

О. В. МЕНЬШИКОВ, В. О. МЕНЬШИКОВ, О. Ю. КЛАДОВА

НЕЛИНІЙНА ЗАДАЧА МЕХАНІКИ РУЙНУВАННЯ ДЛЯ БІМАТЕРІАЛА З МІЖФАЗНОЮ ТРІЩИНОЮ ПІД ДІЄЮ ХВИЛІ ЗСУВУ

Розглядається лінійна тріщина між двома різними пружними ізотропними півпросторами при нормально напрямленому гармонічному зсувному навантаженні з урахуванням контактної взаємодії протилежних берегів тріщини. Задача вирішується методом граничних інтегральних рівнянь, а складові розв'язку представлені рядами Фур'є. Контактні обмеження виражено односторонніми обмеженнями Сінйоріні, а саме забезпечується відсутність взаємопроникнення протилежних берегів тріщини, причому нормальна складова сили контакту одностороння і присутня лише в зоні контакту. Закон кулонівського тертя дозволяє враховувати або відносний покій протилежних граней тріщини в тангенціальній площині, доки вони утримуються силою тертя, або їх рух під час ковзання. Врахування контактних обмежень реалізовано за допомогою алгоритму ітераційної корекції на основі ортогональних проєкцій на множини обмежень. Адекватність математичної моделі перевіряється шляхом порівняння з класичними модельними розв'язками, отриманими для статичних задач з контактної взаємодії берегів. Виконано чисельні розрахунки, що демонструють вплив тертя на розподіл переміщень і контактних сил, а також на розмір зони контакту. Представлено та проаналізовано вплив контакту берегів і значення коефіцієнта тертя на розподіл коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН) нормального розриву та поперечного зсуву, які є параметрами руйнування біматеріалу. Показано, що характер зміни розподілів КІН для умов навантаження хвилями розтягу та зсуву відрізняється принципово. Зроблено висновок про можливість поширення запропонованого підходу на проблеми тривимірної механіки руйнування для композитів з міжфазними тріщинами при довільному динамічному навантаженні.

Ключові слова: міжфазна тріщина, навантаження біматеріалу, гармонічна зсувна хвиля, контакт берегів з тертям, граничні інтегральні рівняння, ряди Фур'є, механіка руйнування.

A. V. MENSHYKOV, V. O. MENSHYKOV, O. YU. KLADOVA

НЕЛИНІЙНАЯ ЗАДАЧА МЕХАНИКИ РАЗРУШЕНИЯ ДЛЯ БИМАТЕРИАЛА С МЕЖФАЗНОЙ ТРЕЩИНОЙ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВОЛНЫ СДВИГА

Рассматривается линейная трещина между двумя разными упругими изотропными полупространствами при нормально направленной гармонической сдвиговой нагрузке с учетом контактного взаимодействия противоположных берегов трещины. Задача решается методом предельных интегральных уравнений, а составляющие решения представлены рядами Фурье. Контактные ограничения выражены односторонними ограничениями Синьорини, а именно обеспечивается отсутствие взаимопроникновения противоположных берегов трещины, причем нормальная составляющая силы контакта односторонняя и присутствует только в зоне контакта. Закон кулоновского трения позволяет учитывать либо относительный покой противоположных граней трещины в тангенциальной плоскости, пока они удерживаются силой трения, либо их движение во время скольжения. Учет контактных ограничений реализован с помощью алгоритма итерационной коррекции на основе ортогональных проекций на множество ограничений. Адекватность математической модели проверяется путем сравнения с классическими модельными решениями, полученными для статических задач по контактному взаимодействию берегов. Выполнены численные расчеты, демонстрирующие влияние трения на распределение перемещений и контактных сил, а также на размер зоны контакта. Представлено и проанализировано влияние контакта берегов, и значение коэффициента трения на распределение коэффициентов интенсивности напряжений (КИН) нормального разрыва и поперечного сдвига, которые являются параметрами разрушения биматериала. Показано, что характер изменения распределений КИН для условий нагрузки волнами растяжения и смещения отличается принципиально. Сделан вывод о возможности распространения предлагаемого подхода на проблемы трехмерной механики разрушения для композитов с межфазными трещинами при произвольной динамической нагрузке.

Ключевые слова: межфазная трещина, нагрузка биматериала, гармоническая сдвиговая волна, контакт берегов с трением, граничные интегральные уравнения, ряды Фурье, механика разрушения.

O. V. MENSHYKOV, V. O. MENSHYKOV, O. YU. KLADOVA

NONLINEAR PROBLEM OF FRACTURE MECHANICS OF AN INTERFACE CRACK SUBJECTED TO SHEAR WAVE

Solution for the problem for an interface crack under the action of a harmonic shear wave in normal direction is presented. The contact of the crack faces is put into consideration. The problem is solved by the boundary integral equations method, the vector components in the boundary integral equations are presented by Fourier series. The unilateral Signorini boundary conditions are involved to prevent the interpenetration of the crack faces and the emergence of tensile forces in the contact zone. Amonton-Coulomb Friction Law included allows to put into consideration relative resting of the crack opposite faces or their relative motion when one crack face is slipping or sliding across another face. The contact boundary restrictions are implemented using the iterative correction algorithm. The mathematical model adequacy is checked by comparing with classical model solution for statics problems that takes into account the crack faces contact. Numerical researches of friction influence on the displacement and contact forces distribution, size of contact zone are carried out. Influence of the faces contact and value of the friction coefficient on the distribution of stress intensity coefficients of normal rupture and transverse shear, which are the parameters of the biomaterial fracture, are presented and analyzed. It is shown that the nature of change in the distribution of the stress intensity coefficients for the conditions of tensile and shear waves is fundamentally different. It is concluded that it is possible to extend the approach proposed to the problems of three-dimensional fracture mechanics for composites with interfacial cracks at arbitrary dynamic loading.

Key words: interface crack, biomaterial loading, harmonic shear wave, friction face contact, boundary integral equations, Fourier series, fracture mechanics.

Вступ. Сучасний рівень розвитку техніки та технологій вимагає використання *композитних матеріалів*, що одночасно відзначаються легкістю, міцністю, надійністю і стійкістю до впливу навколишнього середовища. Внаслідок технології виготовлення та умов експлуатації композита виникають *міжкомпонентні дефекти*: тріщини, розшарування, зони ослаблення *адгезії*. Розуміння механізмів руйнування та погіршення властивостей матеріалу є питаннями, що становлять великий інтерес для інженерної науки та промисловості [1 – 3]. Оскільки

в цей час використання композитних матеріалів постійно зростає, проблеми механіки руйнування матеріалів з міжфазними тріщинами при різних типах навантаження дуже важливі.

Задачі механіки руйнування для кусково-однорідних пружних середовищ із тріщинами на межах поділу є модельними задачами механіки композитів з мікротріщинами між матрицею та матеріалом, що армує. Існує велика кількість наукових праць, присвячених розв'язанню задач у даній області механіки для випадку статичних навантажень (дивіться, наприклад, огляд робіт в [1]). Але експлуатація конструкцій і механізмів у переважній більшості випадків відбувається при динамічних навантаженнях, що призводить до зростання наявних і до утворення нових тріщиноподібних дефектів.

При розв'язуванні задач для тіл з тріщинами під впливом гармонічного навантаження звичайно припускають, що в процесі деформування тіла протилежні береги тріщин переміщуються відносно один одного і допускається взаємопроникнення берегів. Однак у реальності протилежні береги тріщин змикаються та взаємодіють між собою. Область контакту берегів змінюється протягом всього циклу навантаження, а її форма та розміри залежать від параметрів хвилі, що падає. На поверхні тріщин в області контакту берегів виникають області зчеплення та ковзання берегів, що залежать від величин коефіцієнта тертя та контактних сил взаємодії, що з'являються. Окремо підкреслимо, що форма та розміри області контакту берегів тріщин, а відповідно й області зчеплення і ковзання, невідомі заздалегідь та можуть бути встановлені лише під час розв'язування задачі, що й обумовлює її нелінійність. Все вищезгадане приводить до істотної зміни напружено-деформованого стану в околі фронту тріщин, що суттєво впливає на параметри механіки руйнування. Тому розв'язання динамічних нелінійних задач для матеріалів з міжфазними тріщинами досить актуально.

Аналіз останніх досліджень. Лінійні тріщини між однорідними ізотропними матеріалами при статичному навантаженні були розглянуті в [4], де був представлений алгоритм оцінки інтегралів, який можна використовувати для розрахунків параметрів механіки руйнування (коефіцієнтів інтенсивності напружень). Цей алгоритм може бути реалізований у випадку тріщин криволінійного розрізу. Використання методу Галеркіна для розв'язання задач динамічного навантаження однорідного матеріалу з тріщинами при контактній взаємодії берегів розглянуто в [5]. У [6] представлено багатопараметричний ітераційний алгоритм розв'язання двовимірної задачі для міжфазної тріщини при навантаженні хвилею розтягу-стиску, проведено дослідження збіжності алгоритму, вивчено вплив частоти навантаження на напружено деформований стан. Чисельні розв'язання тривимірних динамічних задач для матеріалів з міжфазною тріщиною без урахування контакту берегів представлені в [7, 8]. Лінійна та кругова міжфазні тріщини під гармонічним зсувним навантаженням розглянуто в роботах [9, 10]. Задачі розв'язувалися методом граничних елементів з використанням системи граничних сингулярних інтегральних рівнянь, отримані коефіцієнти інтенсивності напружень для різних хвильових чисел, але автори нехтували контактною взаємодією берегів тріщини. Метод граничних елементів був використаний для оцінки коефіцієнтів інтенсивності напружень у [11], де розглядалася тріщина між двома анізотропними матеріалами при статичному навантаженні та давалися рекомендації щодо вибору оптимального підходу до аналізу граничних елементів. Проблеми для кругової тріщини між напівпростором і тонким верхнім шаром при статичному та динамічному гармонічному за часом горизонтальному навантаженні досліджувалися в [12]. Зв'язані подвійні інтегральні рівняння розв'язувалися аналітично для випадку статичного навантаження та чисельно для динамічного навантаження. Двовимірний квазікристалічний біматеріал з міжфазною тріщиною досліджувався у [13]. Загальний розв'язок та перехід Фур'є були використані для одержання фундаментального рішення для методу розриву переміщень. За допомогою запропонованого методу були отримані коефіцієнти інтенсивності напружень. Міжматеріальні тріщини в одновимірному квазікристалічному покритті під площинним навантаженням були розглянуті в [14]. Для чисельного моделювання автори використали метод граничних елементів розриву зсуву. Напівнескінченна поверхнева тріщина у поропружній смузі під зсувною хвилею досліджена в [15]. Для отримання коефіцієнтів інтенсивності напружень було використано інтегральне перетворення Фур'є та метод Вінера – Хопфа. У роботі [16] представлено аналіз розміру контактної зони для лінійної міжфазної тріщини при нормальному гармонічному зсувному навантаженні. Проблема вирішена за допомогою алгоритму ітераційної корекції, щоб врахувати закриття тріщини та тертя її берегів. Були представлені та проаналізовані зміщення та контактні сили на берегах тріщини, але коефіцієнти інтенсивності напружень не розраховувались.

Нинішнє дослідження присвячене параметричному аналізу впливу контакту берегів тріщини та їх тертя на коефіцієнти інтенсивності напружень для біматеріалу з лінійною поверхнею з'єднання при нормальному падінні хвилі зсуву. Результати перевіряються шляхом порівняння з модельними розв'язками, які отримані для статичних задач з тертям і без тертя [2].

Постановка задачі та метод розв'язання. Розглянемо пружний біматеріал, що складається з двох однорідних ізотропних напівпросторів (півплощин) $\Omega^{(1)}$ і $\Omega^{(2)}$ з тріщиною кінцевої довжини $2L$, розташованою на межі розділу напівпросторів. Тріщина не має початкового відкриття, і до біматеріалу застосовується моногармонійне зсувне навантаження, що падає перпендикулярно до лінії розподілу, з частотою $\omega = 2\pi/T$ [9, 16].

В обох напівпросторах рівняння руху та узагальнений закон Гука призводять до лінійних рівнянь Ламе динамічної теорії пружності для поля зміщення зі стандартними початковими та граничними умовами для переміщень та напружень, а саме:

- відсутні початкові деформації біматеріалу;
- умова типу випромінювання Зоммерфельда на нескінченності;
- умови безперервності для напружень та зсувів на межі з'єднання $\Gamma^* = \Gamma^{(1)} \cap \Gamma^{(2)}$;
- відомі початкові зусилля $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$ на протилежних берегах тріщини $\Gamma^{(1)cr}$, $\Gamma^{(2)cr}$, спричинені падінням зовнішнього навантаження.

Компоненти поля переміщень можна представити граничними зміщеннями та зусиллями на межі напівпросторів, використовуючи динамічні співвідношення Сомільяни:

$$u_j^{(m)}(\mathbf{x}, t) = \int_T \int_{\Gamma^{(m)}} \left(p_i^{(m)}(\mathbf{y}, \tau) U_{ij}^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) - u_i^{(m)}(\mathbf{y}, \tau) W_{ij}^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) \right) dy d\tau, \quad \mathbf{x} \in \Omega^{(m)}, \quad t \in T, \quad j = 1, 2. \quad (1)$$

з відповідними фундаментальними розв'язками $U_{ij}^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau)$ та $W_{ij}^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau)$ [6, 16, 17].

Через закриття берегів тріщини вектор зусиль на поверхні тріщини є суперпозицією відомого початкового зусилля $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$, спричиненого зовнішнім навантаженням, і сили контакту $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$, що з'являється в зоні контакту берегів. Розмір і форма контактної зони за часом невідомі, залежать від параметрів зовнішнього навантаження, механічних властивостей біматеріала та коефіцієнта тертя на поверхнях контактуючих берегів і повинні бути визначені під час розв'язання задачі.

Щоб врахувати контактну взаємодію, для нормальної та тангенціальної складових розриву зміщення $[\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)] = \mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{u}^{(2)}(\mathbf{x}, t)$, та контактних сил $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$ необхідно ввести односторонні обмеження Сіньйорі-ні та закон кулонівського тертя з коефіцієнтом тертя k_τ [6, 16, 17]:

$$[u_n(\mathbf{x}, t)] \geq 0, \quad q_n(\mathbf{x}, t) \geq 0, \quad [u_n(\mathbf{x}, t)] q_n(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (2)$$

$$|q_\tau(\mathbf{x}, t)| < k_\tau q_n(\mathbf{x}, t) \Rightarrow \frac{\partial u_\tau(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = 0, \quad (3)$$

$$|q_\tau(\mathbf{x}, t)| = k_\tau q_n(\mathbf{x}, t) \Rightarrow \frac{\partial u_\tau(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = - \frac{q_\tau(\mathbf{x}, t)}{|q_\tau(\mathbf{x}, t)|} \left| \frac{\partial u_\tau(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \right|. \quad (4)$$

Контактні обмеження (2) – (4) забезпечують відсутність взаємопроникнення протилежних берегів тріщини, нормальна складова сили контакту є односторонньою і присутня лише в зоні контакту; а протилежні грані тріщин не рухаються в тангенціальній площині, поки вони утримуються силою тертя до того, як відбудеться ковзання.

Контактна взаємодія робить задачу нелінійною, а розв'язок є циклічним багатогармонійним навіть для розглянутого випадку моногармонійного навантаження. Ось чому нормальна та тангенціальна складові розриву зміщення та зусилля на поверхні тріщини можуть бути апроксимовані експоненційними рядами Фур'є що до часу:

$$f(\bullet, t) = \text{Re} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f^k(\bullet) e^{i\omega_k t} \right\}, \quad f^k(\bullet) = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^T f^k(\bullet, t) e^{-i\omega_k t} dt, \quad (5)$$

де $\omega_k = 2\pi k/T$, i – уявна одиниця.

Якщо припустити, що розподіли граничних зсувів і зусиль є достатньо плавними, то після граничного переходу до межі розділу біматеріала рівняння (1) у часовій області може бути перетворена у таку систему граничних інтегральних рівнянь у частотній області [6, 16]:

$$-\int_{\Gamma^{(1)cr}} \tilde{p}_i^{k,(1)}(\mathbf{y}) U_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) d\mathbf{y} = -\frac{1}{2} u_i^{k,(1)}(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma^{(1)cr}} u_i^{k,(1)}(\mathbf{y}) W_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) d\mathbf{y} + \int_{\Gamma^*} u_i^{k,*}(\mathbf{y}) W_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) d\mathbf{y} - \int_{\Gamma^*} p_i^{k,*}(\mathbf{y}) U_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma^{(1)cr}; \quad (6)$$

$$-\int_{\Gamma^{(2)cr}} \tilde{p}_i^{k,(2)}(\mathbf{y}) U_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) d\mathbf{y} = -\frac{1}{2} u_i^{k,(2)}(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma^{(1)cr}} u_i^{k,(2)}(\mathbf{y}) W_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) d\mathbf{y} - \int_{\Gamma^*} u_i^{k,*}(\mathbf{y}) W_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) d\mathbf{y} + \int_{\Gamma^*} p_i^{k,*}(\mathbf{y}) U_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma^{(2)cr}; \quad (7)$$

$$-\int_{\Gamma^{(1)cr}} \tilde{p}_i^{k,(1)}(\mathbf{y}) U_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) d\mathbf{y} = -\frac{1}{2} u_i^{k,*}(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma^{(1)cr}} u_i^{k,(1)}(\mathbf{y}) W_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) d\mathbf{y} + \int_{\Gamma^*} u_i^{k,*}(\mathbf{y}) W_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) d\mathbf{y} - \int_{\Gamma^*} p_i^{k,*}(\mathbf{y}) U_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma^*; \quad (8)$$

$$-\int_{\Gamma^{(2)cr}} \tilde{p}_i^{k,(2)}(\mathbf{y}) U_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) d\mathbf{y} = -\frac{1}{2} u_i^{k,*}(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma^{(1)cr}} u_i^{k,(2)}(\mathbf{y}) W_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) d\mathbf{y} - \int_{\Gamma^*} u_i^{k,*}(\mathbf{y}) W_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) d\mathbf{y} + \int_{\Gamma^*} p_i^{k,*}(\mathbf{y}) U_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma^*, \quad (9)$$

де $\tilde{p}_i^{k,(m)}(\mathbf{y})$, $\tilde{p}_i^{k,*}(\mathbf{y})$, $u_i^{k,(m)}(\mathbf{y})$ та $u_i^{k,*}(\mathbf{y})$ – коефіцієнти Фур'є зусиль та переміщень на берегах тріщини та межі з'єднання.

Фундаментальні розв'язки в частотній області $U_{ij}^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k)$ та $W_{ij}^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k)$ мають такий вигляд [6, 16]:

$$U_{ij}^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) = \frac{1}{2\pi\mu^{(m)}} \left(\psi_k^{(m)} \delta_{ij} - \chi_k^{(m)} \frac{(y_i - x_i)(y_j - x_j)}{r^2} \right); \quad (10)$$

$$W_{ij}^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) = \lambda^{(m)} n_i^{(m)}(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial y_k} U_{kj}^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) + \mu^{(m)} n_k^{(m)}(\mathbf{y}) \left[\frac{\partial}{\partial y_k} U_{ij}^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) + \frac{\partial}{\partial y_i} U_{kj}^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) \right]. \quad (11)$$

Тут δ_{ij} – дельта Кронекера, $\lambda^{(m)}$, $\mu^{(m)}$ – коефіцієнти Ламе, $r = |\mathbf{x}_1 - \mathbf{y}_1|$ – це відстань між точками спостереження та навантаження.

Функції $\psi_k^{(m)}$ та $\chi_k^{(m)}$ при гармонічному навантаженні у двовимірному випадку подаються так:

$$\psi_k^{(m)} = K_0 \left(l_{2,k}^{(m)} \right) + \frac{1}{l_{2,k}^{(m)}} \left[K_1 \left(l_{2,k}^{(m)} \right) - \frac{c_2^{(m)}}{c_1^{(m)}} K_1 \left(l_{1,k}^{(m)} \right) \right], \quad \chi_k^{(m)} = K_2 \left(l_{2,k}^{(m)} \right) - \left(\frac{c_2^{(m)}}{c_1^{(m)}} \right)^2 K_2 \left(l_{1,k}^{(m)} \right),$$

де $l_{1,k}^{(m)} = i \omega_k r / c_1^{(m)}$, $l_{2,k}^{(m)} = i \omega_k r / c_2^{(m)}$, $K_n(\bullet)$ – модифікована функція Бесселя другого роду та порядку n ; $c_1^{(m)} = \sqrt{(\lambda^{(m)} + 2\mu^{(m)}) / \rho^{(m)}}$ і $c_2^{(m)} = \sqrt{\mu^{(m)} / \rho^{(m)}}$ – швидкості поздовжньої та поперечної хвиль у верхньому та нижньому півпросторах.

Для розглянутого випадку ядра мають такий вигляд:

$$U_{12}^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) = U_{21}^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) = 0; \quad (12)$$

$$U_{11}^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) = \frac{1}{2\pi\mu^{(m)}} \left[K_0 \left(l_{2,k}^{(m)} \right) + \frac{1}{l_{2,k}^{(m)}} \left(K_1 \left(l_{2,k}^{(m)} \right) - \frac{c_2^{(m)}}{c_1^{(m)}} K_1 \left(l_{1,k}^{(m)} \right) \right) \right]; \quad (13)$$

$$U_{22}^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) = \frac{1}{2\pi\mu^{(m)}} \left[\left(\frac{c_2^{(m)}}{c_1^{(m)}} \right)^2 K_2 \left(l_{1,k}^{(m)} \right) - K_2 \left(l_{2,k}^{(m)} \right) + K_0 \left(l_{2,k}^{(m)} \right) + \frac{1}{l_{2,k}^{(m)}} \left(K_1 \left(l_{2,k}^{(m)} \right) - \frac{c_2^{(m)}}{c_1^{(m)}} K_1 \left(l_{1,k}^{(m)} \right) \right) \right]; \quad (14)$$

$$W_{11}^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) = W_{22}^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) = 0; \quad (15)$$

$$W_{12}^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) = \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial y_1} \left[l_{2,k}^{(m)} K_1 \left(l_{2,k}^{(m)} \right) - 2K_2 \left(l_{2,k}^{(m)} \right) + 2 \left(\frac{c_2^{(m)}}{c_1^{(m)}} \right)^2 K_2 \left(l_{1,k}^{(m)} \right) \right]; \quad (16)$$

$$W_{21}^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) = \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial y_1} \left[\frac{\lambda^{(m)} \mu^{(m)}}{(\lambda^{(m)} + 2\mu^{(m)})^2} l_{1,k}^{(m)} K_1 \left(l_{1,k}^{(m)} \right) - 2K_2 \left(l_{2,k}^{(m)} \right) + 2 \left(\frac{c_2^{(m)}}{c_1^{(m)}} \right)^2 K_2 \left(l_{1,k}^{(m)} \right) \right]. \quad (17)$$

Для кожного числа коефіцієнтів Фур'є, k , відповідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь (подібну до тієї, що представлена в [7]) можна отримати з системи граничних інтегральних рівнянь (6) – (9) і розв'язати чисельно, тому можна знайти зміщення і зусилля у вигляді експоненціального ряду Фур'є (5) з кінцевою кількістю членів. Зауважимо також, що гіперсингулярні, сингулярні та слабосингулярні інтеграли залежно від типу та порядку наближення використовуюваного простору повинні бути регульовані та обчислені для всіх інтегральних ядер. У поточному дослідженні було використано найпростіше *кускво-постійне наближення* (оскільки воно успішно довело свою ефективність для двовимірних задач, порівнюючи, наприклад, з методом Галеркіна [5]).

Для того, щоб врахувати контактні обмеження (2) – (4), слід використовувати алгоритм ітераційної корекції на основі ортогональних проекцій на множини обмежень. У поточному дослідженні використовується наступний алгоритм, представлений у [6, 16]:

- отримується моногармонійне розв'язання задачі, яке нехтує ефектами закриття тріщини та тертя;
- розв'язання виправляється із застосуванням контактних обмежень (2) – (4), а коефіцієнти Фур'є поступово змінюються до тих пір, поки не знайдеться багатогармонійний розв'язок, що задовольняє контактним обмеженням.

Дослідження збіжності алгоритму щодо кількості коефіцієнтів Фур'є, використаних у ряді (5), кількості граничних елементів, та розміру елементів поблизу кінчиків тріщини, кількості часових інтервалів представлені в [6] для лінійних тріщин у біматеріалах під *гармонічним навантаженням стиску – розтягу*, тому в цьому дослідженні ми слідували цим рекомендаціям.

Тестові розрахунки. Для обґрунтування числової моделі розглядали міжматеріальну тріщину довжиною $2L$ без початкового розкриття при нормальному зсувному навантаженні амплітуди σ_0 з нормованим хвильовим числом $k_2^{(2)}L = \omega L/c_2^{(2)} = 0.01$ [16]. Механічні властивості матеріалу: $\nu^{(1)} = 0,1$ і $E^{(1)} = 29,0$ ГПа, $\nu^{(2)} = 0,49$ і $E^{(2)} = 400,0$ ГПа, були обрані таким чином, щоб задовольнити таке співвідношення [2]:

$$\beta = \frac{\mu^{(2)}(\kappa^{(1)} - 1) - \mu^{(1)}(\kappa^{(2)} - 1)}{\mu^{(2)}(\kappa^{(1)} + 1) + \mu^{(1)}(\kappa^{(2)} + 1)} = 0.5 .$$

Тут: $\nu^{(m)}$ – коефіцієнт Пуассона, $E^{(m)}$ – модуль Юнга, $\mu^{(m)}$ – модуль зсуву матеріалів, $\kappa^{(m)} = 3 - 4\nu^{(m)}$.

Стрибок нормальних компонентів переміщень протилежних берегів $[u_n]2\mu_0/L\sigma_0$ та сили контакту q_n/σ_0 на поверхні тріщини представлені на рис. 1, а та рис. 1, б для різних значень коефіцієнта тертя $k_\tau = 0.0$ та $k_\tau = 1.0$; параметр μ_0 заданий наступним чином [9]:

$$\mu_0 = \mu^{(1)} \frac{1 - \gamma_2}{1 + \kappa^{(1)}}, \text{ де } \gamma_2 = \left(\frac{a_1}{2} - a_2 \right), \quad a_1 = \frac{\mu^{(1)} - \mu^{(2)}}{\mu^{(1)} + \mu^{(2)}\kappa^{(1)}}, \quad a_2 = \frac{\mu^{(2)}\kappa^{(1)} - \mu^{(1)}\kappa^{(2)}}{2(\mu^{(2)} + \mu^{(1)}\kappa^{(2)})} .$$

Сили контакту та розмір контактної зони порівнюються з модельним статичним рішенням [2].

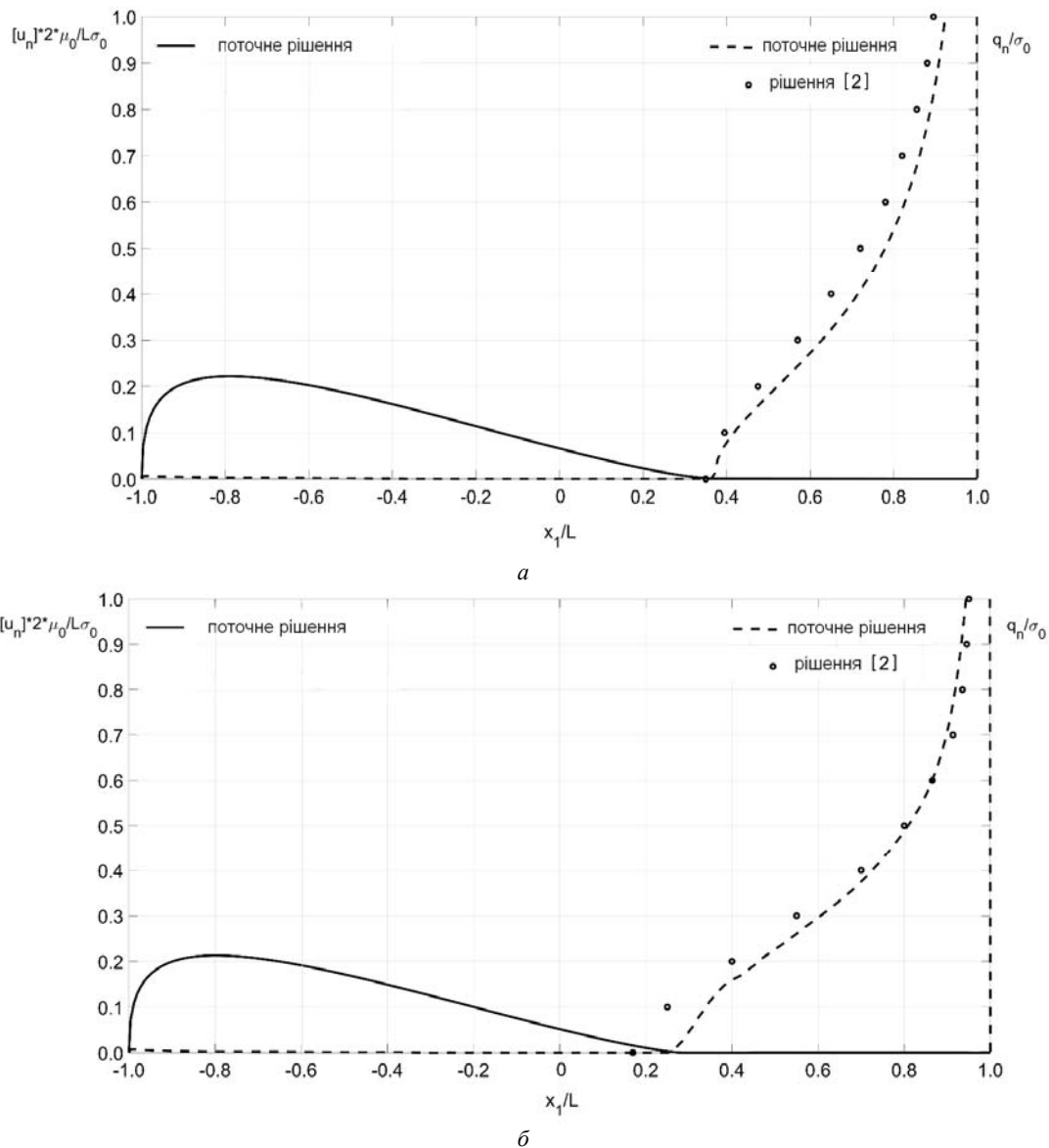


Рис. 1 – Стрибок нормальних компонентів переміщень протилежних берегів $[u_n]2\mu_0/L\sigma_0$ та сили контакту q_n/σ_0 на поверхні тріщини для значень коефіцієнта тертя: а – $k_\tau = 0.0$; б – $k_\tau = 1.0$.

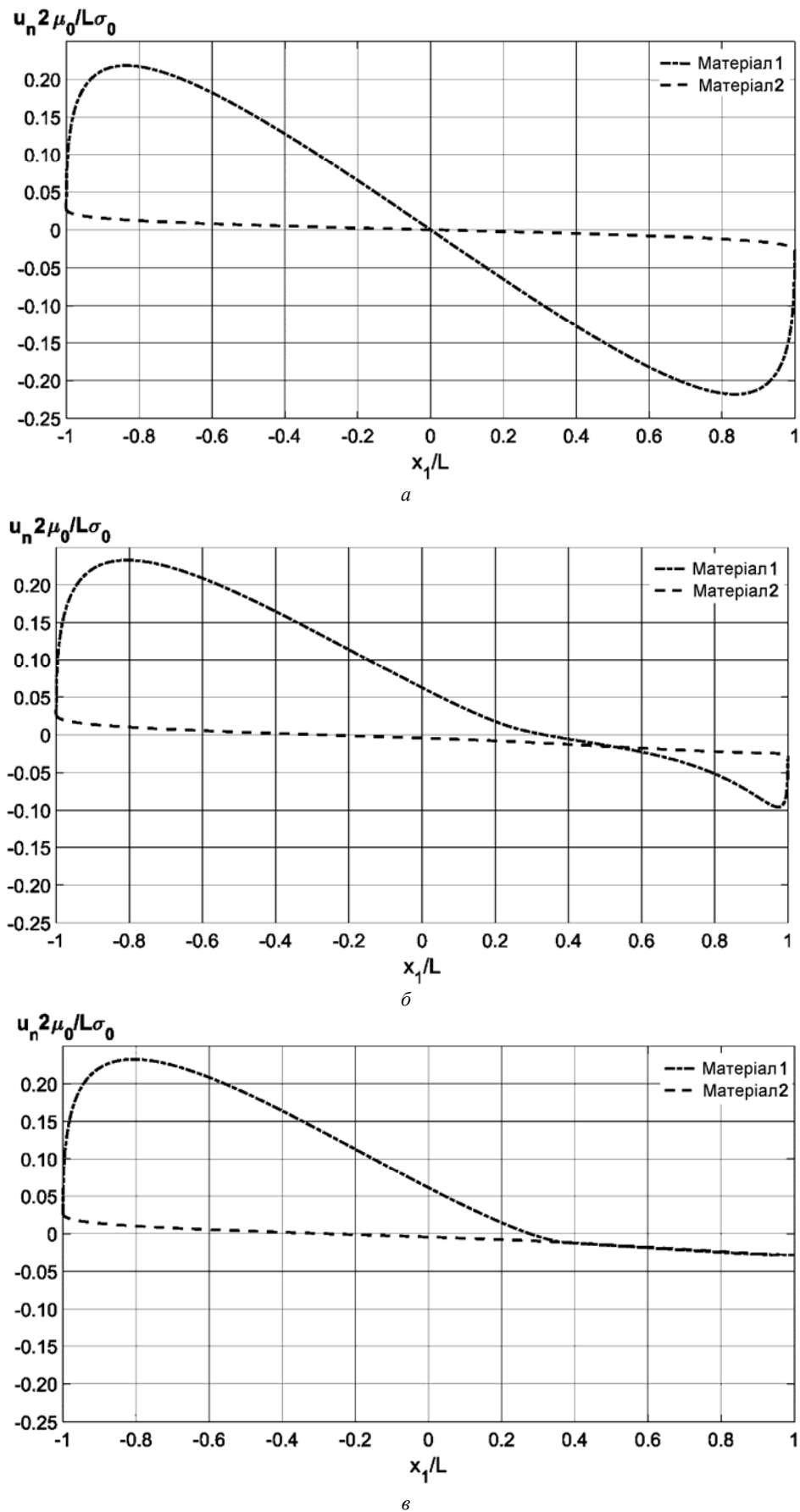


Рис. 2 – Результати ітераційної корекції розподілів уздовж довжини тріщини відносних нормальних компонент переміщень протилежних берегів тріщини для випадку $k_r = 0$: а – 1 ітерація; б – 50 ітерація; в – 600 ітерація.

Як бачимо, результати добре узгоджуються. Слід зазначити, що зміна коефіцієнта тертя суттєво вплинуло на розв'язок, змінивши розмір зони контакту, розподіл переміщень та сил навіть у «квазістатичному» випадку, розглянутому в цьому розділі лише з метою перевірки.

На рис. 2, *a* – 2, *b* наведено результати ітераційної корекції розподілів уздовж довжини тріщини відносних нормальних компонент переміщень протилежних берегів тріщини для випадку $k_\tau = 0$.

Рис. 2, *a* – 1-а ітерація без корекції граничних умов. Видно, що на ділянці тріщини $(0, 1)$ існує «взаємопроникнення» берегів.

Рис. 2, *b* – 50-а ітерація, проміжний розв'язок в результаті послідовної корекції граничних умов на основі обмежень (2) – (4). Ділянка «взаємопроникнення» берегів зменшується від ітерації до ітерації і формується зона контакту.

Рис. 2, *b* ілюструє розв'язок після 600 ітерацій з корекцією. Тут «взаємопроникнення» берегів відсутнє, зона контакту берегів міжфазної тріщини сформувалася.

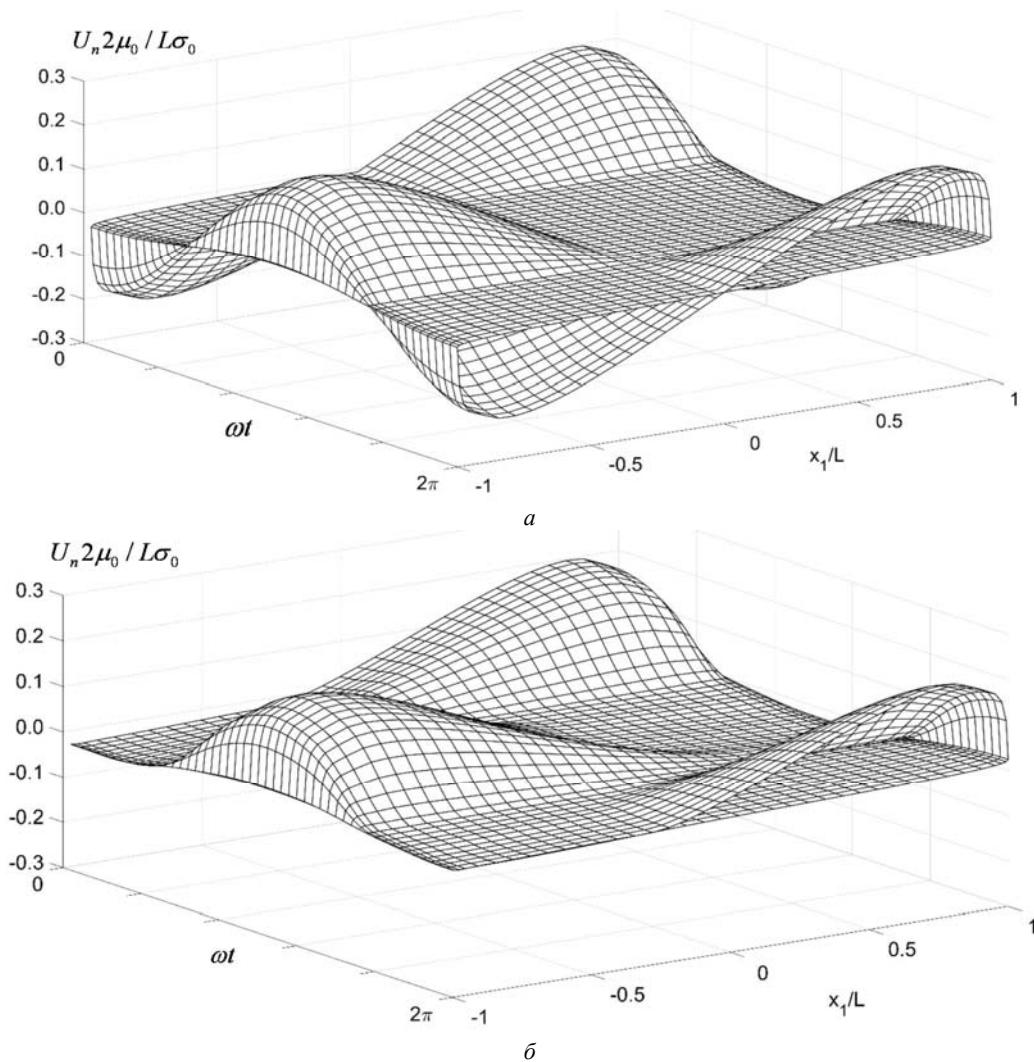


Рис. 3 – Принципова різниця між розв'язками задачі про міжфазну тріщину під впливом хвилі зсуву: *a* – без врахування контакту протилежних берегів; *b* – з врахуванням контакту протилежних берегів.

На рис. 3 демонструється принципова різниця між розв'язками задачі про міжфазну тріщину під впливом хвилі зсуву без врахування контакту протилежних берегів (рис. 3, *a*) і з врахуванням цього контакту (рис. 3, *b*).

Підкреслимо, що, як було також показано в [16], після ітераційної корекції контактні обмеження (2) – (4) виконуються на всій поверхні тріщини, найголовніше, що немає взаємопроникнення протилежних берегів тріщини, тертя впливає на розподіл переміщень і контактних сил, а також на розмір зони контакту. Аналіз наведених результатів розрахунків і порівняння протяжності зони контакту, величин контактних сил взаємодії берегів міжфазної тріщини з даними інших авторів [2] свідчить про достовірність отриманих нами результатів.

Розрахункові дослідження. Розрахунки виконані для біматеріалу з тріщиною-відрізком довжини $2L = 2$ уздовж лінії з'єднання двох півплощин (ізотропних матеріалів). Механічні властивості біматеріалу для узго-

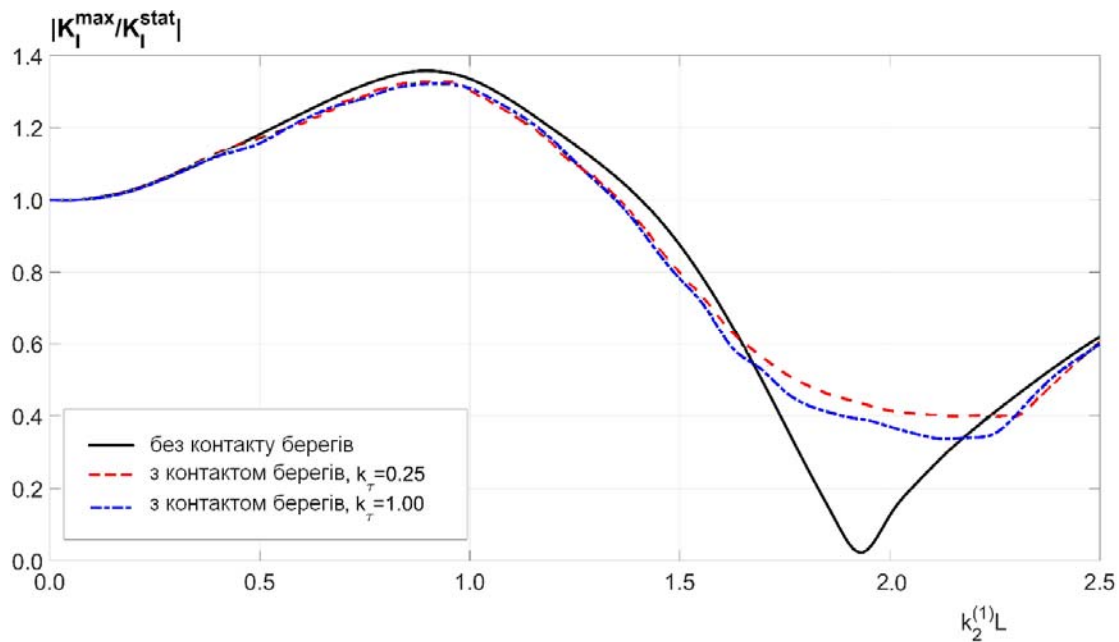
дження з результатами, представленими в [9], були взяті таким чином:

- коефіцієнт Пуассона $\nu^{(1)} = \nu^{(2)} = 0.25$;
- щільність $\rho^{(1)} = \rho^{(2)} = 7800 \text{ кг/м}^3$;
- модуль Юнга $E^{(1)} = 200 \text{ ГПа}$ і $E^{(2)} = 100 \text{ ГПа}$.

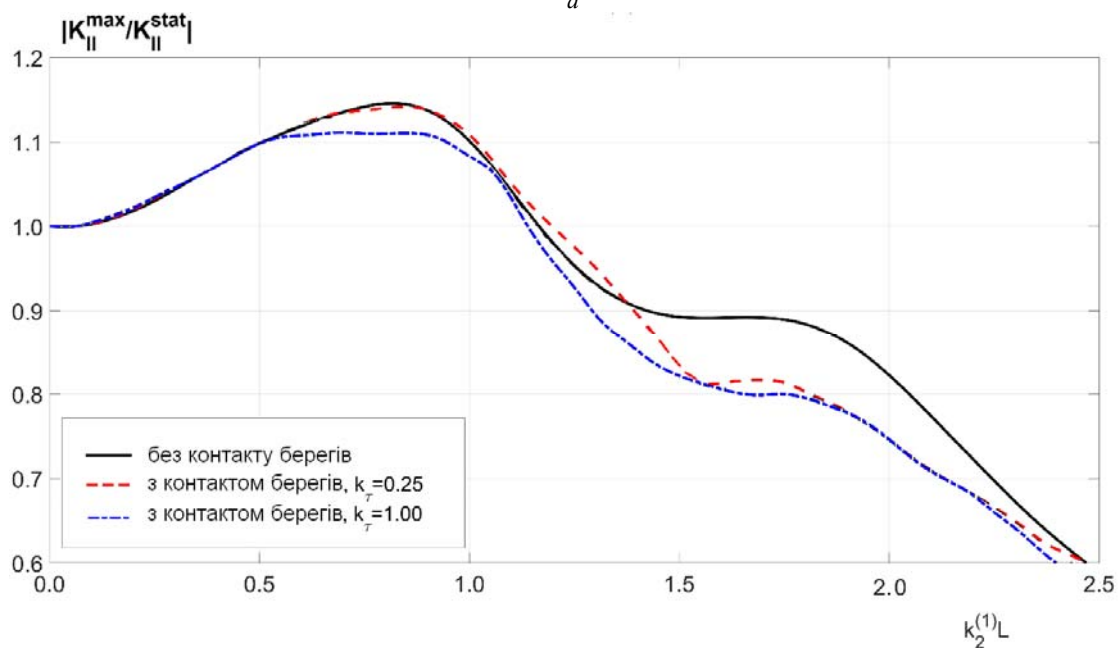
Дослідження виконані в частині знаходження параметрів руйнування біматеріалу так званих *коефіцієнтів інтенсивності напружень (КИН)*. Динамічні КИН: першої моди (нормального розриву) K_I^{\max} та другої моди (поперечний зсув) K_{II}^{\max} обчислювались поблизу вершини тріщини за такими асимптотичними формулами [9]:

$$K_I^{\max} = \max_t \lim_{r \rightarrow 0} p_n^*(R+r, t) \sqrt{2\pi r}; \quad K_{II}^{\max} = \max_t \lim_{r \rightarrow 0} p_\tau^*(R+r, t) \sqrt{2\pi r}.$$

Тут $p_n^*(R+r, t) \sqrt{2\pi r}$ і $p_\tau^*(R+r, t) \sqrt{2\pi r}$ – нормальна та дотична складові вектора зусилля на межі з'єднання матеріалів, r – відстань від вершини тріщини.



a



б

Рис. 4 – Розподіл відносних динамічних коефіцієнтів інтенсивності напружень при двох коефіцієнтах тертя $k_\tau = 0.25$ та $k_\tau = 1.00$ в порівнянні з розв'язком без контакту: а – КИН першої моди; б – КИН другої моди.

Розподіл відносних динамічних коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН) представлено на рис. 4, *a* – КІН першої моди, рис. 4, *б* – КІН другої моди при двох коефіцієнтах тертя $k_\tau = 0.25$ та $k_\tau = 1.00$ в порівнянні з розв'язком без контакту.

Нормування виконано статичними коефіцієнтами інтенсивності напружень першої та другої моди K_I^{stat} , K_{II}^{stat} .

Бачимо, що врахуванням контакту берегів мало змінюють максимальні значення відносних КІН першої моди в порівнянні зі значеннями без контакту (рис. 4, *a*). Лише в зоні частот $1,75 \leq k_2^{(1)}L \leq 2,25$ існує суттєва різниця в значеннях КІН першої моди з контактом і без контакту берегів. Але значення відносних КІН другої моди в задачі з врахуванням контакту берегів суттєво відрізняється від результатів, де контакт не враховано (рис. 4, *б*). Особливо цей факт виявляється при зчепленні контактуючих поверхонь берегів ($k_\tau = 1.0$)

З іншого боку бачимо (рис. 4), що зміна коефіцієнта тертя не дуже впливає на розв'язок. Дійсно, протилежні берега тріщини здебільшого ковзають, але сила тертя, яка залежить від нормальної складової сили контакту, досить мала для розглянутих тут зсувних навантажень. Тому корекція нормального відкриття тріщини відповідно до односторонніх обмежень Синьйоріні в основному призвела до зміни обох розподілів коефіцієнтів інтенсивності напружень. Зауважимо, що цей висновок суттєво відрізняється від тих, які були отримані раніше для хвиль стиску-розтягу, де нормальне відкриття із зрозумілих причин є домінуючим режимом [6].

Висновки і перспективи. Чисельно розв'язана динамічна нелінійна задача механіки руйнування для біматеріалу з міжфазної тріщиною. Показано, що після застосування ітераційної корекції розв'язку, відсутні взаємопроникнення протилежних берегів тріщини.

Аналіз розподілів переміщень берегів міжфазної тріщини свідчить про те, що зона розкриття берегів і зона їх контакту кардинально змінює своє положення на тріщині протягом періоду навантаження.

На основі знайдених параметрів НДС розраховані динамічні КІН нормального розриву і КІН поперечного зсуву. Проведено розрахункові дослідження залежності КІНів від коефіцієнтів тертя берегів міжфазної тріщини при навантаженні біматеріалу хвилею зсуву. Показано, що значення відносних КІН поперечного зсуву в задачі з врахуванням контакту берегів (при зчепленні поверхонь) суттєво відрізняється від результатів, де не враховано контакту.

На закінчення слід додати, що запропонований підхід може бути поширений на проблеми тривимірної механіки руйнування для композитів з міжфазними тріщинами при довільному динамічному навантаженні. Особливо увагу треба приділяти розв'язку задач поблизу фронту тріщин [1, 18, 19].

Список літератури

1. Comninou M. An overview of interfacial cracks // *Eng Fract Mech.* – 1990. – № 37(1). – P. 197 – 208.
2. Comninou M., Dundurs J. Effect of friction on the interface crack loaded in shear // *J Elast.* – 1980. – № 10. – P. 203 – 212.
3. Gross D., Seelig T. *Fracture Mechanics with the introduction to Micromechanics.* – Springer Heidelberg Dordrecht. – 2001. – 376 p.
4. Tafreshi A. Computation of the J_k – integrals for bimaterial interface cracks using boundary element crack shape sensitivities // *Theor App Fract Mech.* – 2016. – № 82. – P. 77 – 87.
5. Menshykov O. V., Menshykova M. V., Wendland W. L. On use of the Galerkin method to solve the fracture mechanics problem for a linear crack under normal loading // *Int App Mech.* – 2005. – № 41(11). – P. 1324 – 1329.
6. Menshykova M. V., Menshykov O. V., Guz I. A. An iterative BEM for the dynamic analysis of interface crack contact problems // *Eng Anal Bound Elem.* – 2011. – № 35(5). – P. 735 – 749.
7. Menshykov O. V., Menshykov V. A., Guz I. A. Elastodynamics of a crack on the bimaterial interface // *Eng Anal Bound Elem.* – 2009. – № 33(3). – P. 294 – 301.
8. Men'shikov V. A., Men'shikov A. V., Guz I. A. Interfacial crack between elastic half-spaces under harmonic loading // *Int App Mech.* – 2007. – № 43(8). – P. 865 – 873.
9. Menshykova M. V., Menshykov O. V., Guz I. A. Linear interface crack under plane shear wave // *Comput Model Eng Sci.* – 2009. – № 48(2). – P. 107 – 120.
10. Guz A. N., Guz I. A., Men'shikov A. V., Men'shikov V. A. Penny-shaped crack at the interface between elastic half-spaces under the action of a shear wave // *Int App Mech.* – 2009. – № 45(5). – P. 534 – 539.
11. Shiah Y. C., Hwu C., Yao J. J. Boundary element analysis of the stress intensity factors of plane interface cracks between dissimilarly adjoined anisotropic materials // *Eng Anal Bound Elem.* – 2019. – № 106. – P. 68 – 74.
12. Eskandari-Ghadi M., Ardeshir-Behrestaghi A., Pak RYS. Bi-material transversely isotropic half-space containing penny-shaped crack under time-harmonic horizontal loads // *Eng Fract Mech.* – 2017. – № 72. – P. 152 – 180.
13. Fan C. Y., Lv S. Y., Dang H. Y., Yuan Y. P., Zhao M. H. Fundamental solutions and analysis of the interface crack for two-dimensional decagonal quasicrystal bimaterial via the displacement discontinuity method // *Eng Anal Bound Elem.* – 2019. – № 106. – P. 462 – 472.
14. Zhao M. H., Fan C. Y., Lu C., Dang H. Y. Analysis of interface cracks in one-dimensional hexagonal quasi-crystal coating under in-plane loads // *Eng Fract Mech.* – 2021. – № 243. – Article No. 107534. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2021.107534.
15. Negi A., Singh A. K., Yadav R. P. Analysis on dynamic interfacial crack impacted by SH-wave in bi-material poroelastic strip // *Compos Struct.* – 2020. – № 233. – Article No. 111639. DOI: doi.org/10.1016/j.compstruct.2019.111639.
16. Menshykov V., Menshykov O., Guz I., Contact Problems for Interface Cracks Under Harmonic Shear Loading, in: WCCM-ECCOMAS2020. – Режим доступу : https://www.scipedia.com/public/Menshykov_et_al_2021a. – Дата звертання : 30 вересня 2021.
17. Guz A. N. Nonclassical problems of fracture/failure mechanics: on the occasion of the 50th anniversary of the research (review) // *Int App Mech.* – 2019. – № 55. – P. 129 – 174.
18. Chai H., Bao Y., Zhang Z. Numerical solutions of hypersingular integral equations for interface circular crack under axisymmetric loadings // *Eng Anal Bound Elem.* – 2021. – № 122. – P. 35 – 42.
19. Ostriuk V. I. Contact of faces of a rectilinear crack under complex loading and various contact conditions // *Acta Mech.* – 2019. – № 230. – P. 3741 – 3758.

References (transliterated)

1. Comninou M. An overview of interfacial cracks. *Eng Fract Mech.* 1990, no. 37(1), pp. 197–208.
2. Comninou M., Dundurs J. Effect of friction on the interface crack loaded in shear. *J Elast.* 1980, no. 10, pp. 203–212.
3. Gross D., Seelig T. *Fracture Mechanics with the introduction to Micromechanics.* Springer Heidelberg Dordrecht, 2001. 376 p.
4. Tafreshi A. Computation of the J_k – integrals for bimaterial interface cracks using boundary element crack shape sensitivities. *Theor App Fract Mech.* 2016, no. 82, pp. 77–87.
5. Menshykov O. V., Menshykova M. V., Wendland W. L. On use of the Galerkin method to solve the fracture mechanics problem for a linear crack under normal loading. *Int App Mech.* 2005, no. 41(11), pp. 1324–1329.
6. Menshykova M. V., Menshykov O. V., Guz I. A. An iterative BEM for the dynamic analysis of interface crack contact problems. *Eng Anal Bound Elem.* 2011, no. 35(5), pp. 735–749.
7. Menshykov O. V., Menshykov V. A., Guz I. A. Elastodynamics of a crack on the bimaterial interface. *Eng Anal Bound Elem.* 2009, no. 33(3), pp. 294–301.
8. Men'shikov V. A., Men'shikov A. V., Guz I. A. Interfacial crack between elastic half-spaces under harmonic loading. *Int App Mech.* 2007, no. 43(8), pp. 865–873.
9. Menshykova M. V., Menshykov O. V., Guz I. A. Linear interface crack under plane shear wave. *Comput Model Eng Sci.* 2009, no. 48(2), pp. 107–120.
10. Guz A. N., Guz I. A., Men'shikov A. V., Men'shikov V. A. Penny-shaped crack at the interface between elastic half-spaces under the action of a shear wave. *Int App Mech.* 2009, no. 45(5), pp. 534–539.
11. Shiah Y. C., Hwu C., Yao J. J. Boundary element analysis of the stress intensity factors of plane interface cracks between dissimilarly adjoined anisotropic materials. *Eng Anal Bound Elem.* 2019, no. 106, pp. 68–74.
12. Eskandari-Ghadi M., Ardeshtir-Behrestaghi A., Pak RYS. Bi-material transversely isotropic half-space containing penny-shaped crack under time-harmonic horizontal loads. *Eng Fract Mech.* 2017, no. 72, pp. 152–180.
13. Fan C. Y., Lv S. Y., Dang H. Y., Yuan Y. P., Zhao M. H. Fundamental solutions and analysis of the interface crack for two-dimensional decagonal quasicrystal bimaterial via the displacement discontinuity method. *Eng Anal Bound Elem.* 2019, no. 106, pp. 462–472.
14. Zhao M. H., Fan C. Y., Lu C., Dang H. Y. Analysis of interface cracks in one-dimensional hexagonal quasi-crystal coating under in-plane loads. *Eng Fract Mech.* 2021, no. 243. Article No.107534. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2021.107534.
15. Negi A., Singh A. K., Yadav R. P. Analysis on dynamic interfacial crack impacted by SH-wave in bi-material poroelastic strip. *Compos Struct.* 2020, no. 233. Article No. 111639. DOI: doi.org/10.1016/j.compstruct.2019.111639.
16. Menshykov V., Menshykov O., Guz I., Contact Problems for Interface Cracks Under Harmonic Shear Loading, in: WCCM-ECCOMAS2020. Available at : https://www.scipedia.com/public/Menshykov_et_al_2021a (accessed 30 September 2021).
17. Guz A. N. Nonclassical problems of fracture/failure mechanics: on the occasion of the 50th anniversary of the research (review). *Int App Mech.* 2019, no. 55, pp. 129–174.
18. Chai H., Bao Y., Zhang Z. Numerical solutions of hypersingular integral equations for interface circular crack under axisymmetric loadings. *Eng Anal Bound Elem.* 2021, no. 122, pp. 35–42.
19. Ostrik V. I. Contact of faces of a rectilinear crack under complex loading and various contact conditions. *Acta Mech.* 2019, no. 230, pp. 3741–3758.

Надійшла (received) 05.10.2021

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Меньшиков Олександр Васильович – Centre for Micro- and Nanomechanics, School of Engineering, University of Aberdeen, AB24 3UE Aberdeen, Scotland, UK; tel.: +441224273326; e-mail: o.menshykov@abdn.ac.uk.

Меньшиков Александр Васильевич – Centre for Micro- and Nanomechanics, School of Engineering, University of Aberdeen, AB24 3UE Aberdeen, Scotland, UK; tel.: +441224273326; e-mail: o.menshykov@abdn.ac.uk.

Menshykov Oleksandr Vasyliovych – Centre for Micro- and Nanomechanics, School of Engineering, University of Aberdeen, AB24 3UE Aberdeen, Scotland, UK; tel.: +441224273326; e-mail: o.menshykov@abdn.ac.uk.

Меньшиков Василь Олександрович – доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник, професор кафедри теоретичної механіки, машинознавства та роботомеханічних систем, Національний аерокосмічний університет ім. М.С. Жуковського «Харківський авіаційний інститут», м. Харків; тел.: (057) 788-47-67; e-mail: v.menshykov@ukr.net.ua.

Меньшиков Василий Александрович – доктор фізико-математических наук, старший научный сотрудник, профессор кафедры теоретической механики, машиноведения и роботомеханических систем, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт», г. Харьков; тел.: (057) 788-47-67; e-mail: v.menshykov@ukr.net.ua.

Menshykov Vasyli Oleksandrovych – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Senior Research Fellow, Professor at the Department of Theoretical mechanics, machinery and robotic systems, National Aerospace University «Kharkiv Aviation Institute», Kharkiv; tel.: (057) 788-47-67; e-mail: v.menshykov@ukr.net.ua.

Кладова Ольга Юрївна – кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри теоретичної механіки, машинознавства та роботомеханічних систем, Національний аерокосмічний університет ім. М.С. Жуковського «Харківський авіаційний інститут», м. Харків; тел.: (050) 598-16-68; e-mail: o.kladova@khai.edu.

Кладова Ольга Юрьевна – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры теоретической механики, машиноведения и роботомеханических систем, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт», г. Харьков; тел.: (050) 598-16-68; e-mail: o.kladova@khai.edu.

Kladova Olga Yuriyivna – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Associate Professor at the Department of Theoretical mechanics, machinery and robotic systems, National Aerospace University «Kharkiv Aviation Institute», Kharkiv; tel.: (050) 598-16-68; e-mail: o.kladova@khai.edu.