cardan transmissions]. Moscow, Gosudarstvennoe nauchno-tekhnicheskoe izdatel'stvo mashinostroitel'noy literatury Publ., 1962. 156 p.
7. Grishkevich A. I. *Proektirovanie transmisiy avtomobilei : Spravochnik* [Designing automobile transmissions : handbook]. Moscow, Mashinostroyeniye Publ., 1984. 272 p.
8. Alfayo A. Alugongo. Parametric Vibration of a Cardan Shaft and Sensitivity Analysis. *Proceedings of the World Congress on Engineering and Computer Science. Vol II WCECS 2018, October 23–25, 2018, San Francisco, USA.*
9. Yuanfeng Xia, Jian Pang, Liang Yang, Qin Zhao, Xianwu Yang. Nonlinear numerical and experimental study on the second-order torsional and lateral vibration of driveline system connected by cardan joint. *Journal of Vibration and Control.* 2019, no. 26(7 – 8), pp. 540–551. DOI: 10.1177/1077546319889846.
10. Reza Golafshan, Catalin Dascalu, Georg Jacobs, David Roth, Joerg Berroth, Stephan Neumann. Damage Diagnosis of Cardan Shafts in Mobile Mining Machines using Vibration Analysis. *19th Drive Train Technology Conference (ATK 2021). IOP Conf. Series : Materials Science and Engineering, 1097 (2021) 012019.* DOI: 10.1088/1757-899X/1097/1/012019.
11. Farzad Vesali, Mohammad Ali Rezvani, Mohammad Kashfi. Dynamics of universal joints, its failures and some propositions for practically improving its performance and life expectancy. *Journal of Mechanical Science and Technology.* August 2012, no. 26(8), pp. 2439–2449. DOI: 10.1007/s12206-012-0622-1.
12. Aleksandar Asonja, Eleonora Desnica. Reliability of agriculture universal joint shafts based on temperature measuring in universal joint bearing assemblies. *Spanish Journal of Agricultural Research, 13(1), e02-001, 8 pages.* (2015). DOI: 10.5424/sjar/2015131-6371.
13. Podrygalo M. A., Peregon V. A., Boboshko O. A., Bogdan D. I., Koriak O. O. Kinematyka sharnira Guka [Kinematics of Hook's hinge]. *Avtomobil' i elektronika. Suchasni tekhnologiyi* [Automobile and electronics. Modern technologies]. 2022, no. 21/2022, pp. 48–56. DOI: 10.30977/VEIT.2022.21.0.09.
14. Yablonskiy A. A., Nikiforova V. M. *Kurs teoreticheskoy mekhaniki. Chast' 1* [Course in theoretical mechanics. Part 1]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1966. 439 p.
15. Muskhelishvili N. Y. *Kurs analiticheskoy geometrii* [Course in analytical geometry]. Moscow, Yzd-vo "Vysshaya shkola" Publ., 1967. 655 p.

Надійшла (received) 18.10.2022

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Коряк Олександр Олексійович – кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри деталей машин і теорії механізмів і машин, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, м. Харків; тел.: (095) 723-90-67; e-mail: alexanderalexkor@gmail.com.

Коряк Олександр Алексеевич – кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри деталей машин і теорії механізмів і машин, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, г. Харьков; тел.: (095) 723-90-67; e-mail: alexanderalexkor@gmail.com.

Koriak Oleksandr Oleksiiovych – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Associate Professor at the Department of Machine Parts and Theory of Mechanisms and Machines, Kharkiv National Automobile and Highway University, Kharkiv; tel.: (095) 723-90-67; e-mail: alexanderalexkor@gmail.com