

Ю. І. ПЕРШИНА

ВІДНОВЛЕННЯ РОЗРИВНОЇ ФУНКЦІЇ ДВОХ ЗМІННИХ РІЗНИМИ ІНФОРМАЦІЙНИМИ ОПЕРАТОРАМИ З ВИКОРИСТАННЯМ ТРИКУТНИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Досліджуються методи побудови математичних моделей розривних функцій двох змінних з використанням різної інформації про них: односторонні значення в точках та односторонні сліди вздовж заданої системи ліній. Розглядається випадок, коли область визначення шуканої функції триангульована прямокутними трикутниками. Якщо застосовувати інтерполяційні або апроксимаційні методи наближення, то для їх побудови повинні бути задані значення функції в заданих точках; якщо ж застосовувати інтерлінаційні методи – сліди шуканої функції вздовж заданої системи ліній. В роботі будуються розривний інтерполяційний та апроксимаційний сплайни для наближення розривної функції двох змінних із заданими односторонніми значеннями в заданій системі точок (в нашому випадку, в вершинах прямокутних трикутників), доводяться теореми про оцінку похибки наближення побудованими розривними конструкціями. Також в роботі будується розривний інтерлінаційний сплайн, в якому використовується зовсім інша інформація про розривну функцію – односторонні сліди вздовж заданої системи ліній (в нашому випадку, вздовж сторін прямокутних трикутників). Інтерлінація функцій може знайти широке застосування в автоматизації проектування корпусів літаків, автомобілів; під час отримання і обробки результатів гідролокації та радіолокації, при вирішенні задачі комп'ютерної томографії, в цифровій обробці сигналів і в багатьох інших областях. В статті також доводяться теореми про інтегральний вигляд залишку та про оцінку похибки наближення побудованим розривним оператором інтерлінації. Наводяться обчислювальні експерименти, які порівнюють результати наближення розривної функції двох змінних різними інформаційними операторами з використанням трикутних елементів. Надалі планується застосувати побудовані оператори розривної апроксимації та інтерлінації для вирішення двовимірної задачі комп'ютерної томографії з суттєвим використанням неоднорідності внутрішньої структури тіла, яку необхідно відновити.

Ключові слова: розривна функція, інтерлінація, інтерполяція, апроксимація, трикутні елементи.

Ю. И. ПЕРШИНА

ВОССТАНОВЛЕНИЕ РАЗРЫВНОЙ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ РАЗНЫМИ ИНФОРМАЦИОННЫМИ ОПЕРАТОРАМИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТРЕУГОЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Исследуются методы построения математических моделей разрывных функций двух переменных с использованием различной информации о них: односторонние значения в точках и односторонние следы вдоль заданной системы линий. Рассматривается случай, когда область определения искомой функции триангулирована прямоугольными треугольниками. Если применять интерполяционные или аппроксимационные методы приближения, то для их построения должны быть заданы значения функции в заданных точках; если же применять интерлиначионные методы – следы искомой функции вдоль заданной системы линий. В работе строятся разрывный интерполяционный и аппроксимационный сплайны для приближения разрывной функции двух переменных с заданными односторонними значениями в заданной системе точек (в нашем случае, в вершинах прямоугольных треугольников), доказываются теоремы об оценке погрешности приближения построенными разрывными конструкциями. Также в работе строится разрывный интерлиначионный сплайн, в котором используется совсем другая информация о разрывной функции – односторонние следы вдоль заданной системы линий (в нашем случае, вдоль сторон прямоугольных треугольников). Интерлиначиация функций может найти широкое применение в автоматизации проектирования корпусов самолетов, автомобилей; при получении и обработки результатов гидролокации и радиолокации, при решении задач компьютерной томографии, в цифровой обработке сигналов и во многих других областях. В статье также доказываются теоремы об интегральном виде и оценке погрешности приближения построенным разрывным оператором интерлиначиации. Приводятся вычислительные эксперименты, которые сравнивают результаты приближения разрывной функции двух переменных различными информационными операторами с использованием треугольных элементов. В дальнейшем планируется применить построенные операторы разрывной апроксимации и интерлиначиации для решения двумерной задачи компьютерной томографии с существенным использованием неоднородности внутренней структуры тела, которую необходимо восстановить.

Ключевые слова: разрывная функция, интерлиначиация, интерполяция, аппроксимация, треугольные элементы.

I. I. PERSHYNA

RECONSTRUCTION OF THE TWO VARIABLES DISCONTINUOUS FUNCTION BY DIFFERENT INFORMATION OPERATORS USING TRIANGULAR ELEMENTS

The paper examines methods for constructing mathematical models of two variables discontinuous functions using various information about them: one-sided values at points and one-sided traces along a given system of lines. The case is considered when the domain of the required function is triangulated by right-angled triangles. If interpolation or approximation methods are used, then for their construction the values of the function at given points must be given; if we use interlination methods, then traces of the desired function along a given system of lines. In this work, we construct a discontinuous interpolation and approximation splines for approximating a discontinuous function of two variables with given one-sided values in a given system of points (in our case, at the vertices of right-angled triangles), and prove theorems on the estimation of the approximation error by constructed discontinuous structures. In the paper a discontinuous interlination spline, which uses completely different information about the discontinuous function, namely one-sided traces along a given system of lines (in our case, along the sides of right-angled triangles) is also built. Interlination of functions can find wide application in the aircraft and automobile body design automation; when receiving and processing the results of sonar and radar, when solving problems of computed tomography, in digital signal processing and in many other areas. In the paper theorems on the integral form and an estimate of the approximation error by the constructed discontinuous interlination operator are also proved. Computational experiments that compare the results of the approximation of a discontinuous function of two variables by different information operators using triangular elements are presented. In the future, it is planned to apply the constructed operators of discontinuous approximation and interlination to solve a two-dimensional problem of computed tomography with a significant use of the inhomogeneity of the internal structure of the body, which must be reconstructed.

Key words: discontinuous function, interlination, interpolation, approximation, triangular elements.

Вступ та аналіз останніх досліджень. На сьогодні основна увага в теорії наближення функцій багатьох змінних сплайнами приділяється наближенню неперервних і диференційованих функцій неперервними і ди-

ференційовними сплайнами [1 – 3]. У той же час практика показує, що серед багатовимірних об'єктів, які потрібно досліджувати, значно більша їх кількість описується *розривними функціями* [4]. Наприклад, в *комп'ютерній топографії* при дослідженні внутрішньої структури тіла корисно враховувати його неоднорідність, тобто різну щільність в різних частинах тіла (кістки, серце, шлунок, печінку і т.д. мають різну щільність, тобто щільність всього тіла є функцією з розривами першого роду на системі ліній); при дослідженні кори Землі за допомогою даних з кернів бурових свердловин виникає задача відновлення внутрішньої структури кори Землі між свердловинами. При цьому очевидним є той факт, що щільність ґрунту в різних точках кори є неоднорідною і найчастіше має розриви першого роду в точках поверхонь, які відокремлюють одну складову кори від іншої (чорнозем, пісок, глина, граніт і т.д.). Тобто розробка методів наближення розривних функцій є актуальною задачею.

В роботі [5] розглядається задача рівномірного наближення неперервних і неперервно-диференційовних функцій розривним сплайнами однієї змінної. Відомі також роботи, в яких досліджуються методи наближення неперервних функцій однієї змінної *кусково-постійними функціями* ([6], [7]), в яких неперервні та неперервно-диференційовні функції наближаються сплайнами ступеня нуль.

Протягом багатьох років були розроблені методи, які апроксимують різні важливі функції. Ці методи включають *ряди Фур'є, ряд Чебишева, поліноми Фур'є – Якобі та Паде – Якобі, раціональні функції Паде – Якобі, Паде – Чебишева та Паде – Лежандра*, а також *дробові та квазіфракційні наближення* [8 – 11]. Але ці методи погано впливають на збіжність рядів при наближенні функцій з особливістю. Втрата збіжності відбувається в області, де є розриви, і називається *явищем Гіббса*. Це явище проявляється в районі стрибків розриву і є перешкодою для відновлення розривної функції. Існують методи зменшення явища Гіббса [12]. Однак вони не повністю усувають його.

Автори вважають, що наближувати розривні функції потрібно за допомогою також розривних функцій. Тому авторами були розроблені інтерполяційні методи наближення розривних функцій однієї змінної та методи знаходження точок розриву за допомогою *метода найменших квадратів* [13] та *метода мінімакса* [14]. Також були побудовані *розривні інтерполяційні сплайни* для наближення розривних функцій двох змінних з використанням *прямокутних елементів* [15]; *розривні інтерлінаційні сплайни* з використанням *трапецеподібних елементів* [16].

Для розв'язання різних типів задач в якості вихідних даних можуть бути задані різні типи інформації. Якщо наближати функцію *інтерполяційними або апроксимаційними методами*, то для їх побудови повинні бути задані значення функції в заданих точках; якщо ж наближувати інтерлінаційними методами – сліди шуканої функції вздовж заданої системи ліній. Інтерлінація функцій може знайти широке застосування в автоматизації проектування корпусів літаків, автомобілів; під час отримання і обробки результатів гідролокації і радіолокації, при вирішенні задач комп'ютерної топографії, в цифровій обробці сигналів і в багатьох інших областях.

Серія робіт авторів [16 – 19], присвячена розв'язанню *плоскої задачі радонівської комп'ютерної топографії* з використанням неоднорідності внутрішньої структури двовимірного тіла. Для цього доцільно використовувати оператори інтерлінації функцій, оскільки ці оператори відновлюють (можливо, наближено) функції за їх відомими слідами на заданій системі ліній. Вони дають можливість побудувати оператори, інтегралі яких по цих лініях (лінійні інтегралі) будуть дорівнювати інтегралам з відновлюваної функції. Тобто інтерлінація – це математичний апарат, природно пов'язаний із задачею відновлення характеристик об'єктів відповідно до їх відомих проєкцій. Ця стаття є продовженням цієї серії робіт.

В роботі досліджуються методи побудови математичних моделей розривних функцій з використанням різної інформації про них: односторонні значення в точках та односторонні сліди вздовж заданої системи ліній. Розглядається випадок, коли область визначення шуканої функції *триангульована прямокутними трикутниками*.

Математичне моделювання розривної функції двох змінних з використанням розривної інтерполяції. В цьому розділі побудуємо розривний інтерполяційний сплайн, коли про функцію відомі її односторонні значення в заданій системі точок.

Нехай задана розривна функція двох змінних $f(x, y)$ в області $D = [0; 1] \times [0; 1]$. Будемо вважати, що область D розбивається прямими $x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_m = 1$, $y_0 = 0 < y_1 < y_2 < \dots < y_n = 1$ на прямокутні елементи, а кожний прямокутник розбивається діагоналлю на два прямокутні трикутники. Трикутники не вкладаються один в один, а сторони трикутників не перетинаються. Функція $f(x, y)$ має розриви першого роду на границях між цими прямокутними трикутниками (не обов'язково між всіма). Метою підрозділу є побудова та дослідження операторів розривної кусково-поліноміальної інтерполяції таких, які в кожному трикутнику є операторами поліноміальної інтерполяції функції $f(x, y)$.

Якщо (x_i, y_j) – вузол, в якому знаходиться прямиий кут прямокутного трикутника, то може зустрітись чотири типи трикутних елементів (рис. 1)

$$T_{ij}^{(1)} = \left\{ x_i < x < x_{i+1}, y_j < y < y_{j+1} + \frac{(x - x_{i+1})(y_{j+1} - y_j)}{x_i - x_{i+1}} \right\};$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^{(2)} &= \left\{ x_{i-1} < x < x_i, y_j < y < y_j + \frac{(x-x_{i-1})(y_{j+1}-y_j)}{x_i-x_{i-1}} \right\}; \\ \Gamma_{ij}^{(3)} &= \left\{ x_{i-1} < x < x_i, y_{j-1} + \frac{(x-x_i)(y_j-y_{j-1})}{x_i-x_{i-1}} < y < y_j \right\}; \\ \Gamma_{ij}^{(4)} &= \left\{ x_i < x < x_{i+1}, y_j + \frac{(x-x_{i+1})(y_j-y_{j-1})}{x_{i+1}-x_i} < y < y_j \right\}. \end{aligned}$$

Вважаємо, що на кожній із сторін заданих трикутників функція $f(x, y)$ може мати (а може і не мати) розриви першого роду, причому в вершинах трикутника функція набуває односторонніх значень

$$\begin{aligned} C_1^{(1)} &= C_{i,j}^{++} = f(x_i + 0, y_j + 0), & C_1^{(2)} &= C_{i,j}^{(2)+} = f(x_i - 0, y_j + 0), \\ C_2^{(1)} &= C_{i,j+1}^{(1)+} = f(x_i + 0, y_{j+1} - 0), & C_2^{(2)} &= C_{i,j+1}^{(2)-} = f(x_i - 0, y_{j+1} - 0), \\ C_3^{(1)} &= C_{i+1,j}^{(1)+} = f(x_{i+1} - 0, y_j + 0), & C_3^{(2)} &= C_{i-1,j}^{(2)+} = f(x_{i-1} - 0, y_j + 0), \\ C_1^{(3)} &= C_{i,j}^{(3)-} = f(x_i - 0, y_j - 0), & C_1^{(4)} &= C_{i,j}^{(4)+} = f(x_i + 0, y_j - 0), \\ C_2^{(3)} &= C_{i-1,j}^{(3)-} = f(x_{i-1} - 0, y_j - 0), & C_2^{(4)} &= C_{i+1,j}^{(4)-} = f(x_{i+1} - 0, y_j - 0), \\ C_3^{(3)} &= C_{i,j-1}^{(3)-} = f(x_i - 0, y_{j-1} - 0), & C_3^{(4)} &= C_{i,j-1}^{(4)+} = f(x_i + 0, y_{j-1} - 0). \end{aligned}$$

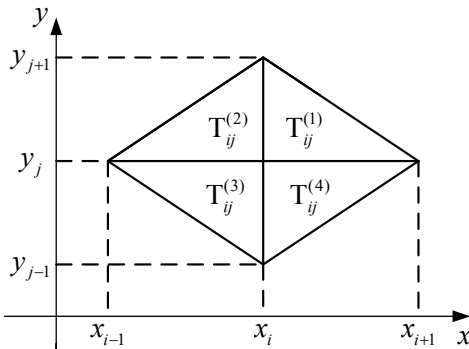


Рис. 1 – Зображення можливих трикутних елементів з прямим кутом у вузлі (x_i, y_j) .

Означення 1. Будемо називати розривним інтерполяційним лінійним поліноміальним сплайном в області $\Gamma_{ij}^{(k)} \subset D$ ($k = \{1, 2, 3, 4\}$) наступну функцію

$$\begin{aligned} S(x, y) = s_{ij}^{(k)}(x, y) &= C_1^{(k)} \frac{\omega_3^{(k)}(x, y)}{\omega_3^{(k)}(A_1^{(k)})} + C_2^{(k)} \frac{\omega_2^{(k)}(x, y)}{\omega_2^{(k)}(A_2^{(k)})} + \\ &+ C_3^{(k)} \frac{\omega_1^{(k)}(x, y)}{\omega_1^{(k)}(A_3^{(k)})}, \quad (x, y) \in \Gamma_{ij}^{(k)}; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\omega_1^{(k)}(x, y) = x - x_i, \quad \omega_2^{(k)}(x, y) = y - y_j;$$

$$\omega_3^{(k)}(x, y) = \begin{cases} -y + y_j + \frac{(x-x_{i+1})(y_{j+1}-y_j)}{x_i-x_{i+1}}, & k=1; \\ -y + y_j + \frac{(x-x_{i-1})(y_{j+1}-y_j)}{x_i-x_{i-1}}, & k=2; \\ -y + y_{j-1} + \frac{(x-x_i)(y_j-y_{j-1})}{x_i-x_{i-1}}, & k=3; \\ -y + y_j + \frac{(x-x_{i+1})(y_j-y_{j-1})}{x_{i+1}-x_i}, & k=4; \end{cases}$$

$$A_1^{(k)} = (x_i, y_j), \quad A_2^{(k)} = \begin{cases} (x_i + 0, y_{j+1} - 0), & k=1; \\ (x_i - 0, y_{j+1} - 0), & k=2; \\ (x_i - 0, y_{j-1} - 0), & k=3; \\ (x_i + 0, y_{j-1} - 0), & k=4; \end{cases} \quad A_3^{(k)} = \begin{cases} (x_{i+1} - 0, y_j + 0), & k=1; \\ (x_{i-1} + 0, y_j + 0), & k=2; \\ (x_{i-1} + 0, y_j - 0), & k=3; \\ (x_{i+1} - 0, y_j - 0), & k=4. \end{cases}$$

Теорема 1. Функція $S(x, y) = s_{ij}^{(k)}(x, y)$, $(x, y) \in \Gamma_{ij}^{(k)} \subset D$ ($k = 1, 2, 3, 4$) задовольняє наступним інтерполяційним властивостям:

$$\begin{aligned} s_{ij}^{(1)}(x_i + 0, y_j + 0) &= C_1^{(1)}; & s_{ij}^{(2)}(x_i - 0, y_j + 0) &= C_1^{(2)}; \\ s_{ij}^{(1)}(x_i + 0, y_{j+1} - 0) &= C_2^{(1)}; & s_{ij}^{(2)}(x_i - 0, y_{j+1} - 0) &= C_2^{(2)}; \\ s_{ij}^{(1)}(x_{i+1} - 0, y_j + 0) &= C_3^{(1)}; & s_{ij}^{(2)}(x_{i-1} - 0, y_j + 0) &= C_3^{(2)}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_{ij}^{(3)}(x_i - 0, y_j - 0) &= C_1^{(3)}; & s_{ij}^{(4)}(x_i + 0, y_j - 0) &= C_1^{(4)}; \\ s_{ij}^{(3)}(x_i - 0, y_{j-1} - 0) &= C_2^{(3)}; & s_{ij}^{(4)}(x_i + 0, y_{j-1} - 0) &= C_2^{(4)}; \\ s_{ij}^{(3)}(x_{i-1} - 0, y_j - 0) &= C_3^{(3)}; & s_{ij}^{(4)}(x_{i+1} - 0, y_j - 0) &= C_3^{(4)}. \end{aligned}$$

Доведення проводиться безпосередньою підстановкою відповідних значень аргументів у визначений розривний сплайн (1).

Теорема 2. Нехай функція $f(x, y)$ наближується оператором $S(x, y) = s_{ij}^{(k)}(x, y)$, $(x, y) \in T_{ij}^{(k)} \subset D$ ($k = 1, 2, 3, 4$) та $|f'_x(x, y)| \leq M$, $|f'_y(x, y)| \leq N$, тоді для оцінки похибки наближення в кожному трикутному елементі розбиття справедлива нерівність:

$$|f(x, y) - S(x, y)| \leq \frac{M \cdot \Delta_x + N \cdot \Delta_y}{2}, \quad \Delta_x = x_{i+1} - x_i, \quad \Delta_y = y_{j+1} - y_j.$$

Доведення. Проведемо доведення для трикутного елемента типу $T_{ij}^{(1)}$. Очевидно, що

$$\frac{\omega 3_{ij}^{(1)}(x, y)}{\omega 3_{ij}^{(1)}(A_1^{(1)})} + \frac{\omega 2_{ij}^{(1)}(x, y)}{\omega 2_{ij}^{(1)}(A_2^{(1)})} + \frac{\omega 1_{ij}^{(1)}(x, y)}{\omega 1_{ij}^{(1)}(A_3^{(1)})} \equiv 1, \quad \forall (x, y) \in T_{ij}^{(1)},$$

тому, можемо представити функцію $f(x, y)$ у вигляді:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{\omega 3_{ij}^{(1)}(x, y)}{\omega 3_{ij}^{(1)}(A_1^{(1)})} f(x, y) + \frac{\omega 2_{ij}^{(1)}(x, y)}{\omega 2_{ij}^{(1)}(A_2^{(1)})} f(x, y) + \frac{\omega 1_{ij}^{(1)}(x, y)}{\omega 1_{ij}^{(1)}(A_3^{(1)})} f(x, y) = \\ &= \frac{\omega 3_{ij}^{(1)}(x, y)}{\omega 3_{ij}^{(1)}(A_1^{(1)})} \left[f(A_1^{(1)}) + f'_x \left(x_{A_1^{(1)}} + \theta(x - x_{A_1^{(1)}}), y_{A_1^{(1)}} + \theta(y - y_j) \right) (x - x_{A_1^{(1)}}) + \right. \\ &\quad \left. + f'_y \left(x_{A_1^{(1)}} + \theta(x - x_{A_1^{(1)}}), y_{A_1^{(1)}} + \theta(y - y_{A_1^{(1)}}) \right) (y - y_{A_1^{(1)}}) \right] + \\ &+ \frac{\omega 2_{ij}^{(1)}(x, y)}{\omega 2_{ij}^{(1)}(A_2^{(1)})} \left[f(A_2^{(1)}) + f'_x \left(x_{A_2^{(1)}} + \theta(x - x_{A_2^{(1)}}), y_{A_2^{(1)}} + \theta(y - y_{A_2^{(1)}}) \right) (x - x_{A_2^{(1)}}) + \right. \\ &\quad \left. + f'_y \left(x_{A_2^{(1)}} + \theta(x - x_{A_2^{(1)}}), y_{A_2^{(1)}} + \theta(y - y_{A_2^{(1)}}) \right) (y - y_{A_2^{(1)}}) \right] + \\ &+ \frac{\omega 1_{ij}^{(1)}(x, y)}{\omega 1_{ij}^{(1)}(A_3^{(1)})} \left[f(A_3^{(1)}) + f'_x \left(x_{A_3^{(1)}} + \theta(x - x_{A_3^{(1)}}), y_{A_3^{(1)}} + \theta(y - y_{A_3^{(1)}}) \right) (x - x_{A_3^{(1)}}) + \right. \\ &\quad \left. + f'_y \left(x_{A_3^{(1)}} + \theta(x - x_{A_3^{(1)}}), y_{A_3^{(1)}} + \theta(y - y_{A_3^{(1)}}) \right) (y - y_{A_3^{(1)}}) \right] = \\ &= S(x, y) + RS(x, y), \quad 0 < \theta < 1, \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} RS(x, y) &= \frac{\omega 3_{ij}^{(k)}(x, y)}{\omega 3_{ij}^{(k)}(A_1^{(k)})} \left[f'_x \left(x_{A_1^{(k)}} + \theta(x - x_{A_1^{(k)}}), y_{A_1^{(k)}} + \theta(y - y_j) \right) (x - x_{A_1^{(k)}}) + \right. \\ &\quad \left. + f'_y \left(x_{A_1^{(k)}} + \theta(x - x_{A_1^{(k)}}), y_{A_1^{(k)}} + \theta(y - y_{A_1^{(k)}}) \right) (y - y_{A_1^{(k)}}) \right] + \\ &+ \frac{\omega 2_{ij}^{(k)}(x, y)}{\omega 2_{ij}^{(k)}(A_2^{(k)})} \left[f'_x \left(x_{A_2^{(k)}} + \theta(x - x_{A_2^{(k)}}), y_{A_2^{(k)}} + \theta(y - y_{A_2^{(k)}}) \right) (x - x_{A_2^{(k)}}) + \right. \\ &\quad \left. + f'_y \left(x_{A_2^{(k)}} + \theta(x - x_{A_2^{(k)}}), y_{A_2^{(k)}} + \theta(y - y_{A_2^{(k)}}) \right) (y - y_{A_2^{(k)}}) \right] + \\ &+ \frac{\omega 1_{ij}^{(k)}(x, y)}{\omega 1_{ij}^{(k)}(A_3^{(k)})} \left[f'_x \left(x_{A_3^{(k)}} + \theta(x - x_{A_3^{(k)}}), y_{A_3^{(k)}} + \theta(y - y_{A_3^{(k)}}) \right) (x - x_{A_3^{(k)}}) + \right. \\ &\quad \left. + f'_y \left(x_{A_3^{(k)}} + \theta(x - x_{A_3^{(k)}}), y_{A_3^{(k)}} + \theta(y - y_{A_3^{(k)}}) \right) (y - y_{A_3^{(k)}}) \right]. \end{aligned}$$

Тепер оцінимо похибку наближення $|RS(x, y)| = |f(x, y) - S(x, y)|$:

$$\begin{aligned} |RS(x, y)| &\leq \frac{\omega_{ij}^{(1)}(x, y)}{\omega_{ij}^{(1)}(A_1^{(1)})} \cdot [M(x - x_{A_1^{(1)}}) + N(y - y_{A_1^{(1)}})] + \frac{\omega_{ij}^{(1)}(x, y)}{\omega_{ij}^{(1)}(A_2^{(1)})} [M(x - x_{A_2^{(1)}}) + \\ &+ N(y - y_{A_2^{(1)}})] + \frac{\omega_{ij}^{(1)}(x, y)}{\omega_{ij}^{(1)}(A_3^{(1)})} [M(x - x_{A_3^{(1)}}) + N(y - y_{A_3^{(1)}})] = \\ &= M \left(\frac{-y + y_j + \frac{(x - x_{i+1})(y_{j+1} - y_j)}{x_i - x_{i+1}}}{y_{j+1} - y_j} \cdot (x - x_i) + \frac{y - y_j}{y_{j+1} - y_j} \cdot (x - x_i) + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \cdot (x_{i-1} - x) \right) + \\ &+ N \left(\frac{-y + y_j + \frac{(x - x_{i+1})(y_{j+1} - y_j)}{x_i - x_{i+1}}}{y_{j+1} - y_j} \cdot (y - y_j) + \frac{y - y_j}{y_{j+1} - y_j} \cdot (y_{j+1} - y) + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \cdot (y - y_j) \right) = \\ &= M \cdot u(x, y) + N \cdot v(x, y). \end{aligned}$$

Далі, після знаходження максимальних значень функцій $u(x, y)$ та $v(x, y)$, отримаємо, що максимальне значення функція $u(x, y)$ досягає в точці $\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}, 0\right)$ та дорівнює $\frac{x_{i+1} - x_i}{2} = \frac{\Delta_x}{2}$, а максимальне значення функція $v(x, y)$ досягає в точці $\left(0, \frac{y_j + y_{j+1}}{2}\right)$ та дорівнює $\frac{y_{j+1} - y_j}{2} = \frac{\Delta_y}{2}$.

Тобто отримаємо наступну оцінку похибки:

$$|RS(x, y)| \leq \frac{M \cdot \Delta_x + N \cdot \Delta_y}{2}.$$

Теорема 2 доведена.

Наведемо оцінку похибки наближення функції лінійним інтерполяційним сплайном, як наведена в роботі Суботіна [20].

Нехай $\xi = \{\xi_1, \xi_2\} \in R^2$, $\|\xi\| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2} = 1$, $D_\xi f(x, y) = \xi_1 \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \xi_2 \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ – похідна за напрямком ξ .

Теорема 3 [20]. Нехай $f(x, y) \in M_2$, $M_2 = \{f(x, y) : D_\xi f(x, y) \text{ – неперервні в } D \text{ та } |D_\xi f(u) - D_\xi f(v)| \leq M \|u - v\|, \forall u = (u_1, u_2) \in D, \forall v = (v_1, v_2) \in D, \forall \xi\}$ наближується оператором $S(x, y) = s_{ij}^{(k)}(x, y)$, $(x, y) \in T_{ij}^{(k)} \subset D$ ($k = 1, 2, 3, 4$), тоді для оцінки похибки наближення в кожному трикутному елементі розбиття справедлива нерівність:

$$|f(x, y) - S(x, y)| \leq \frac{1}{6} M h^2,$$

де h – довжина гіпотенузи.

Теорема 4. Якщо $C_\mu^{(k)} = f(A_\mu^{(k)})$, $k = \overline{1, 4}$, $\mu = \overline{1, 3}$, то в кожному трикутнику $T_{ij}^{(k)}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$ оператор (1) точно відновлює всі лінійні функції.

Доведення витікає з того, що через три точки можна провести тільки одну площину.

Математичне моделювання розривної функції двох змінних з використанням розривної апроксимації. Нехай задана розривна функція двох змінних $f(x, y)$ в одиничному квадраті $D = [0, 1]^2$. Ця область розбивається на прямокутні трикутні елементи таким же чином, як і в попередньому розділі (рис. 1). Функція $f(x, y)$ має розриви першого роду на границях між цими прямокутними трикутниками (не обов'язково між всіма). Побудуємо оператор розривної кусково-поліноміальної апроксимації такої, що в кожному трикутнику він є оператором поліноміальної апроксимації функції.

Означення 2. Будемо називати розривним апроксимаційним лінійним поліноміальним сплайном в області $T_{ij}^{(k)} \subset D$ ($k = \{1, 2, 3, 4\}$) функцію, визначену формулою (1), а коефіцієнти $C_p^{(k)}$, $p = \overline{1, 3}$, $k = \overline{1, 4}$ сплайна знаходяться методом найменших квадратів в інтегральній формі з умови

$$\sum_{T_{ij}^{(k)} \subset D} \iint_{T_{ij}^{(k)}} [f(x, y) - s_{ij}^{(k)}(x, y, C)]^2 dx dy \rightarrow \min_C \quad (2)$$

Теорема 5. Нехай $f(x, y) \in M_2$, $M_2 = \{f(x, y) : D_\xi f(x, y) - \text{неперервні в } T_{ij}^{(k)}, k = \overline{1, 4} \text{ та } |D_\xi f(u) - D_\xi f(v)| \leq M \|u - v\|, \forall u = (u_1, u_2) \in T_{ij}^{(k)}, \forall v = (v_1, v_2) \in T_{ij}^{(k)}, \forall \xi\}$ наближується апроксимаційним розривним сплайном $S(x, y) = s_{ij}^{(k)}(x, y)$, $(x, y) \in T_{ij}^{(k)}$, визначеним формулою (1) з коефіцієнтами, що знаходяться з формули (2), тоді для оцінки похибки наближення в кожному трикутному елементі розбиття справедлива нерівність:

$$\|S(x, y)\|_\infty \leq \max \left\{ |f(x_i, y_j)|, |f(x_{i+1}, y_j)|, |f(x_i, y_{j+1})| \right\} + \frac{1}{6} M h^2,$$

де h – довжина гіпотенузу трикутного елемента.

Доведення. Проведемо доведення на прикладі трикутника $T_{ij}^{(1)}$. Тоді формула (1) перетвориться на наступний вираз:

$$S(x, y) = C_1^{(1)} \frac{y - g(x)}{y_j - g(x)} + C_2^{(1)} \frac{y - y_j}{y_{j+1} - y_j} + C_3^{(1)} \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i},$$

де

$$g(x) = y_j + \frac{(x - x_{i+1})(y_{j+1} - y_j)}{x_i - x_{i+1}}.$$

Розв'яжемо мінімізаційну задачу: $P_{ij}(C) \rightarrow \min_C$, де

$$P_{ij}(C) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{g(x)} \left(C_1^{(1)} \frac{y - g(x)}{y_{j+1} - g(x)} + C_2^{(1)} \frac{y - y_j}{y_{j+1} - y_j} + C_3^{(1)} \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} - f(x, y) \right)^2 dx dy.$$

Випишемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\frac{\partial P_{ij}(C)}{\partial C_1^{(1)}} = 0, \quad \frac{\partial P_{ij}(C)}{\partial C_2^{(1)}} = 0, \quad \frac{\partial P_{ij}(C)}{\partial C_3^{(1)}} = 0$$

відносно невідомих $C_m^{(1)}$, $m = 1, 2, 3$:

$$\begin{cases} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{g(x)} 2 \left(C_1^{(1)} \frac{y - g(x)}{y_{j+1} - g(x)} + C_2^{(1)} \frac{y - y_j}{y_{j+1} - y_j} + C_3^{(1)} \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \right) \frac{y - g(x)}{y_{j+1} - g(x)} dy dx = 0; \\ \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{g(x)} 2 \left(C_1^{(1)} \frac{y - g(x)}{y_{j+1} - g(x)} + C_2^{(1)} \frac{y - y_j}{y_{j+1} - y_j} + C_3^{(1)} \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \right) \frac{y - y_j}{y_{j+1} - y_j} dy dx = 0; \\ \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{g(x)} 2 \left(C_1^{(1)} \frac{y - g(x)}{y_{j+1} - g(x)} + C_2^{(1)} \frac{y - y_j}{y_{j+1} - y_j} + C_3^{(1)} \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \right) \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} dy dx = 0. \end{cases} \quad (3)$$

У системі зробимо заміну

$$C_1^{(1)} = f(x_i + 0, y_j + 0) + \varepsilon_{i,j}, \quad C_2^{(1)} = f(x_i + 0, y_{j+1} - 0) + \varepsilon_{i,j+1}, \quad C_3^{(1)} = f(x_{i+1} - 0, y_j + 0) + \varepsilon_{i+1,j}$$

і замінимо $f(x, y)$ інтерполяційним сплайном, побудованим на трикутному елементі $T_{ij}^{(1)}$ із залишковим членом $R(x, y)$, який був виведений у доведенні теореми 2. В результаті отримаємо наступні вирази для інтегральних членів отриманої системи, враховуючи, що $g(x) = y_j + \frac{(x - x_{i+1})(y_{j+1} - y_j)}{x_i - x_{i+1}}$:

$$\begin{aligned} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{g(x)} \left(\frac{y - g(x)}{y_j - g(x)} \right)^2 dx dy &= \frac{(x_i - x_{i+1})(y_j - y_{j+1})}{12}; & \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{g(x)} \frac{y - y_j}{y_{j+1} - y_j} \frac{y - g(x)}{y_j - g(x)} dx dy &= \frac{(x_i - x_{i+1})(y_j - y_{j+1})}{24}; \\ \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{g(x)} \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \frac{y - g(x)}{y_j - g(x)} dx dy &= \frac{(x_i - x_{i+1})(y_j - y_{j+1})}{24}; & \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{g(x)} \left(\frac{y - y_j}{y_{j+1} - y_j} \right)^2 dx dy &= \frac{(x_i - x_{i+1})(y_j - y_{j+1})}{12}; \end{aligned}$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{g(x)} \frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i} \frac{y-y_j}{y_{j+1}-y_j} dx dy = \frac{(x_i-x_{i+1})(y_j-y_{j+1})}{24}; \quad \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{g(x)} \left(\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i} \right)^2 dx dy = \frac{(x_i-x_{i+1})(y_j-y_{j+1})}{12}.$$

Система (3) набуває вигляду:

$$\begin{cases} \frac{(x_i-x_{i+1})(y_j-y_{j+1})}{12} \varepsilon_{i,j} + \frac{(x_i-x_{i+1})(y_j-y_{j+1})}{24} \varepsilon_{i,j+1} + \frac{(x_i-x_{i+1})(y_j-y_{j+1})}{24} \varepsilon_{i+1,j} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{g(x)} R(x,y) \frac{y-g(x)}{y_j-g(x)} dy dx; \\ \frac{(x_i-x_{i+1})(y_j-y_{j+1})}{24} \varepsilon_{i,j} + \frac{(x_i-x_{i+1})(y_j-y_{j+1})}{12} \varepsilon_{i,j+1} + \frac{(x_i-x_{i+1})(y_j-y_{j+1})}{24} \varepsilon_{i+1,j} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{g(x)} R(x,y) \frac{y-y_j}{y_{j+1}-y_j} dy dx; \\ \frac{(x_i-x_{i+1})(y_j-y_{j+1})}{24} \varepsilon_{i,j} + \frac{(x_i-x_{i+1})(y_j-y_{j+1})}{24} \varepsilon_{i,j+1} + \frac{(x_i-x_{i+1})(y_j-y_{j+1})}{12} \varepsilon_{i+1,j} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{g(x)} R(x,y) \frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i} dy dx. \end{cases} \quad (4)$$

Для аналізу правих частин отриманої системи скористаємося теоремою 3 для оцінки похибки наближення розривним інтерполяційним сплайном на трикутному елементі:

$$|f(x,y) - S(x,y)| \leq \frac{1}{6} M h^2,$$

де h – довжина гіпотенузи трикутного елемента $T_{ij}^{(1)}$.

Використовуючи позначення $\|\varepsilon\| = \max\{\varepsilon_{i,j}, \varepsilon_{i+1,j}, \varepsilon_{i,j+1}\}$ та спростивши отримані вирази, систему (4) переписемо у вигляді:

$$\begin{cases} \frac{(x_i-x_{i+1})(y_j-y_{j+1})}{6} \|\varepsilon\| = \frac{1}{6} M h^2 \frac{(x_i-x_{i+1})(y_j-y_{j+1})}{6}; \\ \frac{(x_i-x_{i+1})(y_j-y_{j+1})}{6} \|\varepsilon\| = \frac{1}{6} M h^2 \frac{(x_i-x_{i+1})(y_j-y_{j+1})}{6}; \\ \frac{(x_i-x_{i+1})(y_j-y_{j+1})}{6} \|\varepsilon\| = \frac{1}{6} M h^2 \frac{(x_i-x_{i+1})(y_j-y_{j+1})}{6}. \end{cases}$$

Тобто $\|\varepsilon\| \leq \frac{1}{6} M h^2$.

Теорема 5 доведена.

Теорема 6. Нехай функція $f(x,y)$ наближується апроксимаційним розривним сплайном $S(x,y)$ у вигляді (1) $(x,y) \in T_{ij}^{(1)} \subset D$ з коефіцієнтами, що знаходяться з формули (2), та $|f'_x(x,y)| \leq M$, $|f'_y(x,y)| \leq N$. Тоді для оцінки розривного апроксимаційного сплайна в кожному трикутному елементі розбиття справедлива нерівність:

$$\|S(x,y)\|_{\infty} \leq \max\{|f(x_i, y_j)|, |f(x_{i+1}, y_j)|, |f(x_i, y_{j+1})|\} + \frac{M \cdot \Delta_x + N \cdot \Delta_y}{2},$$

де $\Delta_x = x_{i+1} - x_i$, $\Delta_y = y_{j+1} - y_j$.

Доведення. Доведення проводиться по аналогії з теоремою 5, використовуючи похибку наближення розривної функції розривними лінійними інтерполяційними сплайнами з теореми 2, яка має вигляд:

$$|f(x,y) - S(x,y)| \leq \frac{M \cdot \Delta_x + N \cdot \Delta_y}{2}.$$

Теорема 6 доведена.

Наслідок 1. Якщо наближувана функція $f(x,y)$ є кусково-лінійною або кусково-сталою функцією в кожному трикутному елементі розбиття з точками розриву (x_i, y_j) , $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$ у випадку наближення її кусково-лінійним сплайном $S(x,y)$, визначеним формулами (1) з невідомими $C_m^{(k)}$, $m = \overline{1, 3}$, $k = \overline{1, 4}$, що знаходяться з умови (2), то отримаємо точно наближувану функцію, тобто $S(x,y) = f(x,y)$, де $f(x,y) = A(\text{const})$ або $f(x,y) = A_0 + A_1x + A_2y$.

Математичне моделювання розривної функції двох змінних з використанням розривної інтерлінації. В роботі [21] побудовано оператор розривної інтерлінації. Нагадаємо його вигляд.

Розглянемо трикутний елемент T_{ij} , $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$ (рис. 2), утворений прямими

$$\omega_{1i}(x, y) = 0, \quad \omega_{2j}(x, y) = 0, \quad \omega_{3ij}(x, y) = 0,$$

де

$$\omega_{1i} := x - x_i, \quad \omega_{2j} := y - y_j, \quad \omega_{3ij} := \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} - \frac{y - y_{j+1}}{y_j - y_{j+1}}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}.$$

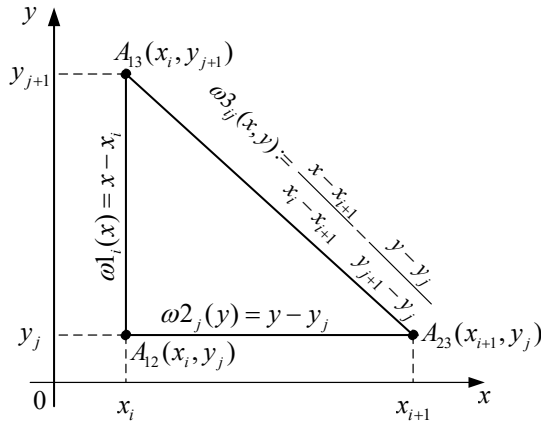


Рис. 2 – Зображення трикутного елемента T_{ij} .

Вважаємо заданими:

1. Сліди функції $f(x, y)$ на прямій $x = x_i$ (справа та зліва прямою відповідно):

$$\varphi p_i(y) = \lim_{x \rightarrow x_i+0} f(x, y) = f(x_i + 0, y),$$

$$\varphi m_i(y) = \lim_{x \rightarrow x_i-0} f(x, y) = f(x_i - 0, y);$$

$$\varphi p p_{ij} = \varphi p_i(y_j) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_i+0 \\ y \rightarrow y_j+0}} f(x, y) = f(x_i + 0, y_j + 0),$$

$$\varphi m p_{ij} = \varphi m_i(y_j) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_i-0 \\ y \rightarrow y_j+0}} f(x, y) = f(x_i - 0, y_j + 0).$$

2. Сліди функції $f(x, y)$ на прямій $y = y_j$ (над та під прямою відповідно):

$$\psi p_j(x) = \lim_{y \rightarrow y_j+0} f(x, y) = f(x, y_j + 0), \quad \psi m_j(x) = \lim_{y \rightarrow y_j-0} f(x, y) = f(x, y_j - 0);$$

$$\psi p p_{ij} = \psi p_j(x_i) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_i+0 \\ y \rightarrow y_j+0}} f(x, y) = f(x_i + 0, y_j + 0),$$

$$\psi m p_{ij} = \psi m_j(x_i) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_i+0 \\ y \rightarrow y_j-0}} f(x, y) = f(x_i + 0, y_j - 0).$$

3. Сліди функції $f(x, y)$ на прямій $y = \frac{(y_j - y_{j+1})(x - x_i)}{x_{i+1} - x_i} + y_{j+1}$ (під та над прямою відповідно):

$$\eta m_{ij}(x) = f\left(x, \frac{(y_j - y_{j+1})(x - x_i)}{x_{i+1} - x_i} + y_{j+1} - 0\right), \quad \eta p_{ij}(x) = f\left(x, \frac{(y_j - y_{j+1})(x - x_i)}{x_{i+1} - x_i} + y_{j+1} + 0\right),$$

$$\eta p m_{ij} = \eta m_{ij}(x_i) = f(x_i + 0, y_{j+1} - 0), \quad \eta p p_{ij} = \eta p_{ij}(x_i) = f(x_i + 0, y_{j+1} + 0)$$

або

$$\eta m_{ij}(y) = f\left(\frac{(y - y_j)(x_i - x_{i+1})}{y_{j+1} - y_j} + x_{i+1} + 0, y\right), \quad \eta p_{ij}(y) = f\left(\frac{(y - y_j)(x_i - x_{i+1})}{y_{j+1} - y_j} + x_{i+1} - 0, y\right),$$

$$\eta p m_{ij} = \eta m_{ij}(y_j) = f(x_{i+1} + 0, y_j - 0), \quad \eta m p_{ij} = \eta p_{ij}(y_j) = f(x_{i+1} - 0, y_j + 0).$$

Теорема 7. Якщо сліди функції $f(x, y)$ задовольняють умовам:

$$\psi p_j(x_i) = \varphi p_i(y_j), \quad \eta m_{ij}(x_i) = \varphi p_i(y_{j+1}), \quad \eta m_{ij}(x_{i+1}) = \psi p_j(x_{i+1}),$$

то оператор

$$\begin{aligned} Of(x, y) = & \frac{\omega_{3ij}(x, y)}{\omega_{3ij}(A_{12})} (\psi p_j(x) + \varphi p_i(y) - \varphi p_i(y_j)) + \\ & + \frac{\omega_{2j}(y)}{\omega_{2j}(A_{13})} \left(\eta m_{ij}(x) - \varphi p_i\left(y_j + \frac{(x - x_{i+1})(y_{j+1} - y_j)}{(x_i - x_{i+1})}\right) + \varphi p_i(y) \right) + \\ & + \frac{\omega_{1i}(x)}{\omega_{1i}(A_{23})} \left(\eta m_{ij}\left(x_{i+1} + \frac{(y - y_j)(x_i - x_{i+1})}{(y_{j+1} - y_j)}\right) - \psi p_j\left(x_{i+1} + \frac{(y - y_j)(x_i - x_{i+1})}{(y_{j+1} - y_j)}\right) + \psi p_j(x) \right) \end{aligned}$$

інтерлінує $f(x, y)$ на $\partial T_i : Of(x, y)|_{\partial T_i} = f(x, y)|_{\partial T_i}$.

Теорема 8. Якщо $f(x, y) \in C^2$ разом із своїми частинними похідними до другого порядку включно

в середині трикутного елемента T_{ij} , то для залишку $Rf = (I - O)f$ справедлива рівність:

$$Rf(x, y) = \frac{\omega_{3_{ij}}(x, y)}{\omega_{3_{ij}}(A_{12})} \int_{x_i}^x \int_{y_j}^y f^{(1,1)}(u, v) dudv + \frac{\omega_{2_j}(y)}{\omega_{2_j}(A_{13})} \int_{x_i}^x \int_{y_j + \frac{(x-x_{i+1})(y_{j+1}-y_j)}{x_i-x_{i+1}}}^y f^{(1,1)}(u, v) dudv +$$

$$+ \frac{\omega_{1_i}(x)}{\omega_{1_i}(A_{23})} \int_{x_{i+1} + \frac{(y-y_j)(x_i-x_{i+1})}{y_{j+1}-y_j}}^x \int_{y_j}^y f^{(1,1)}(u, v) dudv, \quad (x, y) \in T_{ij}.$$

У випадку, коли область триангульована, залишок інтерлінації в кожному з трикутників не дорівнює добутовці залишків одновимірної інтерполяції на відміну від випадка розбиття області на прямокутні елементи. Тому для оцінки залишку корисною буде теорема.

Теорема 9. Нехай $f(x, y) \in L_{\infty}^{1,1}(T_{ij})$, $\forall (x, y) \in T_{ij}$. Тоді справедлива оцінка похибки:

$$|Rf(x, y)| \leq \|f^{(1,1)}(x, y)\|_{L_{\infty}(T_{ij})} \cdot \left| (x - x_i)(y - y_j) \cdot \left(\frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} - \frac{y - y_j}{y_{j+1} - y_j} \right) \right|, \quad \forall (x, y) \in T_{ij},$$

де $L_{\infty}(T_{ij}) = \lim_{p \rightarrow \infty} L_p(T_{ij}) = \sup \text{vrai} |f(x, y)|$ – істотна верхня грань функції $|f(x, y)|$ на T_{ij} , тобто найменше з чисел $K \geq 0$, для яких нерівність $|f(x, y)| > K$ виконується на множині міри нуль.

Теорема 10. Якщо виконуються умови теореми 8 та теореми 9, то функція

$$f(x, y) = (x - x_i)(y - y_j) \left(\frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} - \frac{y - y_j}{y_{j+1} - y_j} \right)$$

перетворює нерівність з теореми 9 у рівність.

Обчислювальні експерименти та порівняння результатів. Нехай задані вузли трикутної сітки: $x_1 = 0$, $x_2 = 0.5$, $x_3 = 1$, $y_1 = 0$, $y_2 = 0.5$, $y_3 = 1$ та функція $f(x, y)$, визначена в області $T = T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4$, представленій на рис. 3.

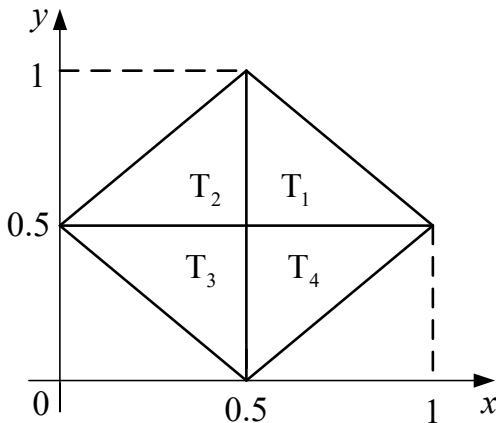


Рис. 3 – Область визначення наближуваної функції $f(x, y)$.

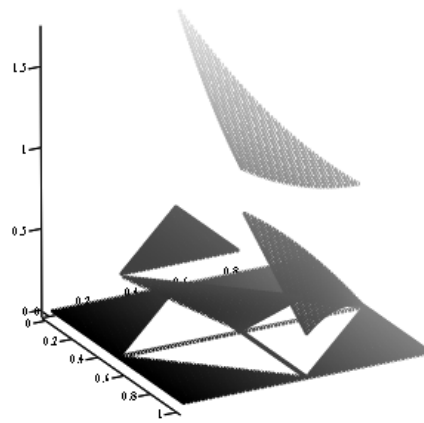


Рис. 4 – Зображення розривної функції $f(x, y)$.

$$T_1 = \{x - 0.5 > 0, y - 0.5 > 0, 1.5 - x - y > 0\};$$

$$T_2 = \{-(x - 0.5) > 0, y - 0.5 > 0, 0.5 + x - y > 0\};$$

$$T_3 = \{-(x - 0.5) > 0, -(y - 0.5) > 0, -0.5 + x + y > 0\};$$

$$T_4 = \{x - 0.5 > 0, -(y - 0.5) > 0, 0.5 - x + y > 0\}.$$

Задамо функцію (рис. 4):

$$f(x, y) = \begin{cases} -y^2 - x + 1.5, & (x, y) \in T_1; \\ (y - 1)^2 + (x - 1)^2 + 0.5, & (x, y) \in T_2; \\ 0.5, & (x, y) \in T_3; \\ x - y, & (x, y) \in T_4. \end{cases}$$

В кожному розглянутому трикутному елементі побудуємо інтерполяційний сплайн $S(x, y)$ у вигляді формули (1), в якості елементів матриці C беремо значення функції (лівосторонні та правосторонні) у вузлах сітки (у цьому випадку вважаємо їх заданими).

$$C = \begin{pmatrix} C_1^{(1)} & C_2^{(1)} & C_3^{(1)} \\ C_1^{(2)} & C_2^{(2)} & C_3^{(2)} \\ C_1^{(3)} & C_2^{(3)} & C_3^{(3)} \\ C_1^{(4)} & C_2^{(4)} & C_3^{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.75 & 0 & 0.25 \\ 1 & 0.75 & 1.75 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Після підстановки значень матриці C в формулу (1), отримаємо наступний інтерполяційний сплайн (рис. 5, а):

$$S1(x, y) = \begin{cases} -x - 1.5y + 2, & (x, y) \in T_1; \\ -1.5x - 0.5y + 2, & (x, y) \in T_2; \\ 0.5, & (x, y) \in T_3; \\ x - y, & (x, y) \in T_4. \end{cases}$$

Максимальне відхилення наближуваної функції $f(x, y)$ від побудованого інтерполяційного сплайна $S1(x, y)$: $\max |f(x, y) - S1(x, y)| \approx 0.13$.

Тепер побудуємо апроксимаційний сплайн у вигляді формули (1). Елементи матриці C знаходимо, застосовуючи метод найменших квадратів, тобто

$$C = \begin{pmatrix} 0.775 & 0.075 & 0.275 \\ 0.95 & 0.65 & 1.65 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Отримаємо апроксимаційний сплайн вигляду (рис. 5, б)

$$S2(x, y) = \begin{cases} -x - 1.4y + 1.975, & (x, y) \in T_1; \\ -1.4x - 0.6y + 1.95, & (x, y) \in T_2; \\ 0.5, & (x, y) \in T_3; \\ x - y, & (x, y) \in T_4. \end{cases}$$

Далі визначимо максимальне відхилення наближуваної функції $f(x, y)$ від побудованого сплайна $S2(x, y)$:

$$\max |f(x, y) - S2(x, y)| \approx 0.07.$$

Побудований розривний апроксимаційний сплайн наближує розривну функцію краще, ніж інтерполяційний, що відповідає теорії. Побудовані розривні сплайни точно наближують ту частину функції, де вона є постійною або лінійною, що і підтверджує викладену вище теорію.

Тепер для відновлення функції $f(x, y)$ застосуємо побудований оператор інтерлінації. Для того, щоб ним скористатися, у якості вхідних даних повинні бути задані сліди функції вздовж ліній триангуляції. Нехай функція $f(x, y)$ має розриви першого роду на лініях триангуляції, та вздовж цих ліній має наступні односторонні сліди:

$$T_1 : \varphi 1(y) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0.5+0 \\ 0.5 < y < 1.5-x}} f(x, y) = y^2;$$

$$T_2 : \psi 1(y) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0.5-0 \\ 0.5 < y < 0.5+x}} f(x, y) = (y-1)^2 + 0,75;$$

$$\varphi 2(x) = \lim_{\substack{y \rightarrow 0.5+0 \\ 0.5 < x < 1.5-y}} f(x, y) = 1,25 - x;$$

$$\psi 2(x) = \lim_{\substack{y \rightarrow 0.5+0 \\ y-0.5 < x < 0.5}} f(x, y) = (x-1)^2 + 0,75;$$

$$\varphi 3(x) = \lim_{\substack{y \rightarrow 1.5-x-0 \\ 0.5 < x < 1}} f(x, y) = 2x - x^2 - 0,75;$$

$$\psi 3(x) = \lim_{\substack{y \rightarrow x+0.5-0 \\ 0 < x < 0.5}} f(x, y) = (x-0,5)^2 + (x-1)^2 + 0,5;$$

або

або

$$\varphi 3(y) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1.5-y-0 \\ 0.5 < y < 1}} f(x, y) = y - y^2.$$

$$\psi 3(y) = \lim_{\substack{x \rightarrow y-0.5+0 \\ 0.5 < y < 1}} f(x, y) = (y-1,5)^2 + (y-1)^2 + 0,5.$$

$$\begin{aligned}
 T_3 : \chi_1(y) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0,5-0 \\ 0,5-x < y < 0,5}} f(x, y) = 0,5; & T_4 : \rho_1(y) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0,5+0 \\ x-0,5 < y < 0,5}} f(x, y) = 0,5 - y; \\
 \chi_2(x) &= \lim_{\substack{y \rightarrow 0,5-0 \\ 0,5-y < x < 0,5}} f(x, y) = 0,5; & \rho_2(x) &= \lim_{\substack{y \rightarrow 0,5-0 \\ 0,5 < x < y+0,5}} f(x, y) = x - 0,5; \\
 \chi_3(x) &= \lim_{\substack{y \rightarrow 0,5-x+0 \\ 0 < x < 0,5}} f(x, y) = 0,5; & \rho_3(x) &= \lim_{\substack{y \rightarrow x-0,5+0 \\ 0,5 < x < 1}} f(x, y) = 0,5; \\
 & \text{або} & & \text{або} \\
 \chi_3(y) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0,5-y+0 \\ 0 < y < 0,5}} f(x, y) = 0,5. & \rho_3(y) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0,5+y+0 \\ 0 < y < 0,5}} f(x, y) = 0,5.
 \end{aligned}$$

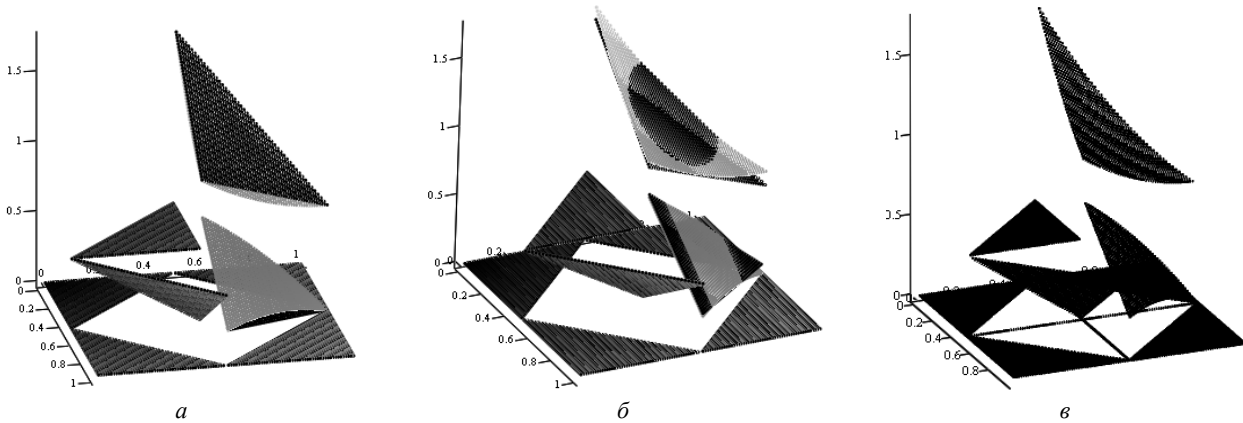


Рис. 5 – Графічний вигляд функції $f(x, y)$ (сірий колір) та: a – наближуючого інтерполяційного сплайну $S_1(x, y)$ (чорний колір); b – наближуючого апроксимаційного сплайну $S_2(x, y)$ (чорний колір); v – інтерлінаційного сплайну $S_3(x, y)$ (чорний колір).

За цими даними побудуємо інтерлінаційний сплайн. Умови теореми 7 виконуються, тому інтерлінаційний сплайн в кожному трикутному елементі буде мати наступні вигляді:

$$S_3(x, y) = \begin{cases} O_1 f(x, y), & (x, y) \in T_1; \\ O_2 f(x, y), & (x, y) \in T_2; \\ O_3 f(x, y), & (x, y) \in T_3; \\ O_4 f(x, y), & (x, y) \in T_4. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 O_1 f(x, y) &= \frac{2x+2y-2}{2 \cdot 0,5+2 \cdot 0,5-2} (\varphi_1(y) + \varphi_2(x) - \varphi_2(0,5)) + \frac{x-0,5}{1-0,5} (\varphi_2(x) + \varphi_3(y) - \varphi_2(1,5-y)) + \\
 &+ \frac{y-0,5}{1-0,5} (\varphi_1(x) + \varphi_3(x) - \varphi_1(1,5-x)) = 1,5 - x - y^2;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 O_2 f(x, y) &= \frac{2x-2y+1}{2 \cdot 0,5-2 \cdot 0,5+1} (\psi_1(y) + \psi_2(x) - \psi_2(0,5)) + \frac{x-0,5}{0-0,5} (\psi_2(x) + \psi_3(y) - \psi_2(y-0,5)) + \\
 &+ \frac{y-0,5}{1-0,5} (\psi_1(x) + \psi_3(x) - \psi_1(0,5-x)) = x^2 - 2x + y^2 - 2y + 2,5 = (x-1)^2 + (y-1)^2 + 0,5;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 O_3 f(x, y) &= \frac{2x+2y-1}{2 \cdot 0,5+2 \cdot 0,5-1} (\chi_1(y) + \chi_2(x) - \chi_2(0,5)) + \frac{x-0,5}{0-0,5} (\chi_2(x) + \chi_3(y) - \chi_2(0,5-y)) + \\
 &+ \frac{y-0,5}{0-0,5} (\chi_1(x) + \chi_3(x) - \chi_1(0,5-x)) = 0,5;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 O_4 f(x, y) &= \frac{2x-2y-1}{2 \cdot 0,5-2 \cdot 0,5-1} (\rho_1(y) + \rho_2(x) - \rho_2(0,5)) + \frac{x-0,5}{1-0,5} (\rho_2(x) + \rho_3(y) - \rho_2(0,5+y)) + \\
 &+ \frac{y-0,5}{0-0,5} (\rho_1(x) + \rho_3(x) - \rho_1(x-0,5)) = x - y.
 \end{aligned}$$

В результаті отримаємо розривний інтерлінаційний сплайн:

$$S3(x, y) = \begin{cases} -y^2 - x + 1.5, & (x, y) \in T_1; \\ (y-1)^2 + (x-1)^2 + 0.5, & (x, y) \in T_2; \\ 0.5, & (x, y) \in T_3; \\ x + 2, & (x, y) \in T_4. \end{cases}$$

Як бачимо, він повністю збігається з функцією $f(x, y)$. Тобто максимальне відхилення наближуваної функції $f(x, y)$ від побудованого інтерлінаційного сплайна $S3(x, y)$: $\max |f(x, y) - S3(x, y)| = 0$.

Перспективи подальших досліджень. В подальшому планується розробити методи відновлення розривних функцій з більш складною областю визначення різними інформаційними операторами. Також планується застосувати побудовані розривні апроксимаційні та інтерлінаційні сплайни для розв'язання задач комп'ютерної томографії з суттєвим використанням неоднорідності внутрішньої структури тіла, яке потрібно відновити.

Висновки. У статті представлені методи математичного моделювання розривних об'єктів з використанням різних інформаційних операторів. В якості інформаційних операторів виступають оператори інтерполяції та апроксимації, коли інформація про об'єкт подається у вигляді односторонніх значень у даній системі точок, та оператори інтерлінації, коли інформація подається у вигляді односторонніх слідів уздовж заданої системи ліній (у нашому випадку вздовж сторін прямокутних трикутників). У системі комп'ютерної математики проводились обчислювальні експерименти. Побудований розривний інтерлінаційний сплайн точно наближує розривну функцію, що підтверджується викладеною теорією. Тобто ці сплайни наближують розривну функцію краще, ніж інтерполяційні та апроксимаційні сплайни. Але побудовані конструкції належать різним інформаційним операторам.

Список літератури

1. Вершинин В. В., Завьялов Ю. С., Павлов Н. Н. Экспериментальные свойства сплайнов и задача сглаживания. – Новосибирск : Наука, 1988. – 104 с.
2. Larry L. Schumaker Spline Functions : Computational Methods. – Tennessee, Nashville : Vanderbilt University, 2015. – 409 p.
3. Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. И. Методы сплайн-функций. – М. : Наука, 1980. – 352 с.
4. Сергієнко І. В., Задірака В. К., Литвин О. М., Перишина Ю. І. Теорія розривних сплайнів та її застосування в комп'ютерній томографії: монографія. – К. : Наукова думка, 2017. – 314 с.
5. Попов Б. А. Равномерное приближение сплайнами. – Киев : Наукова думка, 1989. – 272с.
6. De Vore R. A. A method of grid optimization for finite element methods // Computer method in appl. Mechanics and engineering. – 1983. – Vol. 41. – P. 29 – 45.
7. Литвин О. М. Интерлінація функцій та деякі її застосування. – Х. : Основа, 2002. – 544с.
8. Emmel L., Kaber S. M., Maday Y. Pade-Jacobi Filtering for spectral approximations of discontinuous solutions // Numer. Algo, 33. – 2003. – P. 251 – 264.
9. Chantramsi T., Doostan A., Iaccarino G. Padé-Legendre approximants for uncertainty analysis with discontinuous response surfaces // J. Comp. Phys. – 2009. – 228. – P. 7159 – 7180.
10. Hesthaven J. S., Kaber S. M., Lurati L. Pade-Legendre Interpolants for Gibbs Reconstruction // J. Sci. Comp. – 2006. – 28. – P. 337 – 359.
11. Costarelli D. Sigmoidal Functions Approximation and Applications : Ph. D. Thesis. – Universitat degli Study Roma Tres, Roma, Italy. – 2013.
12. Lombardini R., Acevedo R., Kuczala A., Keys K. P., Goodrich C. P. Higher-order wavelet reconstruction/differentiation filters and Gibbs phenomena // Journal of Computational Physics. – 2016. – 15. – P. 244 – 262.
13. Литвин О. М., Перишина Ю. І., Пасічник В. О. Дослідження методу знаходження точок розриву першого роду функції однієї змінної // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Збірник наукових праць. Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2015. – № 6 (1115) – С. 67 – 76
14. Перишина Ю. І., Пасічник В. О. Наближення розривних функцій розривними сплайнами методом мінімакса // Вісник ХНТУ. – Херсон, 2018. – № 3 (66). – Т. 2. – С. 82 – 87.
15. Литвин О. Н., Перишина Ю. И., Сергиенко И. В. Восстановление разрывных функций двух переменных, когда линии разрыва неизвестны (прямоугольные элементы) // Кибернетика и системный анализ. – 2014. – № 4. – С. 126 – 134.
16. Литвин О. М., Перишина Ю. І. Наближення розривних функцій двох змінних розривними сплайн-інтерлінантами з використанням трапецевидних елементів // Таврічний вісник інформатики та математики. – Симферополь. – 2011. – № 2. – С. 59 – 70.
17. Литвин О. М., Перишина Ю. І. Математичне моделювання в комп'ютерній томографії з використанням мішаної апроксимації // Матеріали другої міжнародної конференції «Теорія та методи обробки сигналів». – Київ : Національний авіаційний університет, 2008. – С.85 – 86.
18. Литвин О. М., Перишина Ю. І. Математична модель відновлення тривимірних об'єктів за їх томограмами на системі трьох груп перерізаних площин з використанням інтерфлетатії функцій // Доповіді НАНУ. – 2005. – № 8. – С. 67 – 71.
19. Литвин О. М., Перишина Ю. І. Математична модель відновлення внутрішньої структури тривимірного об'єкта за відомими його томограмами з використанням інтерфлетатії функцій // Доповіді НАНУ. – 2005. – № 1. – С. 20 – 24.
20. Субботин Ю. Н. Зависимость оценок многомерной кусочно полиномиальной аппроксимации от геометрических характеристик триангуляции // Труды Математического института АН СССР. – 1989. – Т. 189. – С. 117 – 137.
21. Литвин О. М., Перишина Ю. І. Приближение разрывных функций двух переменных с разрывами первого рода на линиях триангуляции двумерной области // Управляющие системы и машины. – Киев, 2011. – № 5. – С. 34 – 47.

References (transliterated)

1. Vershinin V. V., Zavyalov Yu. S., Pavlov N. N. *Eksperimental'nye svoystva splaynov i zadacha sglazhivaniya* [Experimental properties of splines and the problem of smoothing]. Novosibirsk, Nauka Publ., 1988. 104 p.
2. Larry L. Schumaker. *Spline Functions : Computational Methods*. Vanderbilt University, Nashville, Tennessee, 2015. 409p.
3. Zavyalov Yu. S., Kvasov B. I., Miroshnichenko V. L. *Metody splayn-funktsiy* [Methods of spline functions]. Moscow, Nauka Publ., 1980. 352 p.
4. Serhiienko I. V., Zadira V. K., Lytvyn O. M., Pershyna I. I. *Teoriya rozryvnykh splayniv ta yiyi zastosuvannya v komp'yuterniy tomografiyi : monografiya* [Theory of discontinuous splines and its application in computed tomography]. Kyiv, Naukova Dumka Publ., 2017. 314 p.
5. Popov B. A. *Ravnornoe priblizhenie splaynami* [Uniform approximation by splines]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 1989. 272 p.
6. De Vore R. A. A method of grid optimization for finite element methods. *Computer method in appl. Mechanics and engineering*. 1983, Vol. 41, pp. 29–45.
7. Litvin O. M. *Interlinatsiya funktsiy ta deyaki yiyi zastosuvannya* [Interlination of functions and some of its applications]. Kharkiv, Osnova Publ., 2002. 544 p.
8. Emmel L., Kaber S. M., Maday Y. Pade-Jacobi filtering for spectral approximations of discontinuous solutions. *Numer. Algo*. 2003, no. 33, pp. 251–264.
9. Chantramsi T., Doostan A., Iaccarino G. Padé–Legendre approximants for uncertainty analysis with discontinuous response surfaces. *J. Comp. Phys*. 2009, no. 228, pp. 7159–7180.
10. Hesthaven J. S., Kaber S. M., Lurati L. Pade-Legendre Interpolants for Gibbs Reconstruction. *J. Sci. Comp*. 2006, 28, pp. 337–359.
11. Costarelli D. *Sigmoidal Functions Approximation and Applications : Ph. D. Thesis*. – Universitat degli Study Roma Tres, Roma, Italy. 2013.
12. Lombardini R., Acevedo R., Kuczala A., Keys K. P., Goodrich C. P. Higher-order wavelet reconstruction/differentiation filters and Gibbs phenomena. *Journal of Computational Physics*. 2016, no. 15, pp. 244–262.
13. Lytvyn O. M., Pershyna I. I., Pasichnyk V. O. Doslidzhennya metodu znakhodzhennya tochok rozryvu pershogo rodu funktsiyi odniefyi zminnoyi [Studying a method for identifying the points of discontinuity of the first kind of functions of one variable]. *Visnyk Natsional'noho tekhnichnoho universytetu «KHPI». Seriya : Matematychni modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh*. [Bulletin of the National Technical University «KhPI». Series : Mathematical modeling in engineering and technologies]. Kharkiv : NTU «KhPI» Publ., 2015, no. 6(1115), pp. 67–76.
14. Pershyna I. I., Pasichnyk V. O. Nablyzhennya rozryvnykh funktsiy rozryvnymy splaynami metodom minimaksa [Approximation of discontinuous functions by discontinuous splines by the minimax method]. *Visnyk KhNTU* [Bulletin of KhNTU]. Kherson, 2018, no. 3(66), vol. 2, pp. 82–87.
15. Litvin O. N., Pershyna I. I., Sergienko I. V. Vosstanovlenie razryvnykh funktsiy dvukh peremennykh, kogda linii razryva neizvestny (pryamougol'nye elementy) [Reconstruction of discontinuous functions of two variables when the discontinuity lines are unknown (rectangular elements)]. *Kibernetika i sistemnyy analiz* [Cybernetics and System Analysis]. 2014, no. 4, pp. 126–134.
16. Lytvyn O. M., Pershyna I. I. Nablyzhennya rozryvnykh funktsiy dvokh zminnykh rozryvnymy splayn-interlinantamy z vykorystanniam trapetsyvidnykh elementiv [Approximation of discontinuous functions of two variables by discontinuous spline interlinant using trapezoidal elements]. *Tavrishnyy visnyk informatyky ta matematyky* [Taurian Bulletin of Informatics and Mathematics]. Symferopol, 2011, no. 2, pp. 59–70.
17. Lytvyn O. M., Pershyna I. I. Matematychni modelyuvannya v kompyuterniy tomografiyi z vykorystanniam mishanoyi aproksymatsiyi [Mathematical modeling in computed tomography using blending approximation]. *Materialy drugoyi mizhnarodnoyi konferentsiyi «Teoriya ta metody obrobky signaliv»* [Theses of The Second International Conference “Theory and Methods of Signal Processing”]. Kyiv, Natsional'nyy aviatsiynyy universytet Publ., 2008. pp.85–86.
18. Lytvyn O. M., Pershyna I. I. Matematychna model' vidnovlennya tryvymirnykh ob'ektiv za yikh tomogramamy na systemi tryioikh grup pererizanykh ploshhyn z vykorystanniam interflatsiyi funktsiyi [Mathematical model of reconstruction of three-dimensional objects by their tomograms on the system of three groups of intersected planes using interflattation function]. *Dopovidi NANU* [Reports of NANU]. 2005, no. 8, pp. 67–71.
19. Lytvyn O. M., Pershyna I. I. Matematychna model' vidnovlennya vnutrishnyoi struktury tryvymirnogo ob'ekta za vidomymy yogo tomogramamy z vykorystanniam interflatsiyi funktsiyi [Mathematical model of restoration of internal structure of three-dimensional object on its known tomograms with use of interflattation of functions]. *Dopovidi NANU* [Reports of NANU]. 2005, no. 1, pp. 20–24.
20. Subbotin Yu. N. Zavisimost' otsenok mnogomernoy kushchno polinom'noy approksimatsiyi ot geometricheskikh kharakteristik triangulyatsii [Dependence of estimates of multidimensional piecewise polynomial approximation on geometric characteristics of triangulation]. *Trudy Matematicheskogo instituta AN SSSR* [Proceedings of the Mathematical Institute of the Academy of Science of USSR]. 1989, vol. 189, pp.117–137.
21. Litvin O. M., Pershyna I. I. Priblizhenie razryvnykh funktsiy dvukh peremennykh s razryvami pervogo roda na liniyakh triangulyatsii dvumernoy oblasti [Approximation of discontinuous functions of two variables with discontinuities of the first kind on the triangulation lines of a two-dimensional domain]. *Upravlyayusche sistemy i mashiny* [Control Systems and Machines]. Kyiv, 2011, no. 5, pp. 34–47.

Надійшла (received) 17.07.2021

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Першина Юлія Ігорівна – доктор фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри вищої математики, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (050) 222-69-79; e-mail: yuliapershina78@gmail.com.

Першина Юлія Ігорівна – доктор фізико-математических наук, доцент, доцент кафедри высшей математики, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: (050) 222-69-79; e-mail: yuliapershina78@gmail.com.

Pershyna Iuliia Igorevna – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor at the Department of Higher Mathematics, National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute», Kharkiv; tel.: (050) 222-69-79; e-mail: yuliapershina78@gmail.com.