

**В. П. ОЛЬШАНСЬКИЙ, С. В. ОЛЬШАНСЬКИЙ**

### ДИНАМІЧНИЙ ЕФЕКТ НЕСИМЕТРІЇ СИЛОВОЇ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДИСИПАТИВНИХ ОСЦИЛЯТОРІВ

Розглянуто особливості руху нелінійного осцилятора після навантаження його миттєвим силовою імпульсом. Пружна характеристика має вигляд ламаної лінії, складеної з двох відрізків прямих. Основну увагу приділено впливу дисипативних сил на можливість прояву динамічного ефекту несиметрії пружної характеристики, який вивчали раніше без урахування впливу цих сил. Розглянуто чотири варіанти сил опору. Це лінійний в'язкий опір, сухе тертя Кулона, позиційне тертя і квадратичний в'язкий опір. Для двох перших з них методом припасовування побудовано аналітичні розв'язки диференціального рівняння коливаль і виведено формули для обчислення розмахів. Встановлено нерівності, при виконанні яких проявляється динамічний ефект несиметрії силової характеристики. Умови прояву ефекту при наявності позиційного тертя виведено із енергетичних співвідношень, без розв'язування диференціального рівняння руху. Його перший інтеграл в умовах квадратичного опору виражено через функцію Ламберта від'ємного або додатного аргументів, в залежності від значення заданої початкової швидкості руху. Показано, що при малих стартових швидкостях проявляється згаданий ефект, а при великих – він відсутній. Для обчислення значень функції Ламберта рекомендовано проводити лінійну інтерполяцію табличних даних або використовувати відомі асимптотичні формули, що виражають її через елементарні функції з похибкою меншою за один відсоток. Викладення теорії супроводжується прикладами конкретних розрахунків. Показано повну відповідність числових результатів, до яких приводять виведені розрахункові формули, та чисельне інтегрування на комп'ютері нелінійного диференціального рівняння руху осцилятора.

**Ключові слова:** дисипативний осцилятор, кусково-лінійна характеристика пружності, миттєвий імпульс, різні варіанти дисипативної сили, функція Ламберта, динамічний ефект несиметрії силової характеристики.

**В. П. ОЛЬШАНСКИЙ, С. В. ОЛЬШАНСКИЙ**

### ДИНАМИЧЕСКИЙ ЭФФЕКТ НЕСИММЕТРИИ СИЛОВОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДИСИПАТИВНЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

Рассмотрены особенности движения нелинейного осциллятора после нагружения его мгновенным силовым импульсом. Упругая характеристика осциллятора имеет вид ломаной линии, составленной из двух отрезков прямых. Основное внимание уделено исследованию влияния дисипативных сил на возможность проявления динамического эффекта несимметрии упругой характеристики, который изучали раньше без учёта влияния этих сил. Рассмотрены четыре варианта сил сопротивления. Это линейное вязкое сопротивление, сухое трение Кулона, позиционное трение и квадратичное вязкое сопротивление. Для двух первых из них методом припасовывания построены аналитические решения дифференциального уравнения колебаний и выведены формулы для вычисления размахов. Установлены неравенства, при соблюдении которых проявляется эффект несимметрии силовой характеристики. Условия проявления эффекта при наличии позиционного трения выведены из энергетических соотношений, без решения дифференциального уравнения движения. Его первый интеграл в условиях квадратичного сопротивления выражен через функцию Ламберта отрицательного или положительного аргументов, в зависимости от значения заданной начальной скорости движения. Показано, что при малых стартовых скоростях проявляется упомянутый эффект, а при больших – он отсутствует. Для вычисления значений функции Ламберта рекомендовано проводить линейную интерполяцию табличных данных или использовать известные асимптотические формулы, которые выражают её через элементарные функции с ошибкой меньше одного процента. Изложение теории сопровождается примерами конкретных расчётов. Показано полное соответствие числовых результатов, к которым приводят выведенные расчётные формулы, и численное интегрирование на компьютере нелинейного дифференциального уравнения движения осциллятора.

**Ключевые слова:** дисипативный осциллятор, кусочно-линейная характеристика упругости, мгновенный импульс, различные варианты дисипативной силы, функция Ламберта, динамический эффект несимметрии силовой характеристики.

**V. P. OLSHANSKIY, S. V. OLSHANSKIY**

### DISSIPATIVE OSCILLATORS' POWER CHARACTERISTIC NON-SYMMETRY DYNAMIC EFFECT

The features of motion of a non-linear oscillator under the instantaneous force pulse loading are studied. The elastic characteristic of the oscillator is given by a polygonal chain consisting of two linear segments. The focus of the paper is on the influence of the dissipative forces on the possibility of occurrence of the elastic characteristic non-symmetry dynamic effect, studied previously without taking into account the influence of these forces. Four types of drag forces are considered, namely linear viscous friction, Coulomb dry friction, position friction, and quadratic viscous resistance. For the cases of linear viscous friction and Coulomb dry friction the analytical solutions of the differential equation of oscillations are found by the fitting method and the formulae for computing the swings are derived. The conditions on the parameters of the problem are determined for which the elastic characteristic non-symmetry dynamic effect occurs in the system. The conditions for the effect to occur in the system with the position friction are derived from the energy relations without solving the differential equation of motion. In the case of quadratic viscous friction the first integral of the differential equation of motion is given by the Lambert function of either positive or negative argument depending on the value of the initial velocity. The elastic characteristic non-symmetry dynamic effect is shown to occur for small initial velocities, whereas it is absent from the system when the initial velocities are sufficiently large. The values of the Lambert function are proposed to be computed by either linear interpolation of the known data or approximation of the Lambert function by elementary functions using asymptotic formulae which approximation error is less than 1%. The theoretical study presented in the paper is followed up by computational examples. The results of the computations by the formulae proposed in the paper are shown to be in perfect agreement with the results of numerical integration of the differential equation of motion of the oscillator using a computer.

**Key words:** dissipative oscillator, piecewise-linear elasticity characteristic, instantaneous pulse, different types of dissipative force, Lambert function, power characteristic non-symmetry dynamical effect.

**Вступ.** Існує багато публікацій, присвячених дослідженню *нестационарного деформування механічних систем*. На окрему увагу із них заслуговують монографічні видання останніх років, в яких *аналітико-чисельними методами* розв'язували *прямі задачі* динаміки пластин і оболонок [1 – 4], а також *обернені математично некоректні задачі* ідентифікації динамічних навантажень за результатами експериментального виміру переміщень і деформацій тонкостінних елементів конструкцій [5 – 7]. У названих роботах, в основному, розглядали лінійні

задачі, де виконується *принцип суперпозиції*. Значно менше публікацій стосується *нелінійних динамічних систем* і зокрема тих, що мають несиметричну силову характеристику. Певна інформація про їх динамічну поведінку є в [8 – 10]. До найпростіших систем такого типу відносяться *осцилятори*, в яких силова характеристика складається з відрізків двох прямих [11, 12]. Цей варіант характеристики використовуємо і в даній роботі. Розглядаємо особливості поведінки осцилятора при навантаженні його *миттєвим силовим імпульсом*. При цьому досліджуємо вплив на процес руху різних варіантів *дисипативних сил*. *Методом припасовування* будемо аналітичні розв'язки нелінійних задач з використанням *елементарних і спеціальних функцій*, а результати розрахунків на їх основі порівнюємо з результатами *чисельного комп'ютерного інтегрування* рівнянь руху.

В роботі [13] показано, що в *ідеально пружних* (не дисипативних) осциляторів, підданих дії короткочасних силових імпульсів, може проявлятися *ефект несиметрії силової характеристики*. Він полягає в тому, що максимальне переміщення системи у напрямку дії прикладеного імпульсу (*прямий відгук*) менше, ніж протилежне за напрямком максимальне переміщення (*зворотний відгук*) розвантаженої системи, при її вільних коливаннях. Таке співвідношення екстремальних переміщень можливе і при *непружному ударі* по осцилятору важким тілом [14]. Оскільки названий ефект стосувався ідеально пружних коливальних систем з несиметричною кусково лінійною силовою характеристикою, постає питання: чи можливий він при наявності дисипативних сил, що існують на практиці? Щоб отримати відповідь на це питання, далі розглядаємо рух деяких дисипативних осциляторів при дії миттєвого імпульсу сили. Беремо чотири варіанти сил опору, а саме: лінійний в'язкий опір, сухе тертя Кулона, позиційне тертя і квадратичний в'язкий опір.

Отже, **метою** даної **статті** є дослідження можливості прояву динамічного ефекту несиметрії силової характеристики коливальної системи при наявності дисипативних сил.

Очевидно, що наявність таких сил буде згладжувати названий ефект або повністю усувати його, оскільки дисипативні сили зменшують розмахи коливань зі зростанням їх номерів. Саме цим і спричинена мета дослідження.

**Коливання за наявності лінійного в'язкого опору.** Коливання за наявності лінійного в'язкого опору опишемо диференціальним рівнянням:

$$m\ddot{x} + k\dot{x} + [c + \Delta c \cdot \text{sign}(x)]x = 0, \quad (1)$$

у якому  $m$  – маса осцилятора;  $k$  – коефіцієнт лінійного в'язкого опору;  $c, \Delta c > 0$  – характеристики пружності;  $x(t)$  – переміщення системи у часі  $t$ ; крапка над  $x$  означає похідну по  $t$ .

Використовуємо розв'язок рівняння (1) за початкових умов:

$$x(0) = 0; \quad \dot{x}(0) = \mathcal{G}_0, \quad (2)$$

де  $\mathcal{G}_0$  – швидкість, яку одержав осцилятор внаслідок дії миттєвого імпульсу  $S = m\mathcal{G}_0$ .

На етапі руху осцилятора вгору, у додатному напрямку осі  $Ox$ , маємо:

$$x(t) = \frac{\mathcal{G}_0}{\omega_*} \exp(-\beta t) \sin(\omega_* t). \quad (3)$$

Тут  $\beta = \frac{k}{2m}$ ;  $\omega_* = \sqrt{\frac{c_1}{m} - \beta^2}$ ;  $c_1 = c + \Delta c$ .

Рух проходить зі швидкістю:

$$\dot{x}(t) = \mathcal{G}_0 \exp(-\beta t) \left[ \cos(\omega_* t) - \frac{\beta}{\omega_*} \sin(\omega_* t) \right]. \quad (4)$$

Перша зупинка осцилятора відбувається при  $t = t_1$ , і згідно з (4):

$$t_1 = \frac{1}{\omega_*} \arctg\left(\frac{\omega_*}{\beta}\right). \quad (5)$$

При цьому максимум переміщення осцилятора вгору, згідно з (3), становить:

$$\max x(t) = x(t_1) = a_1 = \frac{\mathcal{G}_0}{\omega_*} \exp(-\beta t_1) \sin(\omega_* t_1). \quad (6)$$

Враховуючи, що:

$$\sin(\omega_* t_1) = \frac{\omega_*}{\sqrt{\omega_*^2 + \beta^2}},$$

із (6) одержимо формулу максимального переміщення в напрямку дії імпульсу:

$$a_1 = \frac{\mathcal{G}_0}{\sqrt{\omega_*^2 + \beta^2}} \exp(-\beta t_1). \quad (7)$$

Повертаючись у вихідне положення  $x = 0$ , згідно з (3), осцилятор досягне його при  $t = t_{10} = \pi / \omega_*$ . В цей момент часу він матиме швидкість:

$$\dot{x}(t_{10}) = \mathcal{G}_1 = -\mathcal{G}_0 \exp(-\beta t_{10}).$$

Подальший рух осцилятора вниз (зворотний хід) можна описати виведеними формулами, якщо замінити в них:  $\mathcal{G}_0$  на  $\mathcal{G}_1$ , а  $\omega_*$  на  $\omega_{**}$ , де  $\omega_{**} = \sqrt{\frac{c_2}{m} - \beta^2}$ ,  $c_2 = c - \Delta c$ . Тоді розмах коливань осцилятора вниз становитиме:

$$a_2 = \frac{|\mathcal{G}_1|}{\sqrt{\omega_{**}^2 + \beta^2}} \exp(-\beta t_2) = \frac{\mathcal{G}_0}{\sqrt{\omega_{**}^2 + \beta^2}} \exp[-\beta(t_{10} + t_2)], \quad (8)$$

причому:

$$t_2 = \frac{1}{\omega_{**}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega_{**}}{\beta}\right). \quad (9)$$

Враховуючи (7) і (8), маємо наступне відношення розмахів коливань:

$$\alpha = \frac{a_1}{a_2} = \frac{\sqrt{c - \Delta c}}{\sqrt{c + \Delta c}} \exp[\beta(t_{10} + t_2 - t_1)]. \quad (10)$$

Отже, у випадку відсутності сили лінійного в'язкого опору ( $\beta = 0$ ) відношення розмахів  $\alpha < 1$ , тобто буде проявлятися ефект несиметрії силової характеристики. При наявності дисипативної сили відношення  $\alpha$  залежить від коефіцієнта  $\beta$  або  $k$ .

При малих значеннях  $\beta$ , коли  $\beta < \beta_*$ , відношення  $\alpha < 1$ , тобто проявляється ефект несиметрії силової характеристики, а при  $\beta > \beta_*$  – він відсутній. Значення  $\beta_*$  є коренем трансцендентного рівняння:

$$\beta_* = \frac{\ln \frac{c + \Delta c}{c - \Delta c}}{2(t_{10} + t_2 - t_1)}, \quad (11)$$

у якому:

$$t_1 = \frac{1}{\sqrt{\frac{c_1}{m} - \beta_*^2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\frac{c_1}{m} - \beta_*^2}}{\beta_*}; \quad t_{10} = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{c_1}{m} - \beta_*^2}}; \quad t_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{c_2}{m} - \beta_*^2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\frac{c_2}{m} - \beta_*^2}}{\beta_*}. \quad (12)$$

Рівняння (11) можна розв'язати методом ітерацій. Початкові наближення  $t_1$ ,  $t_{10}$  і  $t_2$  досить просто одержати з (12), спрямувавши  $\beta_* \rightarrow 0$ . Тоді:

$$t_1 \approx \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{c_1}}; \quad t_{10} \approx \pi \sqrt{\frac{m}{c_1}}; \quad t_2 \approx \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{c_2}}.$$

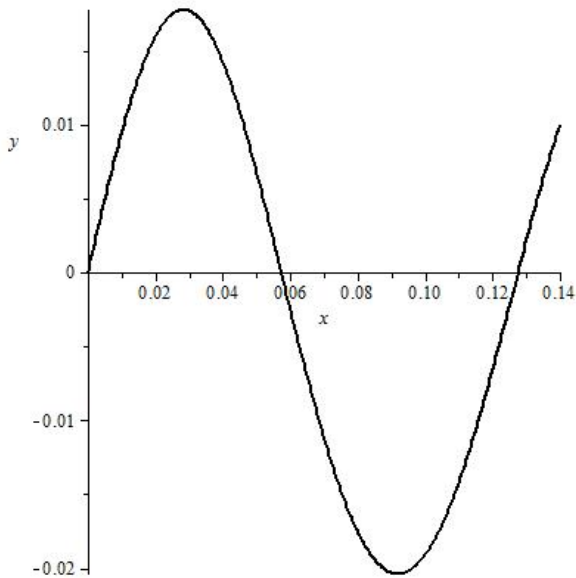
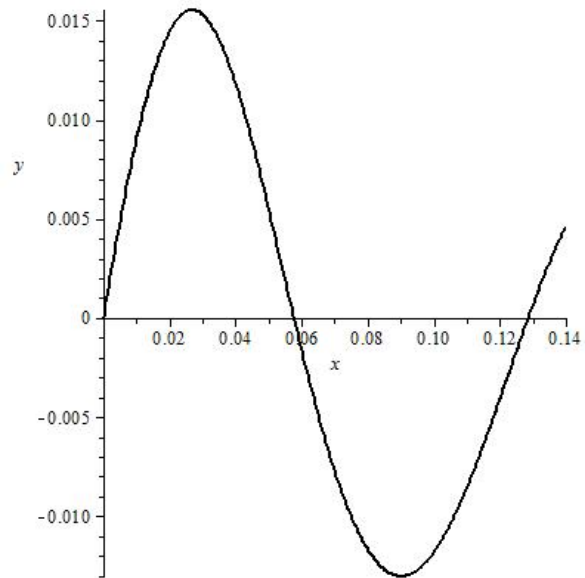
Розглянемо приклад. Для проведення розрахунків приймаємо:  $m = 1 \text{ кг}$ ;  $c = 2500 \text{ Н/м}$ ;  $\Delta c = 500 \text{ Н/м}$ ;  $\mathcal{G}_0 = 1 \text{ м/с}$  і різні значення  $\beta$ . Використовуючи формули (11) і (12), визначаємо  $\beta_*$ . У нульовому наближенні:  $\beta_* \approx 3,178 \text{ с}^{-1}$ . У першому наближенні  $\beta_* \approx 3,197 \text{ с}^{-1}$ . У другому наближенні  $\beta_* \approx 3,197 \text{ с}^{-1}$ . Як бачимо, процес ітерацій має швидку збіжність. Обчислені за формулами (5), (9), (10) відношення  $a_1 / a_2$  для різних  $\beta$  записано в табл. 1.

Таблиця 1 – Значення  $\alpha$  при різних  $\beta$

$\beta$ , $\text{с}^{-1}$	$100a_1$ , м	$100a_2$ , м	$\alpha$
1	1,7747	2,0395	0,870
2	1,7262	1,8619	0,927
3	1,6801	1,7011	0,988
4	1,6361	1,5553	1,052
5	1,5942	1,4228	1,120
6	1,5542	1,3022	1,194

За даними табл. 1 при  $\beta < \beta_*$  проявляється динамічний ефект несиметрії силової характеристики, а при  $\beta > \beta_*$  він відсутній.

Для порівняння на рис. 1 і рис. 2 наведено графіки переміщень осцилятора, відповідно, при  $\beta = 1 \text{ с}^{-1}$  і  $\beta = 6 \text{ с}^{-1}$ . Вони одержані чисельним інтегруванням рівняння (1) на комп'ютері.

Рис. 1 – Графік  $x(t)$  при  $\beta = 1 \text{ с}^{-1}$ .Рис. 2 – Графік  $x(t)$  при  $\beta = 6 \text{ с}^{-1}$ .

Результати, показані на рис. 1 і рис. 2, повністю узгоджуються з тими, що в табл. 1.

**Коливання за наявності сухого тертя.** Коливання за наявності сухого тертя описуємо диференціальним рівнянням:

$$m\ddot{x} + F_T \text{sign}(\dot{x}) + [c + \Delta c \cdot \text{sign}(x)]x = 0, \quad (13)$$

у якому  $F_T$  – сила сухого тертя.

Далі використовуємо розв'язок рівняння (13) за початкових умов (2).

При русі осцилятора вгору до першої зупинки:

$$x(t) = \frac{F_T}{c_1} (\cos(\omega_1 t) - 1) + \frac{g_0}{\omega_1} \sin(\omega_1 t); \quad \dot{x}(t) = g_0 \cdot \cos(\omega_1 t) - \frac{F_T}{c} \omega_1 \sin(\omega_1 t). \quad (14)$$

Тут  $\omega_1 = \sqrt{c_1 / m}$ .

Перша зупинка настає, коли в (14):

$$t = t_1 = \frac{1}{\omega_1} \text{arctg} \frac{c g_0}{\omega_1 F_T}. \quad (15)$$

Підставивши (15) в (14), одержуємо перше максимальне переміщення осцилятора вгору:

$$x(t_1) = a_1 = \sqrt{\left(\frac{g_0}{\omega_1}\right)^2 + \left(\frac{F_T}{c_1}\right)^2} - \frac{F_T}{c_1} = \frac{1}{c_1} \left( \sqrt{c_1 m g_0^2 + F_T^2} - F_T \right). \quad (16)$$

Після зупинки рух осцилятора вниз можливий за умови, що:

$$c_1 a_1 > F_T \quad \text{або} \quad g_0 > \sqrt{3} \frac{F_T}{\sqrt{m c_1}}.$$

При виконанні цієї нерівності рух описується виразом:

$$x(t) = \left( a_1 - \frac{F_T}{c_1} \right) \cos[\omega_1 (t - t_1)] + \frac{F_T}{c_1} \quad (17)$$

і проходить зі швидкістю:

$$\dot{x}(t) = - \left( a_1 - \frac{F_T}{c_1} \right) \omega_1 \sin[\omega_1 (t - t_1)].$$

Осцилятор перейде вихідне положення  $x = 0$  і матиме від'ємні переміщення ( $x < 0$ ), якщо:

$$\frac{1}{2}c_1a_1^2 > F_T a_1 \quad \text{або} \quad g_0 > 2\sqrt{2} \frac{F_T}{\sqrt{mc_1}}.$$

Згідно з (17) нульове положення,  $x(t_{10}) = 0$ , настає при:

$$t = t_{10} = t_1 + \arccos \frac{F_T}{F_T - c_1 a_1}.$$

В цей момент часу швидкість руху становить:

$$\dot{x}(t_{10}) = g_1 = -\sqrt{g_0^2 - \frac{4a_1 F_T}{m}}. \quad (18)$$

По аналогії з (16) розмах осцилятора вниз буде дорівнювати:

$$a_2 = \sqrt{\left(\frac{g_1}{\omega_1}\right)^2 + \frac{F_T}{c_2} - \frac{F_T}{c_2}} = \frac{1}{c_2} \left( \sqrt{c_2 m g_1^2 + F_T^2} - F_T \right), \quad (19)$$

де  $\omega_2 = \sqrt{c_2 / m}$ .

З'ясуємо, якою має бути швидкість  $g_0$ , щоб  $a_2 \geq a_1$ , тобто проявився динамічний ефект несиметрії силової характеристики. Для цього прийемо  $a_1 = a_2 = a$  і використаємо співвідношення:

$$c_1 a^2 + 2a F_T = m g_0^2; \quad c_2 a^2 + 2a F_T = m g_1^2 \quad \text{і} \quad m g_1^2 = m g_0^2 - 4a F_T.$$

Тоді:

$$a = \frac{4F_T}{c_1 - c_2}; \quad g_0 = g_* = \frac{2\sqrt{2}F_T}{\sqrt{m(c_1 - c_2)}} \sqrt{3c_1 - c_2}. \quad (20)$$

Отже, при  $g_0 > g_*$  буде проявлятися ефект несиметрії силової характеристики.

Розглянемо приклад. Для проведення розрахунків задаємо:  $m = 1$  кг;  $c = 2500$  Н/м;  $\Delta c = 500$  Н/м;  $F_T = 4$  Н і різні  $g_0$ . За формулою (20) одержуємо:  $g_* = 0,9466$  м/с. Результати обчислень  $a_1$ ,  $a_2$  та їх відношення  $\alpha = a_1 / a_2$  з використанням (16), (18), (19) записано в табл. 2.

Таблиця 2 – Значення  $\alpha$  при  $F_T = 4$  Н і різних  $g_0$

$g_0$ , м/с	$100a_1$ , м	$100a_2$ , м	$\alpha$
0,5	0,7892	0,6116	1,291
0,8	1,3333	1,2742	1,046
1,0	1,6973	1,7189	1,987
2,0	3,5206	3,9501	0,891
3,0	5,3455	6,1846	0,864
4,0	7,1709	8,4199	0,852

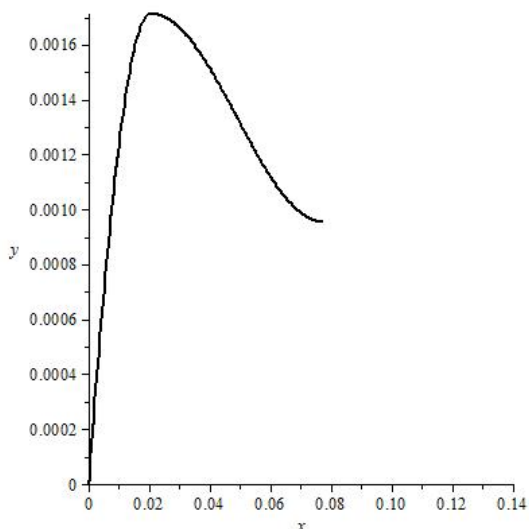


Рис. 3 – Графік  $x(t)$  при  $g_0 = 0,15$  м/с.

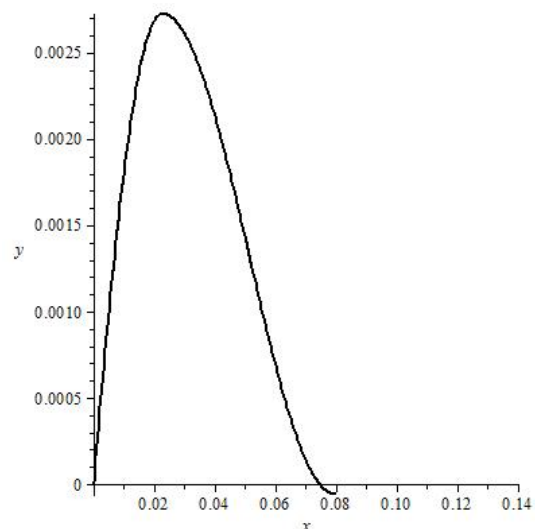
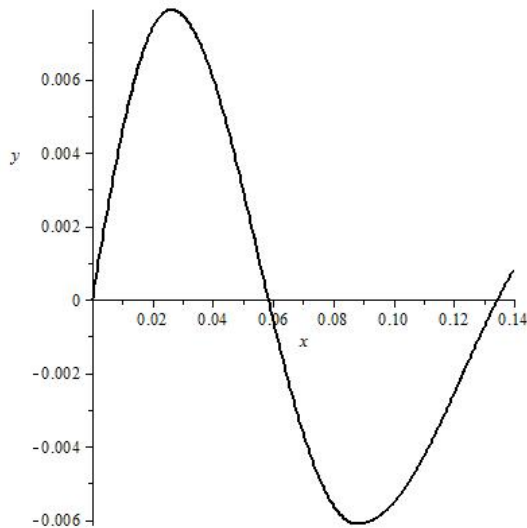
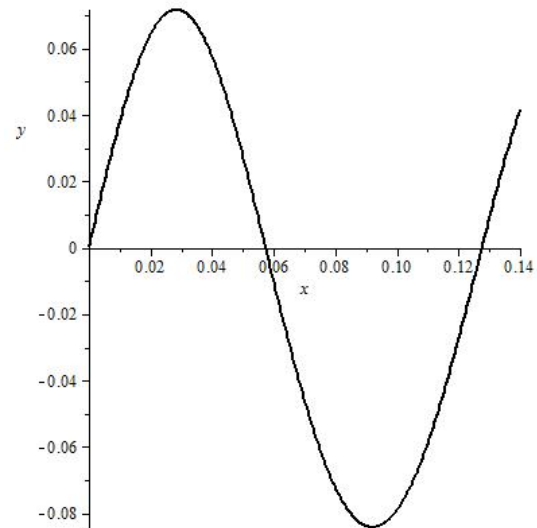


Рис. 4 – Графік  $x(t)$  при  $g_0 = 0,21$  м/с.

Одержані чисельним інтегруванням рівняння (13) графіки переміщень  $x(t)$  подано на рис. 3 – рис. 6, відповідно, при  $\mathcal{G}_0 = 0,15; 0,21; 0,5; 4$  м/с. Для швидкості  $\mathcal{G}_0 = 0,15$  м/с на графіку немає від'ємних переміщень, а при  $\mathcal{G}_0 = 0,21$  м/с вони малі, порівняно з додатними переміщеннями у напрямку дії імпульсу сили. Розмахи коливань на рис. 5 і рис. 6 такі, як в табл. 2, що підтверджує адекватність розрахункових формул.

Рис. 5 – Графік  $x(t)$  при  $\mathcal{G}_0 = 0,5$  м/с.Рис. 6 – Графік  $x(t)$  при  $\mathcal{G}_0 = 4$  м/с.

**Коливання при наявності позиційного тертя.** Позиційне тертя виникає в пружних елементах ресорного типу [15, 16]. Рух системи з одним ступенем вільності описується диференціальним рівнянням:

$$m\ddot{x} + [c + \Delta c \cdot \text{sign}(x) + \Delta c_* \cdot \text{sign}(x) \cdot \text{sign}(\dot{x})]x = 0, \quad (21)$$

де  $c$ ,  $\Delta c$  і  $\Delta c_*$  – константи жорсткості силової характеристики, причому третя ( $\Delta c_*$ ) з них стосується позиційного тертя.

Якщо не цікавитись процесом руху в часі, то екстремальні переміщення можна визначити із енергетичних співвідношень, не розв'язуючи диференціального рівняння (21), за початкових умов (2).

Такими енергетичними співвідношеннями є:

$$m\mathcal{G}_0^2 = c_3 \cdot a_1^2; \quad m\mathcal{G}_0^2 = c_4 \cdot a_1^2; \quad c_4 \cdot a_1^2 = c_5 \cdot a_2^2. \quad (22)$$

Тут  $c_3 = c + \Delta c + \Delta c_*$ ;  $c_4 = c + \Delta c - \Delta c_*$ ;  $c_5 = c - \Delta c + \Delta c_*$ .

Співвідношення (22), відповідно, виражають баланс енергії при переході осцилятора з положення  $x = 0$  в положення  $x = a_1$ , з положення  $x = a_1$  в положення  $x = 0$  і з положення  $x = 0$  в положення  $|x| = a_2$ .

Із (22) випливає, що перший розмах коливань становить:

$$a_1 = \mathcal{G}_0 \sqrt{\frac{m}{c_3}},$$

а другий розмах коливань дорівнює:

$$a_2 = a_1 \sqrt{\frac{c_4}{c_5}}.$$

Отже, ефект несиметрії силової характеристики проявляється коли:

$$c_4 > c_5 \quad \text{або} \quad \Delta c - \Delta c_* > \Delta c_* - \Delta c,$$

що зводиться до нерівності:

$$\Delta c > \Delta c_*. \quad (23)$$

Обчислимо екстремальні переміщення осцилятора, в якого:  $m = 1$  кг;  $c = 2500$  Н/м;  $\Delta c = 500$  Н/м;  $\Delta c_* = 100$  Н/м при  $\mathcal{G}_0 = 2$  м/с. При таких вихідних даних:  $c_4 = 2900$  Н/м;  $c_5 = 2100$  Н/м. За наведеними вище формулами одержуємо:  $a_1 \approx 0,03714$  м;  $a_2 \approx 0,04364$  м. Тут  $\Delta c > \Delta c_*$ ,  $a_2 > a_1$ , тобто має місце динамічний ефект несиметрії силової характеристики. Для порівняння поміняємо значення  $\Delta c$  і  $\Delta c_*$ , задавши  $\Delta c = 100$  Н/м,  $\Delta c_* = 500$  Н/м. Тепер  $c_4 = 2100$  Н/м, а  $c_5 = 2900$  Н/м. Для них  $a_2 \approx 0,085a_1$ . Другий розмах менший першого.

Позиційне тертя усунуло динамічний ефект несиметрії силової характеристики, який проявляється за умови (23), незалежно від значення  $\mathcal{G}_0$ .

**Коливання за наявності квадратичного в'язкого опору.** Коливання за наявності квадратичного в'язкого опору описуємо диференціальним рівнянням:

$$m\ddot{x} + \mu|\dot{x}|\dot{x} + (c + \Delta c \cdot \text{sign}(x))x = 0, \quad (24)$$

де  $\mu$  – коефіцієнт квадратичного опору.

Рівняння (24) розв'язуємо при за початкових умов (2).

Переходом до нової змінної  $y = \dot{x}^2$  рівнянню (24), на початку руху, коли  $x \geq 0$ ,  $\dot{x} \geq 0$ , надаємо вигляд:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2\mu}{m}y + \frac{2c_1}{m}x = 0.$$

Його розв'язок подається виразом:

$$y(x) = \left( \mathcal{G}_0^2 - \frac{mc_1}{2\mu^2} \right) \exp\left( -\frac{2\mu}{m}x \right) + \frac{1}{\mu} \left( \frac{mc_1}{2\mu} - c_1x \right), \quad (25)$$

що задовольняє умовам (2).

В момент першої зупинки осцилятора, при  $x = a_1$ , маємо рівняння  $y(a_1) = 0$ , яке з урахуванням (25), набуває форму:

$$\left( \mathcal{G}_0^2 - \frac{mc_1}{2\mu} \right) \exp\left( -\frac{2\mu}{m}a_1 \right) + \frac{1}{\mu} \left( \frac{mc_1}{2\mu} - c_1a_1 \right) = 0.$$

Після елементарних перетворень замість нього отримуємо:

$$\left( 1 - \frac{2\mu a_1}{m} \right) = \frac{1}{e} \left( 1 - \frac{2\mu^2 \mathcal{G}_0^2}{mc_1} \right) \exp\left( 1 - \frac{2\mu}{m}a_1 \right). \quad (26)$$

Далі будемо розрізняти три випадки співвідношення другого множника в правій частині та показника експоненти.

а) У випадку коли:

$$1 - \frac{2\mu^2 \mathcal{G}_0^2}{mc_1} > 0, \quad 1 - \frac{2\mu a_1}{m} > 0.$$

Тоді введенням позначень:

$$f = 1 - \frac{2\mu}{m}a_1; \quad \xi = 1 - \ln\left( 1 - \frac{2\mu^2 \mathcal{G}_0^2}{mc_1} \right), \quad (27)$$

рівнянню (26) надаємо компактний вигляд:

$$f - \ln f = \xi.$$

Аналітичний розв'язок цього рівняння виражається через першу гілку двохзначної функції Ламберта від'ємного аргументу  $W_1(-z)$  [18, 19]. Тому:

$$f = -W_1[-\exp(-\xi)],$$

що приводить до наступної формули першого розмаху коливань:

$$a_1 = \frac{m}{2\mu} \left\{ 1 + W_1[-\exp(-\xi)] \right\}. \quad (28)$$

б) У випадку коли:

$$1 - \frac{2\mu^2 \mathcal{G}_0^2}{mc_1} = 0; \quad 1 - \frac{2\mu a_1}{m} = 0.$$

Звідки випливає, що:

$$a_1 = \frac{m}{2\mu}.$$

в) Третій випадок маємо за «великого» добутку  $\mu \cdot \mathcal{G}_0$ . Для нього:

$$1 - \frac{2\mu^2 \mathcal{G}_0^2}{mc_1} < 0; \quad 1 - \frac{2\mu}{m}a_1 < 0.$$

Уведенням позначень:

$$\varphi = \frac{2\mu}{m} a_1 - 1; \quad \eta = \ln \left( \frac{2\mu^2 \mathcal{G}_0^2}{mc_1} - 1 \right) - 1,$$

рівнянню (26) надаємо вигляд:

$$\varphi + \ln \varphi = \eta.$$

Розв'язок цього рівняння виражається через функцію Ламберта додатного аргументу  $W(z)$  [17, 18]. Тому:

$$\varphi = W(\exp(\eta))$$

і в підсумку обчислення  $a_1$  зводимо до формули:

$$a_1 = \frac{m}{2\mu} [1 + W(\exp(\eta))]. \quad (29)$$

Зазначимо, що таблиці функції Ламберта надруковано в [19, 20]. Крім того, в [21] виведено компактні асимптотичні формули, які з похибкою меншою 1 % виражають цю спеціальну функцію через елементарні функції. Графік та деякі властивості функції Ламберта наведено також в [22, 23, 24]. Отже, обчислення  $a_1$  не викликає ускладнень.

Подальший рух осцилятора, після першої зупинки, коли  $x \geq 0$ ,  $\dot{x} \leq 0$ , описуємо рівнянням:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2\mu}{m} y + \frac{2c_1}{m} x = 0,$$

з початковою умовою  $y(a_1) = 0$ .

Розв'язок цієї задачі Коші має вигляд:

$$y(x) = \frac{1}{\mu} \left( \frac{mc_1}{2\mu} + c_1 x \right) - \frac{1}{\mu} \left( \frac{mc_1}{2\mu} + c_1 a_1 \right) \exp \left[ \frac{2\mu}{m} (x - a_1) \right].$$

Задавши в ньому  $x = 0$ , одержуємо формулу швидкості  $\mathcal{G}_1$ , з якою осцилятор повертається у вихідне положення:

$$\mathcal{G}_1 = -\sqrt{y(0)} = - \left[ \frac{mc_1}{2\mu^2} - \frac{1}{\mu} \left( \frac{mc_1}{2\mu} + c_1 a_1 \right) \exp \left( -\frac{2\mu}{m} a_1 \right) \right]^{1/2}. \quad (30)$$

Для обчислення другого розмаху коливань  $a_2$  далі можна знову використати формули, виведені для  $a_1$ , помінявши в них  $a_1$  на  $a_2$ ,  $\mathcal{G}_0$  на  $\mathcal{G}_1$  і  $c_1$  на  $c_2$ .

Будемо теж розрізняти три випадки:

а) якщо  $1 - \frac{2\mu^2 \mathcal{G}_1^2}{mc_2} > 0$ , то обчислення  $a_2$  можна проводити за формулою (28), але тепер у ній:

$$\xi = 1 - \ln \left( 1 - \frac{2\mu^2 \mathcal{G}_1^2}{mc_2} \right); \quad (31)$$

б) у другому випадку:  $1 - \frac{2\mu^2 \mathcal{G}_1^2}{mc_2} = 0$  або  $\mathcal{G}_1 = \frac{1}{\mu} \sqrt{\frac{mc_2}{2}}$ . Тоді:

$$a_2 = \frac{m}{2\mu};$$

в) для третього випадку, коли  $1 - \frac{2\mu^2 \mathcal{G}_1^2}{mc_2} < 0$ , обчислення  $a_2$  зводиться до формули (29), але тепер у ній:

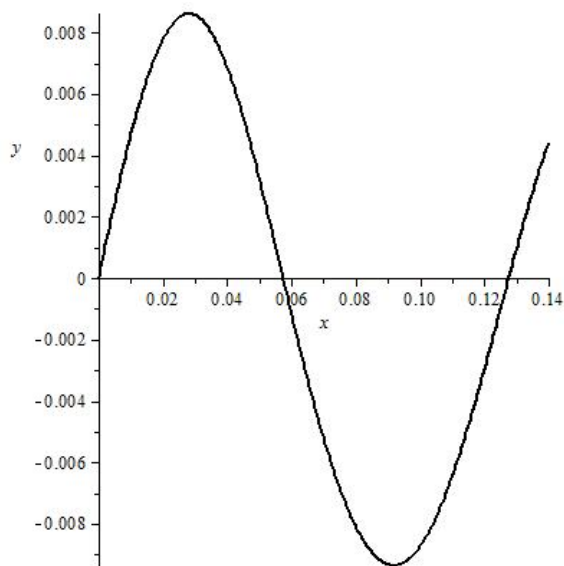
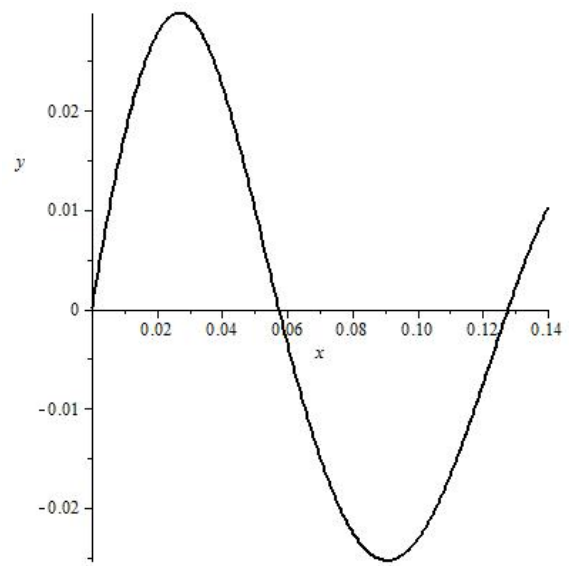
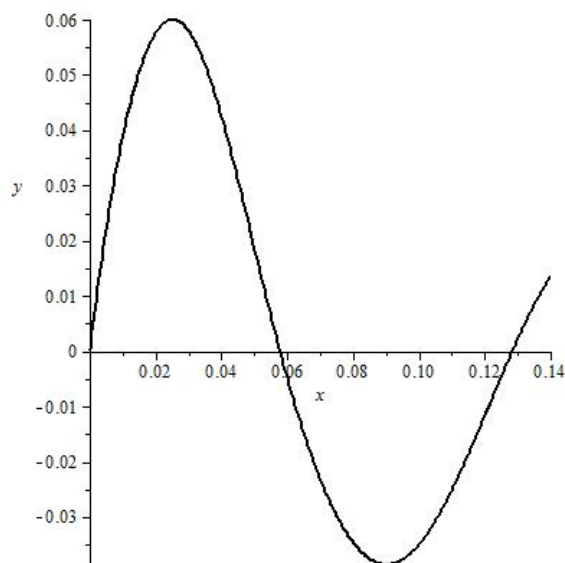
$$\eta = \ln \left( \frac{2\mu^2 \mathcal{G}_1^2}{mc_2} - 1 \right) - 1.$$

Таким чином, є можливість порівняти розмахи  $a_1$  і  $a_2$ , щоб установити наявність або відсутність динамічного ефекту несиметрії силової характеристики.

Розглянемо приклад. Задавши  $m = 1$  кг;  $c_1 = 3000$  Н/м;  $c_2 = 2000$  Н/м;  $\mu = 10$  Нс<sup>2</sup>/м<sup>2</sup>, при  $\mathcal{G}_0 = 0,5$  м/с; за формулами (27), (28) знаходимо:  $\xi \approx 1,016807$ ;  $\exp(-\xi) \approx 0,36175$ ;  $W_1(-0,36175) \approx -0,8277$ ;  $a_1 \approx 0,008615$  м.



Згідно з (30) для такого значення  $a_1$  квадрат швидкості становить  $\mathcal{A}_1^2 \approx 0,19866 \text{ м}^2/\text{с}^2$  і підстановка його в (31) дає:  $\xi \approx 1,020066$ ;  $\exp(-\xi) \approx 0,36057$ . Тоді  $W_1(-0,36057) \approx -0,8128$  і за формулою (28)  $a_2 \approx 0,00936 \text{ м}$ . У ході обчислень наближені значення функції Ламберта одержували лінійною інтерполяцією табличних даних в [20]. При  $\mathcal{D}_0 = 0,5 \text{ м/с}$  розрахунки підтвердили наявність динамічного ефекту несиметрії силової характеристики, бо  $a_2 > a_1$ . З'ясуємо, чи буде проявлятися цей ефект, коли  $\mathcal{D}_0 = 2 \text{ м/с}$ . При такій початковій швидкості за формулами (27), (28) одержуємо:  $\xi \approx 1,310155$ ;  $\exp(-\xi) \approx 0,26978$ ;  $W_1(-0,26978) \approx -0,4042$ ;  $a_1 \approx 0,02979 \text{ м}$ . Для такого розмаху, згідно з (30),  $\mathcal{A}_1^2 \approx 1,8078 \text{ м}^2/\text{с}^2$ . Підстановка цього значення  $\mathcal{A}_1^2$  в (31) дає:  $\xi \approx 1,19940$ ;  $\exp(-\xi) \approx 0,30137$ ;  $W_1(-0,30137) \approx -0,4938$  і за формулою (28)  $a_2 \approx 0,02531 \text{ м}$ . Як бачимо, при  $\mathcal{D}_0 = 2 \text{ м/с}$   $a_2 < a_1$ , тобто динамічний ефект несиметрії не проявляється. Він не проявляється і при більших  $\mathcal{D}_0$ . Наприклад, при  $\mathcal{D}_0 = 5 \text{ м/с}$ , розрахунки, аналогічні викладеним, дають:  $a_1 \approx 0,06003 \text{ м}$ ;  $a_2 \approx 0,03859 \text{ м}$ . Отже, при зростанні швидкості руху квадратичний в'язкий опір усуває ефект несиметрії силової характеристики. Правильність аналітичних формул і одержаних за ними числових результатів підтверджують графіки переміщень осцилятора на рис. 7, рис. 8 і рис. 9, одержані чисельним інтегруванням рівняння (24) на комп'ютері.

Рис. 7 – Графік  $x(t)$  при  $\mathcal{D}_0 = 0,5 \text{ м/с}$ , при  $\mu = 10 \text{ Нс}^2/\text{м}^2$ .Рис. 8 – Графік  $x(t)$  при  $\mathcal{D}_0 = 2 \text{ м/с}$ , при  $\mu = 10 \text{ Нс}^2/\text{м}^2$ .Рис. 9 – Графік  $x(t)$  при  $\mathcal{D}_0 = 5 \text{ м/с}$ , при  $\mu = 10 \text{ Нс}^2/\text{м}^2$ .

**Перспективи подальших досліджень.** Вище розглядали вплив окремих сил опору на динаміку імпульсно навантаженого осцилятора з несиметричною характеристикою пружності. За аналогією можна розглядати і їх спільний вплив, як це робили в [25, 26] при дослідженні вільних коливань осциляторів з лінійною характеристикою пружності.

**Висновки.** Проведене математичне моделювання показало, що динамічний ефект несиметрії силової характеристики імпульсного навантаження осцилятора може проявлятися і за наявності дисипативних сил різної природи. В роботі встановлено умови прояву названого ефекту при дії сили лінійного або квадратичного в'язкого опору, а також при дії сили сухого або позиційного тертя. Показано, що збільшення цих сил усуває згаданий ефект. Адекватність аналітичних розв'язків підтверджена збіжністю результатів, до яких вони приводять, з результатами чисельного комп'ютерного інтегрування диференціального рівняння руху.

#### Список літератури

1. Головка К. Г., Луговой П. З., Мейш В. Ф. Динамика неоднородных оболочек при нестационарных нагрузках. – Киев : Изд-во полиграфический центр Киевского университета, 2012. – 541 с.
2. Луговой П. З., Мейш В. Ф., Штанцель Э. Ф. Нестационарная динамика оболочечных конструкций. – Киев : Изд-во полиграфический центр «Киевский университет», 2005. – 536 с.
3. Ольшанский В. П., Тищенко Л. Н., Ольшанский С. В. Колебания стержней и пластин при механическом ударе. – Харьков : Мис'кдрук, 2012. – 320 с.
4. Сметанкина Н. В. Нестационарное деформирование, термоупругость и оптимизация многослойных пластин и цилиндрических оболочек. – Харьков : Мис'кдрук, 2011. – 376 с.
5. Воропай А. В. Интегральные уравнения Вольтерра в некорректных задачах нестационарного деформирования пластин. – Харьков : Лидер, 2018. – 214 с.
6. Янютин Е. Г., Янчевский И. В., Воропай А. В., Шараната А. С. Задачи импульсного деформирования элементов конструкций. – Харьков : ХНАДУ, 2004. – 392 с.
7. Янютин Е. Г., Воропай А. В., Поваляев С. И., Янчевский И. В. Идентификация нагрузок при импульсном деформировании тел : в 2-х частях. Часть 2. – Харьков : ХНАДУ, 2010. – 212 с.
8. Аврамов К. В., Михлин Ю. В. Нелинейная динамика упругих систем. Модели, методы, явления : в 2 т. – Москва – Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2015. – Т. 1. – 716 с.
9. Василенко М. В., Алексейчук О. М. Теория колебаний і стійкості руху. – Київ : Вища школа, 2004. – 525 с.
10. Блехман И. И. Вибрации в технике. Справочник в шести томах. Т. 2. Колебания нелинейных механических систем. – Москва : Машиностроение, 1979. – 351 с.
11. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – Москва : Наука, 1974. – 504 с.
12. Лурье А. И., Чекмарев А. И. Вынужденные колебания в нелинейной системе с характеристикой, составленной из прямолинейных отрезков // Прикладная математика и механика. – 1938. – Т. 1. – № 3.
13. Ольшанский В. П., Ольшанский С. В. Про динамічний ефект несиметрії силової характеристики коливальної системи при імпульсному навантаженні // Вісник НТУ «ХП». Серія : Динаміка і міцність машин. – Харків : НТУ «ХП», 2018. – № 33 (1309). – С. 33 – 36.
14. Ольшанский В. П., Ольшанский С. В. Про ефект несиметрії силової характеристики коливальної системи при механічному ударі // Вибрації в техніці та технологія : Всеукраїнський науково-технічний журнал. – 2018. – № 2 (89). – С. 36 – 40.
15. Бидерман В. Л. Теория механических колебаний. – Москва : Высшая школа, 1980. – 408 с.
16. Сурьянинов Н. Г., Дащенко А. Ф., Белоус П. А. Теоретические основы динамики машин. – Одесса : ОГПУ, 2000. – 306 с.
17. Corless R. M., Gonnet G. H., Hare D. E. G. On the Lambert W Function // Advances in Computational Math. – 1996. – V. 5. – P. 329 – 359.
18. Farial Shafee. Lambert function and new-extensive form of entropy // IMA Journal of Applied Mathematics. – 2007. – V. 72. – P. 785 – 800.
19. Ольшанский В. П., Ольшанский С. В. Функция Ламберта в задачах баллистики материальной точки. – Харьков : Издатель Савчук А. О., 2013. – 204 с.
20. Ольшанский В. П., Сліпченко М. В., Сполярнік О. І., Бурака В. В. Нелінійні коливання дисипативних осциляторів. – Харків : Мис'кдрук, 2020. – 268 с.
21. Ольшанский В. П. Про апроксимацію функції Ламберта // Вісник НТУ «ХП». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологія. – Харків : НТУ «ХП», 2020. – № 1 (1355). – С. 64 – 69.
22. Боровин Г. К., Дягель Р. В., Лапшин В. В. Нелинейная вязкоупругая модель коллинеарного удара // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. – Москва : ИПМ, 2008. – № 53. – 18 с.
23. Дягель Р. В., Лапшин В. В. О нелинейной вязкоупругой модели коллинеарного удара Ханта-Кроссли // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2011. – № 5. – С. 164 – 173.
24. Боровин Г. К., Лапшин В. В. Обобщенная модель удара Герца-Ханта-Кроссли // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Серия : Естественные науки. – 2018. – № 6. – С. 18 – 30. – DOI : 10.18698/1812-3368.
25. Бабаков И. М. Теория колебаний. – Москва : Дрофа, 2004. – 591 с.
26. Ольшанский В. П., Ольшанский С. В., Тищенко Л. М. Динаміка дисипативних осциляторів. – Харків : Мис'кдрук, 2016. – 264 с.

#### References (transliterated)

1. Golovko K. G., Lugovoy P. Z., Meysh V. F. *Dinamika neodnorodnykh obolochek pri nestatsionarnykh nagruzkakh* [Dynamics of heterogeneous shells under non-stationary loading]. Kiev, Izd-vo poligraficheskiiy tsentr kievskogo universiteta Publ., 2012. 541 p.
2. Lugovoy P. Z., Meysh V. F., Shtantsel' E. F. *Nestatsionarnaya dinamika obolochechnykh konstruktсий* [Non-stationary dynamics of shell structures]. Kiev, Izd-vo poligraficheskiiy tsentr «Kievskiy universitet» Publ., 2005. 536 p.
3. Ol'shanskiy V. P., Tishhenko L. N., Ol'shanskiy S. V. *Kolebaniya stержney i plastin pri mekhnicheskom udare* [Vibrations of rods and plates under mechanical impact]. Kharkiv, Mis'kdruk Publ., 2012. 320 p.
4. Smetankina N. V. *Nestatsionarnoye deformirovaniye, termouprugost' i optimizatsiya mnogoslonykh plastin i tsilindricheskikh obolochek* [Unsteady deformation, thermoelasticity and optimization of multilayer plates and cylindrical shells]. Kharkiv, Mis'kdruk Publ., 2011. 376 p.
5. Voropay A. V. *Integral'nye uravneniya Vol'terra v nekorrektnykh zadachakh nestatsionarnogo deformirovaniya plastin* [Volterra integral equations in some problems of non-stationary deformation of plates]. Kharkov, Lider Publ., 2018. 214 p.

6. Yanyutin E. G., Yanchevskiy I. V., Voropay A. V., Sharapata A. S. *Zadachi impul'snogo deformirovaniya elementov konstruksiy* [Problems of impulse deformation of structural elements]. Kharkov, HNADU PUBL., 2004. 392 p.
7. Yanyutin E. G., Voropay A. V., Povalyaev S. I., Yanchevskiy I. V. *Identifikatsiya nagruzok pri impul'snom deformirovanii tel : v 2-kh chastyakh. Chast'2* [Load identification during pulse deformation of solids: in 2 parts. Part 2]. Kharkov, HNADU PUBL., 2010. 212 p.
8. Avramov K. V., Mikhlin Yu. V. *Nelineynaya dinamika uprugikh system. Modeli, metody, yavleniya : v 2 t* [Nonlinear dynamics of elastic systems. Models, methods, phenomena: in 2 vol.]. Moscow – Izhevsk, Institute komp'yuternykh issledovaniy Publ., 2015, vol. 1. 716 p.
9. Vasilenko M. V., Alekseychuk O. M. *Teoriya kolyvan' i stiykosti rukhu* [Theory of oscillations and stability of motion]. Kiev, Vyssha shkola Publ., 2004. 525 p.
10. Blekhman I. I. *Vibratsii v tekhnike. Spravochnik v shesti tomakh. T. 2. Kolebaniya nelineynykh mekhanicheskikh sistem* [Vibrations in technics. Handbook in 6 vol. Vol. 2. Vibrations of non-linear mechanical systems]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1979. 351 p.
11. Bogolyubov N. N., Mitropol'skiy Yu. A. *Asimptoticheskiye metody v teorii nelineynykh kolebaniy* [Asymptotic methods in the theory of nonlinear oscillations]. Moscow, Nauka Publ., 1974. 504 p.
12. Lur'e A. I., Chekmaryev A. I. *Vynuzhdennye kolebaniya v nelineynoy sisteme s kharakteristikoy, sostavlennoy iz pryamolineynykh otrezkov* [Forced vibrations in a system with characteristic given by system of line segments]. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied mathematics and mechanics]. 1938, vol. 1, no. 3.
13. Ol'shans'kyy V. P., Ol'shans'kyy S. V. Pro dynamichnyy efekt nesymetriyi sylovoyi kharakterystyky kolyval'noyi systemy pry impul'snomu navantazhenii [About the dynamic effect of non-symmetry of power characteristic of an oscillating system under a pulse]. *Visnyk Natsional'noho tekhnichnoho universytetu «KhPI». Seriya : Dynamika i matsnist' mashyn* [Bulletin of the NTU "KhPI". Series : Dynamics and strength of machines]. Kharkiv, NTU "KhPI" Publ., 2018, no. 33 (1309), pp. 33–36.
14. Ol'shans'kyy V. P., Ol'shans'kyy S. V. Pro efekt nesymetriyi sylovoyi kharakterystyky kolyval'noyi systemy pry mekhanichnomu udari [On the effect of non-symmetry of power characteristic of vibration system under force impact]. *Vibratsiyi v tekhnitsi ta tekhnologiyakh : Vseukrayins'kyy naukovo-tekhnichnyy zhurnal* [Vibration in engineering and technology : all-Ukrainian scientific and technical journal]. 2018, no. 2 (89), pp. 36–40.
15. Biderman V. L. *Teoriya mekhanicheskikh kolebaniy* [Theory of mechanical vibrations]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1980. 408 p.
16. Sur'yaninov N. G., Dashhenko A. F., Belous P. A. *Teoreticheskie osnovy dinamiki mashin* [Theoretical bases of machine dynamics]. Odessa, OGPU Publ., 2000. 306 p.
17. Corless R. M., Gonnet G. H., Hare D. E. G. On the Lambert W Function. *Advances in Computational Math.* 1996, vol. 5, pp. 329–359.
18. Farial Shafee. Lambert function and new-extensive form of entropy. *IMA Journal of Applied Mathematics.* 2007, vol. 72, pp. 785–800.
19. Ol'shanskiy V. P., Ol'shanskiy S. V. *Funktsiya Lambert v zadachakh ballistiki material'noy tochki* [Lambert function in ballistics problems of a material point]. Kharkov, Izdatel' Savchuk A.O. Publ., 2013. 204 p.
20. Ol'shans'kyy V. P., Slipchenko M. V., Spol'nik O. I., Burlaka V. V. *Nelineyni kolyvannya dysypatyvnykh ostsyl'yatoriv* [Non-linear oscillations of dissipative oscillators]. Kharkiv, Mis'kdruk Publ., 2020. 268 p.
21. Ol'shans'kyy V. P. Pro aproksymatsiyu funktsiyi Lambert [On the approximation of the Lambert function]. *Visnyk Natsional'noho tekhnichnoho universytetu «KhPI». Seriya : Matematichne modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series : Mathematical modeling in engineering and technology]. Kharkiv, NTU "KhPI" Publ., 2020, no. 1 (1355), pp. 64–69.
22. Borovin G. K., Dyagel' R. V., Lapshin V. V. *Nelineynaya vyazkoprugaya model' kollinearnogo udara* [Non-linear viscoelastic collinear impact model]. *Preprinty IPM im. M.V. Keldysha* [Preprints of the Keldysh Institute of Applied Mathematics]. Moscow, IPM Publ., 2008, no. 53, 18 p.
23. Dyagel' R. V., Lapshin V. V. *O nelineynoy vyazkoprugoy modeli kollinearnogo udara Khanta-Krossli* [On the nonlinear viscoelastic model of a Hunt-Crossley collinear impact]. *Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela* [Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Solid mechanics]. 2011, no. 5, pp. 164–173.
24. Borovin G. K., Lapshin V. V. *Obobshchennaya model' udara Gerts-Khanta-Krossli* [Generalized model of the Hertz-Hunt-Crossley hit]. *Vestnik MGTU im. N. E. Baumana. Seriya : Estestvennye nauki* [Herald of the Bauman Moscow State University. Series : Natural Sciences]. 2018, no. 6, pp. 18–30. DOI: 10.18698/1812-3368.
25. Babakov I. M. *Teoriya kolebaniy* [Theory of fluctuations]. Moscow, Drofa Publ., 2004. 591 p.
26. Ol'shans'kyy V. P., Ol'shans'kyy S. V., Tishhenko L. M. *Dynamika dysypatyvnykh ostsyl'yatoriv* [Dynamics of dissipative oscillators]. Kharkiv, Mis'kdruk Publ., 2016. 264 p.

Надійшло (received) 19.02.2021

## Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

**Ольшанський Василь Павлович** – доктор фізико-математичних наук, професор, Харківський національний технічний університет сільського господарства імені П. Василенка, м. Харків; тел.: (066) 010-09-55; e-mail: OlshanskiyVP@gmail.com.

**Ольшанский Василий Павлович** – доктор физико-математических наук, профессор, Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства имени П. Василенка, г. Харьков; тел.: (066) 010-09-55; e-mail: OlshanskiyVP@gmail.com.

**Olshanskiy Vasilij Pavlovich** – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Petro Vasylenko Kharkiv National Technical University of Agriculture, Kharkiv; tel.: (066) 010-09-55; e-mail: OlshanskiyVP@gmail.com.

**Ольшанський Станіслав Васильович** – кандидат фізико-математичних наук, Харківський національний технічний університет сільського господарства імені П. Василенка, м. Харків; тел.: (057) 343-29-41; e-mail: stasolsh77@gmail.com.

**Ольшанский Станислав Васильевич** – кандидат физико-математических наук, Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства имени П. Василенка, г. Харьков; тел.: (057) 343-29-41; e-mail: stasolsh77@gmail.com.

**Olshanskiy Stanislav Vasilevich** – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Petro Vasylenko Kharkiv National Technical University of Agriculture, Kharkiv; tel.: (057) 343-29-41; e-mail: stasolsh77@gmail.com.