

**Д. В. КУРНОСЕНКО, В. П. САВЧУК, Г. Я. ТУЛУЧЕНКО**

### **УМОВИ МОНОТОННОЇ АПРОКСИМАЦІЇ КРИВИХ РАМСЕЯ ТА ЇХ МОДИФІКАЦІЙ**

Розроблено алгоритм апроксимації експериментальних даних кривою Рамсея та її модифікаціями, який забезпечує монотонне зростання наближаючої функції на проміжку  $[0; +\infty)$  та існування заданої кількості точок перегибу. Крива Рамсея належить до сім'ї логістичних кривих, які широко використовуються при моделюванні процесів обмеженого росту в різних предметних галузях. Класична крива Рамсея має два параметри та володіє лівою фіксованою асиметрією. Відома також її трьохпараметрична модифікація, яка забезпечує можливість зміщення по осі ординат. Широке практичне використання кривої Рамсея як з двома параметрами, так і її модифікацій з більшою кількістю параметрів, для наближення експериментальних залежностей стримується частою втратою цією кривою логістичної форми при виконанні апроксимації без додаткових вимог до співвідношень між її параметрами. В статті розглядаються модифікації кривої Рамсея з трьома та п'ятьма параметрами. Перша та друга похідні від досліджуваних модифікацій функції Рамсея мають особливу структуру. Вони є добутками поліноміальної та експоненціальної функцій. Це дозволяє використовувати теорему Штурма про кількість коренів полінома на відрізьку для контролю форми апроксимуючої кривої. Показано, що з ростом кількості параметрів у модифікованій кривій значно зростає кількість можливих сполучень обмежень на значення параметрів, які забезпечують збереження її  $S$ -подібної форми. Розв'язання задачі апроксимації в цьому випадку складається з розв'язання низки задач умовної глобальної оптимізації з різними обмеженнями та вибору розв'язку, який забезпечує найменшу похибку наближення. Також виконані дослідження щодо точності оцінювання параметрів кривої Рамсея в залежності від точності експериментальних даних. Для імітації наявності похибок вимірювань до значень детермінованої послідовності додавалися значення нормально розподіленої випадкової величини з математичним сподіванням, рівним нулю, та різними значеннями середньоквадратичного відхилення для різних серій обчислювальних експериментів. Обчислювальні експерименти показали суттєву чутливість значень параметрів функції Рамсея до точності вимірювань експериментальних даних.

**Ключові слова:** крива Рамсея, апроксимація, умови монотонності, види асиметрії логістичних кривих, теорема Штурма про кількість коренів полінома на відрізьку.

**Д. В. КУРНОСЕНКО, В. П. САВЧУК, Г. Я. ТУЛУЧЕНКО**

### **УСЛОВИЯ МОНОТОННОЙ АППРОКСИМАЦИИ КРИВЫХ РАМСЕЯ И ИХ МОДИФИКАЦИЙ**

Разработан алгоритм аппроксимации экспериментальных данных кривой Рамсея и ее модификациями, который обеспечивает монотонное возрастание приближающей функции на промежутке  $[0; +\infty)$  и существование заданного количества точек перегиба. Кривая Рамсея принадлежит к семье логистических кривых, которые широко используются при моделировании процессов ограниченного роста в разных предметных областях. Классическая кривая Рамсея имеет два параметра и владеет левой фиксированной асимметрией. Известна также ее трехпараметрическая модификация, которая обеспечивает возможность смещения по оси ординат. Широкое практическое использование кривой Рамсея как с двумя параметрами, так и с большим количеством параметров, для приближения экспериментальных зависимостей сдерживается частой потерей этой кривой логистической формы при выполнении аппроксимации без дополнительных требований к соотношениям между ее параметрами. В статье рассматриваются модификации кривой Рамсея с тремя и пятью параметрами. Первая и вторая производные от исследуемых модификаций функции Рамсея имеют особую структуру. Они являются произведениями полиномиальной и экспоненциальной функций. Это позволяет использовать теорему Штурма о количестве корней полинома на отрезке для контроля формы аппроксимирующей кривой. Показано, что с ростом количества параметров у модифицированной кривой существенно возрастает количество возможных сочетаний ограничений на значения параметров, которые обеспечивают сохранение ее  $S$ -подобной формы. Решение задачи аппроксимации в этом случае состоит из решения последовательности задач условной глобальной оптимизации с разными ограничениями и выборе решения, которое обеспечивает наименьшую ошибку приближения. Также выполнены исследования точности оценивания параметров кривой Рамсея в зависимости от точности экспериментальных данных. Для имитации наличия ошибок измерений к значениям детерминированной последовательности прибавлялись значения нормально распределенной случайной величины с математическим ожиданием, равным нулю, и разными значениями среднего квадратического отклонения для разных серий вычислительных экспериментов. Вычислительные эксперименты показали существенную чувствительность значений параметров функции Рамсея к точности измерения экспериментальных данных.

**Ключевые слова:** кривая Рамсея, аппроксимация, условия монотонности, виды асимметрии логистических кривых, теорема Штурма о количестве корней полинома на отрезке.

**D. V. KURNOSENKO, V. P. SAVCHUK, H. YA. TULUCHENKO**

### **CONDITIONS OF MONOTONE APPROXIMATION OF RAMSEY CURVES AND THEIR MODIFICATIONS**

The algorithm for approximating the experimental data of the Ramsey curve and its modifications has been developed, which provides a monotonic increase of the approximating function in the interval  $[0; +\infty)$  and an existence of a given number of inflection points. The Ramsey curve belongs to the family of logistic curves that are widely used in modeling of limited increasing processes in various subject fields. The classical Ramsey curve has two parameters and has a left constant asymmetry. It is also known that its three-parameter modification provides the possibility of displacement along the axes of ordinate. The extensive practical use of the Ramsey curve with both two and more parameters for approximating experimental dependences is restrained by the frequent loss by this curve of the logistic shape when approximating without additional restrictions on the relationships between its parameters. The article discusses modifications of the Ramsey curve with three and five parameters. The first and second derivatives of the studied modifications of the Ramsey function have a special structure. They are products of polynomial and exponential functions. This allows using Sturm's theorem on the number of polynomial roots in a given interval to control the shape of the approximating curve. It has been shown that with an increase in the number of parameters for the modified curve, the number of possible combinations of restrictions on the values of the parameters ensuring the preservation of its  $S$ -like shape increases significantly. The solution to the approximation problem in this case consists of solving a sequence of conditional global optimization problems with different constraints and choosing a solution that provides the smallest approximation error. Also, the studies of the accuracy of estimating the parameters of the Ramsey curve in accordance with the accuracy of the experimental data have been carried out. In order to simulate the presence of measurement errors, the values of a normally distributed random variable with a mathematical expectation equal to

zero and different values of the standard deviation for different series of computational experiments were added to the values of the deterministic sequence. Computational experiments have shown a significant sensitivity of the values of the Ramsey function parameters to the measurement accuracy of experimental data.

**Key words:** Ramsey curve, approximation, monotonicity conditions, kinds of logistic curves asymmetry, Sturm theorem on the number of polynomial roots in a given interval.

**Вступ.** Для різних предметних галузей актуальною є проблема підвищення точності оцінювання параметрів логістичних кривих за результатами експериментального дослідження динамічних процесів. Модель Рамсея найчастіше використовується в економічних дослідженнях [1 – 3, 5 – 7], але її застосування представляє інтерес і при моделюванні фізичних процесів. Криві з великою кількістю параметрів краще описують експериментальні залежності зі складною структурою, проте можуть втрачати очікувану форму при розв'язанні задач апроксимації без додаткових обмежень. Залучення лінеаризуючих перетворень, як правило, приводить до отримання зміщених оцінок параметрів наближаючої кривої. Вказані питання потребують подальшого дослідження, зокрема, стосовно кривої Рамсея та її модифікацій.

**Аналіз останніх досліджень.** Крива Рамсея, запропонована в роботі [7], відрізняється від інших  $S$  – подібних кривих тим, що в неї практично відсутня стадія повільного зростання. Позитивною якістю кривої Рамсея є можливість виконання її ідентифікації аналітично після застосування  $Z$  – перетворення [6].

У роботі [1] досліджуються особливості ідентифікації двопараметричної кривої Рамсея по послідовності експериментальних даних, що містять шуми, які моделюються значеннями нормально розподіленої випадкової величини з нульовим математичним сподіванням та обмеженою дисперсією. Автором публікації [1] порівнюється точність відновлення параметрів кривої Рамсея декількома методами розв'язання задачі апроксимації:

- з попереднім застосуванням  $Z$  – перетворення до моделі;
- методу узагальнених повних найменших квадратів;
- методу розширених інструментальних змінних.

На підставі аналізу результатів обчислювальних експериментів робиться висновок, що класичний метод найменших квадратів у комбінації з  $Z$  – перетворенням моделі приводить до отримання зміщених оцінок значень параметрів.

Переваги двох останніх методів виявляються в залежності від кроку дискретизації експериментальних даних.

У роботі [5] досліджуються модифіковані криві Рамсея з трьома і чотирма параметрами, які дозволяють зміщувати класичну криву Рамсея вздовж координатних осей. Для оцінки точності відновлення значень коефіцієнтів до детермінованої послідовності експериментальних даних також додається стохастична компонента. Для розв'язання задачі апроксимації застосовується класичний метод найменших квадратів у комбінації з  $Z$  – перетворенням та метод Левенберга – Марквардта. Суттєвої переваги одного методу перед іншими не виявлено. Очікувано точність ідентифікації в обох випадках зростає з ростом об'єму вибірки експериментальних даних. Авторами роботи [5] також окремо вивчається точність розв'язків задачі апроксимації експериментальних залежностей кривою Рамсея для випадків наявності та відсутності точки перегину.

**Постановка задачі.** Встановити умови збереження проміжків монотонності при апроксимації експериментальних даних кривими Рамсея та їх модифікаціями.

## Основні результати.

### 1. Дослідження властивостей функції Рамсея.

#### 1.1. Загальні положення.

Розглянемо цікавий з точки зору практичних застосувань випадок функції Рамсея, коли її графік проходить через початок координат:

$$f(x) = K + (-K + Bx) \cdot \exp(-rx), \quad (1)$$

де  $K \geq 0$ ,  $r \geq 0$ .

Для того, щоб функція (1) на проміжку  $[0; +\infty)$  монотонно зростала, її похідна на цьому проміжку повинна набувати додатних значень. Особливі структури виразів першої похідної:

$$\frac{d}{dx} f(x) = (B + rK - rBx) \cdot \exp(-rx) \quad (2)$$

та другої похідної функції (1):

$$\frac{d^2}{dx^2} f(x) = r \cdot (-2B - rK + rBx) \cdot \exp(-rx) \quad (3)$$

дозволяють використовувати *теорему Штурма* про кількість коренів полінома на відрізьку для контролю проміжків монотонності та опуклості функції Рамсея.

1.2. Дослідження умов монотонного зростання функції Рамсея на проміжку  $[0; +\infty)$ .

Із виразу (2) першої похідної функції Рамсея очевидно, що знак похідної залежить від першого множника, який є поліномом. Позначимо цей множник за  $G(x)$ :

$$G(x) = B + rK - rBx. \quad (4)$$

Побудуємо для полінома (4) систему поліномів Штурма (табл. 1):

$$G_0(x) = B + rK - rBx; \quad G_1(x) = -rB. \quad (5)$$

Таблиця 1 – Значення знаків системи поліномів Штурма для полінома (4) в точках 0 та  $+\infty$ 

| $Q$       | $G_0(Q)$             | $G_1(Q)$          |
|-----------|----------------------|-------------------|
| 0         | $\text{sgn}(B + rK)$ | $\text{sgn}(-rB)$ |
| $+\infty$ | $\text{sgn}(-rB)$    | $\text{sgn}(-rB)$ |

Таблиця 2 – Можливі випадки чергування знаків значень системи поліномів Штурма (5)

| № варіанта | $Q$       | $G_0(Q)$ | $G_1(Q)$ | Кількість змін знаків |
|------------|-----------|----------|----------|-----------------------|
| 1          | 0         | +        | +        | 0                     |
|            | $+\infty$ | +        | +        | 0                     |
| 2          | 0         | -        | -        | 0                     |
|            | $+\infty$ | -        | -        | 0                     |
| 3          | 0         | -        | +        | 1                     |
|            | $+\infty$ | +        | +        | 0                     |
| 4          | 0         | +        | -        | 1                     |
|            | $+\infty$ | -        | -        | 0                     |

Із даних табл. 2 робимо висновок, що монотонне зростання функції Рамсея (1) на проміжку  $[0; +\infty)$  забезпечується тільки при варіанті 1 зміни знаків. При чому використання нестрогих нерівностей не змінює нульової різниці кількості змін знаків поліномів Штурма в 0 та  $+\infty$ . Таким чином, для монотонного зростання функції Рамсея (1) на проміжку  $[0; +\infty)$  повинні виконуватися обмеження:

$$\{K \geq 0; \quad r \geq 0; \quad B \leq 0; \quad B + rK \geq 0. \quad (6)$$

## 1.3. Дослідження проміжків опуклості функції Рамсея.

Із виразу (3) другої похідної функції Рамсея очевидно, що знак другої похідної залежить від поліноміально-го множника  $(-2B - rK + rBx)$ . Позначимо його за  $P(x)$ :

$$P(x) = -2B - rK + rBx. \quad (7)$$

Побудуємо для полінома (7) систему поліномів Штурма (табл. 3):

$$P_0(x) = -2B - rK + rBx; \quad P_1(x) = rB. \quad (8)$$

Таблиця 3 – Значення знаків системи поліномів Штурма для полінома (7) в точках 0 та  $+\infty$ 

| $Q$       | $P_0(Q)$               | $P_1(Q)$         |
|-----------|------------------------|------------------|
| 0         | $\text{sgn}(-2B - rK)$ | $\text{sgn}(rB)$ |
| $+\infty$ | $\text{sgn}(rB)$       | $\text{sgn}(rB)$ |

Таблиця 4 – Можливі випадки чергування знаків значень системи поліномів Штурма (8)

| № варіанта | $Q$       | $P_0(Q)$ | $P_1(Q)$ | Кількість змін знаків |
|------------|-----------|----------|----------|-----------------------|
| 1          | 0         | +        | +        | 0                     |
|            | $+\infty$ | +        | +        | 0                     |
| 2          | 0         | -        | -        | 0                     |
|            | $+\infty$ | -        | -        | 0                     |
| 3          | 0         | -        | +        | 1                     |
|            | $+\infty$ | +        | +        | 0                     |
| 4          | 0         | +        | -        | 1                     |
|            | $+\infty$ | -        | -        | 0                     |

Враховуючи систему обмежень (6) на значення коефіцієнтів функції Рамсея, з табл. 4 для подальших досліджень обираємо варіанти 2 та 4.

При варіанті 2 функція Рамсея є опуклою на проміжку  $[0; +\infty)$ , а при варіанті 4 має одну точку перегину. Продовжимо дослідження четвертого варіанту, як більш цікавого для практичних застосувань. Таким чином, монотонне зростання функції Рамсея на проміжку  $[0; +\infty)$  з наявністю на цьому проміжку однієї точки перегину забезпечується системою нерівностей:

$$\begin{cases} K \geq 0; & r \geq 0; & B \leq 0; \\ & B + rK \geq 0; \\ & 2B + rK \leq 0. \end{cases} \quad (9)$$

або остаточно:

$$\begin{cases} K \geq 0; & r \geq 0; & B \leq 0; \\ & B \geq -rK; \\ & B \leq -\frac{rK}{2}. \end{cases} \quad (10)$$

Окремо відзначимо, що вимога  $B \leq 0$  є надлишковою, оскільки вона автоматично виконується при виконанні двох останніх нерівностей з системи (10) при вказаних значеннях параметрів  $K$  та  $r$ .

## 2. Дослідження властивостей модифікованих функцій Рамсея.

### 2.1. Модифікована функція Рамсея з кубічним поліномом.

У монографії [5, С. 38 – 40] вказується на можливість узагальнення функції Рамсея (1) за рахунок підвищення степеня поліноміального множника при експоненті, але одразу зазначається, що така модифікація без спеціальних обмежень на значення коефіцієнтів неминуче приведе до втрати логістичного характеру форми графіку модифікованої функції.

Розглянемо модифіковану криву Рамсея з кубічним поліномом:

$$f(x) = k_0 + (-k_0 + k_1x + k_2x^2 + k_3x^3) \cdot \exp(-rx), \quad (11)$$

де  $k_0 \geq 0, r \geq 0$ .

Перша похідна функції (11) може бути подана у вигляді:

$$\frac{d}{dx} f(x) = (k_1 + rk_0 + (2k_2 - rk_1)x + (3k_3 - rk_2)x^2 - rk_3x^3) \cdot \exp(-rx), \quad (12)$$

а друга похідна функції (11) – у вигляді:

$$\frac{d^2}{dx^2} f(x) = (2k_2 - 2rk_1 - r^2k_0 + (6k_3 - 4rk_2 + r^2k_1)x + r(-6k_3 + rk_2)x^2 + r^2k_3x^3) \cdot \exp(-rx). \quad (13)$$

Очевидно, що структура похідних модифікованої функції Рамсея (11) також дозволяє контролювати форму її графіку за допомогою згадуваної вище теореми Штурма.

#### 2.1.1. Дослідження умов монотонного зростання на проміжку $[0; +\infty)$ модифікованої функції Рамсея з кубічним поліномом.

Позначимо поліноміальний множник у виразі першої похідної (12) модифікованої функції Рамсея (11) за  $G(x)$ :

$$G(x) = k_1 + rk_0 + (2k_2 - rk_1)x + (3k_3 - rk_2)x^2 - rk_3x^3. \quad (14)$$

Побудуємо для полінома (14) систему поліномів Штурма:

$$G_0(x) = k_1 + rk_0 + (2k_2 - rk_1)x + (3k_3 - rk_2)x^2 - rk_3x^3;$$

$$G_1(x) = (2k_2 - rk_1) + 2(3k_3 - rk_2)x - rk_3x^2;$$

$$G_2(x) = -\frac{1}{9rk_3} \left( 6k_3k_2 + (6k_3k_1 - 2k_2^2)r + (k_1k_2 + 9k_3k_0)r^2 \right) + \frac{2}{9rk_3} \cdot (-9k_3^2 + (3k_3k_1 - k_2^2)r^2)x;$$

$$G_3(x) = \frac{9}{4} \cdot \frac{rk_3}{(-9k_3^2 + (3k_3k_1 - k_2^2)r^2)^2} \cdot \left( (18k_0k_1k_2k_3 - k_1^2k_2^2 + 4k_1^2k_3 - 4k_0k_2^3 + 27k_0^2k_3^2)r^4 - 4(3k_1k_3 - k_2^2)^2r^2 + 4k_3(9k_1k_2k_3 + 27k_0k_2^2 - 2k_2^3)r + 36k_3^2(3k_1k_3 - k_2^2) \right). \quad (15)$$

Введемо позначення для складових частин системи поліномів Штурма (15):

$$G_{2,0} = -\frac{1}{k_3} \left( 6k_3k_2 + (6k_3k_1 - 2k_2^2)r + (k_1k_2 + 9k_3k_0)r^2 \right);$$

$$G_{2,\infty} = \frac{1}{k_3} \cdot \left( -9k_3^2 + (3k_3k_1 - k_2^2)r^2 \right);$$

$$G_{3,0,\infty} = k_3 \cdot \left( (18k_0k_1k_2k_3 - k_1^2k_2^2 + 4k_1^2k_3 - 4k_0k_2^3 + 27k_0^2k_3^2)r^4 - 4(3k_1k_3 - k_2^2)^2 r^2 + \right. \\ \left. + 4k_3(9k_1k_2k_3 + 27k_0k_3^2 - 2k_2^3)r + 36k_3^2(3k_1k_3 - k_2^2) \right).$$

Таблиця 5 – Значення знаків системи поліномів Штурма для полінома (14) в точках 0 та  $+\infty$

| $Q$       | $G_0(Q)$                 | $G_1(Q)$                  | $G_2(Q)$                   | $G_3(Q)$                     |
|-----------|--------------------------|---------------------------|----------------------------|------------------------------|
| 0         | $\text{sgn}(k_1 + rk_0)$ | $\text{sgn}(2k_2 - rk_1)$ | $\text{sgn}(G_{2,0})$      | $\text{sgn}(G_{3,0,\infty})$ |
| $+\infty$ | $\text{sgn}(-rk_3)$      | $\text{sgn}(-rk_3)$       | $\text{sgn}(G_{2,\infty})$ | $\text{sgn}(G_{3,0,\infty})$ |

Очевидно, що в табл. 5 можливі 256 випадки різних розстановок знаків. З них необхідно відібрати ті, які задовольняють певним вимогам:

- 1)  $\text{sgn}(G_0(0)) > 0$ ;
- 2)  $\text{sgn}\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} G_0(x)\right) > 0$ ;
- 3)  $\text{sgn}\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} G_0(x)\right) = \text{sgn}\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} G_1(x)\right)$ ;
- 4)  $\text{sgn}(G_3(0)) = \text{sgn}\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} G_3(x)\right)$ ;
- 5)  $W(0) = W(+\infty)$ ,  $W$  – кількість змін знаків в рядках табл. 5.

Перша і друга вимоги забезпечують зростання функції (11), коли  $x=0$  та  $x \rightarrow +\infty$ . Третя вимога викликана тим, що коефіцієнти при старших мономах в поліномах  $G_0(x)$  та  $G_1(x)$  є однаковими. Четверта вимога відповідає тому факту, що поліном  $G_3(x)$  є константою і не змінює свого знаку. П'ята вимога відповідає умові теореми Штурма і забезпечує рівну кількість змін знаків в кожному рядку табл. 5.

Після врахування всіх перелічених вимог з 256 випадків залишається 10. Всі ці випадки забезпечують монотонне зростання модифікованої функції Рамсея на проміжку  $[0; +\infty)$ . Відзначимо, що в даному дослідженні не враховуються можливі нульові значення поліномів з системи Штурма, як малоймовірні, оскільки коефіцієнти поліномів розраховуються на підставі експериментальних даних, які містять похибки вимірювань.

Для кожного з 10 відібраних випадків формується система обмежень на коефіцієнти (15) модифікованої функції Рамсея та розв'язується відповідна задача умовної глобальної мінімізації середньоквадратичної похибки наближення. З отриманих розв'язків обирається той, який доставляє найменше значення цільової функції.

В табл. 6 наведені три з 10 випадків чергування знаків коефіцієнтів (15), які забезпечують монотонне зростання функції.

Таблиця 6 – Приклади можливих випадків чергування знаків значень системи поліномів Штурма (15)

| № варіанта | $Q$       | $G_0(Q)$ | $G_1(Q)$ | $G_2(Q)$ | $G_3(Q)$ | Кількість змін знаків |
|------------|-----------|----------|----------|----------|----------|-----------------------|
| 1          | 0         | +        | +        | +        | +        | 0                     |
|            | $+\infty$ | +        | +        | +        | +        | 0                     |
| 2          | 0         | +        | +        | +        | -        | 1                     |
|            | $+\infty$ | +        | +        | -        | -        | 1                     |
| 3          | 0         | +        | -        | +        | +        | 2                     |
|            | $+\infty$ | +        | +        | -        | +        | 2                     |

За табл. 6 робимо висновок, що варіанту 3, наприклад, відповідає система обмежень:

$$\begin{cases} k_0 \geq 0; \quad r \geq 0; \\ k_1 + rk_0 > 0; \\ 2k_2 - rk_1 < 0; \\ G_{2,0} > 0; \quad G_{3,0,\infty} > 0; \\ k_3 < 0; \quad G_{2,\infty} < 0. \end{cases} \quad (16)$$

Інші системи обмежень формуються аналогічно.

### 2.1.2. Дослідження проміжків опуклості модифікованої функції Рамсея з кубічним поліномом.

Із виразу (13) другої похідної модифікованої функції Рамсея (11) також очевидно, що знак другої похідної залежить від поліноміального множника, який позначимо за  $P(x)$ :

$$P(x) = 2k_2 - 2rk_1 - r^2k_0 + (6k_3 - 4rk_2 + r^2k_1)x + r(-6k_3 + rk_2)x^2 + r^2k_3x^3. \quad (17)$$

Побудуємо для полінома (17) систему поліномів Штурма:

$$P_0(x) = 2k_2 - 2rk_1 - r^2k_0 + (6k_3 - 4rk_2 + r^2k_1)x + r(-6k_3 + rk_2)x^2 + r^2k_3x^3; \quad (18)$$

$$P_1(x) = (6k_3 - 4rk_2 + r^2k_1) + 2r(-6k_3 + rk_2)x + 3r^2k_3x^2;$$

$$P_2(x) = \frac{1}{9rk_3} \left( -36k_3^2 + 12k_3k_2r + (12k_3k_1 - 4k_2^2)r^2 + (k_1k_2 + 9k_3k_0)r^3 \right) +$$

$$+ \frac{2}{9k_3} \cdot (18k_3^2 + (-3k_3k_1 + k_2^2)r^2)x;$$

$$P_3(x) = -\frac{9}{4} \cdot \frac{k_3}{(-18k_3^2 + (3k_3k_1 - k_2^2)r^2)^2} \times \left( (18k_0k_1k_2k_3 - k_1^2k_2^2 + 4k_1^2k_3 - 4k_0k_2^3 + 27k_0^2k_3^2)r^6 - \right.$$

$$\left. -4(3k_1k_3 - k_2^2)r^4 + 8k_3(9k_1k_2k_3 + 27k_0k_3^2 - 2k_2^3)r^3 + 144k_3^2(3k_1k_3 - k_2^2)r^2 - 432k_3^4 \right).$$

Введемо позначення для складових частин системи поліномів Штурма (18):

$$P_{2,0} = \frac{1}{k_3} \left( -36k_3^2 + 12k_3k_2r + (12k_3k_1 - 4k_2^2)r^2 + (k_1k_2 + 9k_3k_0)r^3 \right);$$

$$G_{2,\infty} = \frac{1}{k_3} \cdot (18k_3^2 + (-3k_3k_1 + k_2^2)r^2);$$

$$P_{3,0,\infty} = -k_3 \cdot \left( (18k_0k_1k_2k_3 - k_1^2k_2^2 + 4k_1^2k_3 - 4k_0k_2^3 + 27k_0^2k_3^2)r^6 - 4(3k_1k_3 - k_2^2)r^4 + \right.$$

$$\left. + 8k_3(9k_1k_2k_3 + 27k_0k_3^2 - 2k_2^3)r^3 + 144k_3^2(3k_1k_3 - k_2^2)r^2 - 432k_3^4 \right).$$

Таблиця 7 – Значення знаків системи поліномів Штурма для полінома (17) в точках 0 та  $+\infty$

| $Q$       | $P_0(Q)$                            | $P_1(Q)$                            | $P_2(Q)$                   | $P_3(Q)$                     |
|-----------|-------------------------------------|-------------------------------------|----------------------------|------------------------------|
| 0         | $\text{sgn}(2k_2 - 2rk_1 - r^2k_0)$ | $\text{sgn}(6k_3 - 4rk_2 + r^2k_1)$ | $\text{sgn}(P_{2,0})$      | $\text{sgn}(P_{3,0,\infty})$ |
| $+\infty$ | $\text{sgn}(k_3)$                   | $\text{sgn}(k_3)$                   | $\text{sgn}(P_{2,\infty})$ | $\text{sgn}(P_{3,0,\infty})$ |

У табл. 7 також можливі 256 випадки різних розстановок знаків. У разі наявності апріорної інформації про кількість точок перегину досліджуваної функції, з повного набору відбирають ті випадки, які забезпечують потрібну кількість точок перегину. Цими обмеженнями доповнюють обмеження з пп. 2.1.1.

### Результати обчислювальних експериментів.

Загальні умови проведення обчислювальних експериментів.

Усі обчислювальні експерименти з оцінки параметрів кривої Рамсея та її модифікацій проводилися шляхом розв'язання задачі умовної глобальної оптимізації з цільовою функцією:

$$S = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N (f(x_i) - y_i)^2, \quad (19)$$

де  $N$  – кількість експериментальних даних;  $(x_i; y_i)$  – координати експериментальних точок;  $f(x)$  – рівняння кривої Рамсея або її модифікацій.

Обмеження на припустимі значення оцінок параметрів описуються нижче, в кожному тестовому прикладі окремо, відповідно до умов збереження проміжків монотонного зростання та наявності точок перегину в досліджуваній кривій Рамсея або її модифікацій.

Для імітації наявності похибок вимірювань до значень детермінованої послідовності додаються значення нормально розподіленої випадкової величини  $\xi_i$  з математичним сподіванням  $M(\xi) = 0$  та середньо квадратичним відхиленням  $\sigma(\xi) = 5 \cdot 10^{-2}$  або  $\sigma(\xi) = 1 \cdot 10^{-2}$ .

Для знаходження оцінок параметрів досліджуваних моделей за згенерованими експериментальними даними використовується метод Conjugate Direction with Orthogonal Shift (CDOS), що реалізований в пакеті DirectSearch, який сумісний з математичним процесором Maple [4].

Для пошуку умовного глобального екстремуму задачі оптимізації методом CDOS необхідно вказувати діапазони змін початкових значень шуканих параметрів. Як відомо [1], традиційна крива Рамсея може бути лінеаризована відносно своїх параметрів за допомогою  $Z$  – перетворення. Тому на допоміжному кроці оцінки параметрів кривої Рамсея можуть бути отримані за методикою, описаною в роботі [1]. На їх підставі визначається інтервал зміни значень шуканої оцінки параметра  $\theta^*$  як  $[0,5 \cdot \theta^*; 1,5 \cdot \theta^*]$ , який може бути розширений у разі локалізації точки умовного глобального екстремуму в околах кінців вказаного відрізка. Задача встановлення проміжків зміни шуканих оцінок параметрів кривої Рамсея та її модифікацій є окремою задачею і виходить за межі даного дослідження.

Потреба в повторному розв'язанні задачі оцінювання параметрів досліджуваної кривої обумовлюється низкою причин. По-перше, отримані після лінеаризації оцінки значень параметрів є зміщеними оцінками [1]. По-друге, розглянуті в статті модифікації кривої Рамсея не можуть бути реалізовані вказаним в роботі [1] методом.

### Тест 1. Оцінка параметрів кривої Рамсея з трьома параметрами.

Змодельємо послідовність експериментальних даних на основі кривої Рамсея з параметрами  $K=1$ ,  $r=1$ ,  $B=-0.75$ :

$$f(x) = 1 + (-1 - 0.75x) \cdot \exp(-x). \quad (20)$$

Нехай для обчислювального експерименту число експериментальних даних становить  $N=11$ , які генеруються в рівновіддалених точках відрізка  $[0; 5]$  з кроком  $\Delta x = 0.5$ .

Оцінимо значення параметрів кривої (1) за експериментальними даними  $(x_i; y_i)$ , де  $x_i = 0 + (i-1) \cdot \Delta x$ ;  $i=1 \dots N$ ;  $y_i = f(x_i) + \xi_i$ ; функція  $f(x)$  визначається формулою (20).

Для цього розв'яжемо задачу умовної глобальної оптимізації з цільовою функцією (19) та обмеженнями (6). Приклади ідентифікації функції (20) за випадково згенерованими послідовностями експериментальних даних представлені в табл. 8 та на рис. 1.

Таблиця 8 – Результати оцінювання параметрів функції (20)

| Метод оцінювання         | $\sigma(\xi)$     | Оцінки параметрів функції (20) |       |      | Середньо квадратична похибка апроксимації |
|--------------------------|-------------------|--------------------------------|-------|------|---|
|                          |                   | $K$                            | $B$   | $r$  |   |
| Точні значення           | 0,00              | 1,00                           | -0,75 | 1,00 | 0,00                                      |
| Оцінки за допомогою CDOS | $5 \cdot 10^{-2}$ | 1,27                           | -0,00 | 0,33 | $3,91 \cdot 10^{-3}$                      |
|                          | $1 \cdot 10^{-2}$ | 1,00                           | -0,75 | 1,00 | $1,10 \cdot 10^{-4}$                      |

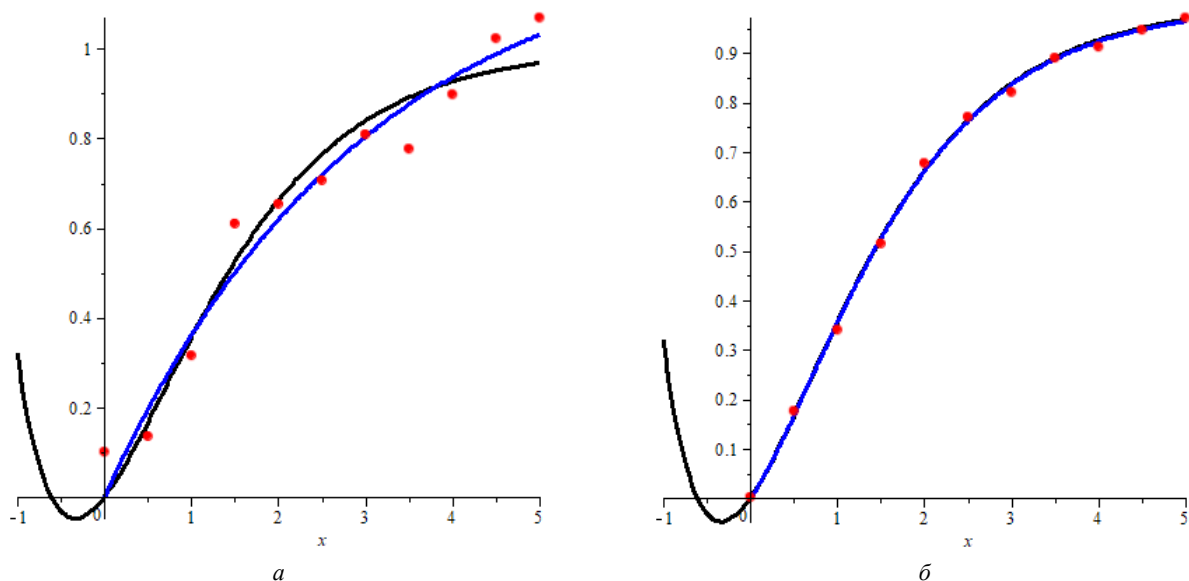


Рис. 1 – Приклади ідентифікації функції (20), коли: а –  $\sigma(\xi) = 5 \cdot 10^{-2}$ ; б –  $\sigma(\xi) = 1 \cdot 10^{-2}$ ;

— — графік функції (20) з точними значеннями параметрів; — — графік функції (1) з оцінками параметрів;  
• — точки експериментальної послідовності.

З рис. 1 очевидно, що точність оцінювання параметрів очікувано залежить від точності визначення експериментальних даних. Але за будь-яких обставин відновлена функція є зростаючою на проміжку  $[0; +\infty)$ , навіть, коли експериментальна залежність на цьому проміжку не є монотонною (рис. 1).

### Тест 2. Оцінка параметрів кривої Рамсея з п'ятьма параметрами.

Змодельємо послідовність експериментальних даних на основі кривої Рамсея (11) з параметрами  $k_0 = 1$ ,  $k_1 = -0.75$ ,  $k_2 = 0.5$ ,  $k_3 = -0.4$ ,  $r = 1$ :

$$f(x) = 1 + (-1 - 0.75x + 0.5x^2 - 0.4x^3) \cdot \exp(-x). \quad (21)$$

На відрізку  $[0; 10]$  згенеруємо експериментальну послідовність із 21 точки з кроком по осі абсцис  $\Delta x = 0.5$ .

Параметри стохастичної компоненти збережемо рівними до обраних в тесті 1.

Для оцінки параметрів кривої (11) розв'яжемо задачу умовної глобальної оптимізації з цільовою функцією (19) та кожним набором обмежень, які обговорювалися в пп. 2.1.1. Приклади ідентифікації функції (21) за випадково згенерованими послідовностями експериментальних даних представлені в табл. 9 та на рис. 2.

Для обох значень дисперсії стохастичної компоненти розв'язок оптимізаційної задачі був знайдений для обмежень виду:

$$\begin{cases} k_0 \geq 0; & r \geq 0; \\ k_1 + rk_0 > 0; \\ 2k_2 - rk_1 > 0; \\ G_{2,0} < 0; & G_{3,0,\infty} < 0; \\ k_3 < 0; & G_{2,\infty} > 0. \end{cases}$$

Таблиця 9 – Результати оцінювання параметрів функції (21)

| Метод оцінювання         | $\sigma(\xi)$     | Оцінки параметрів функції (21) |       |       |       |      | Середньо квадратична похибка апроксимації |
|--------------------------|-------------------|--------------------------------|-------|-------|-------|------|---|
|                          |                   | $k_0$                          | $k_1$ | $k_2$ | $k_3$ | $r$  |   |
| Точні значення           | 0,00              | 1,00                           | -0,75 | 0,50  | -0,40 | 1    | 0,00                                      |
| Оцінки за допомогою CDOS | $5 \cdot 10^{-2}$ | 0,98                           | -0,50 | 0,12  | -0,21 | 0,91 | $2,87 \cdot 10^{-3}$                      |
|                          | $1 \cdot 10^{-2}$ | 1,00                           | -0,47 | 0,13  | -0,25 | 0,94 | $1,10 \cdot 10^{-4}$                      |

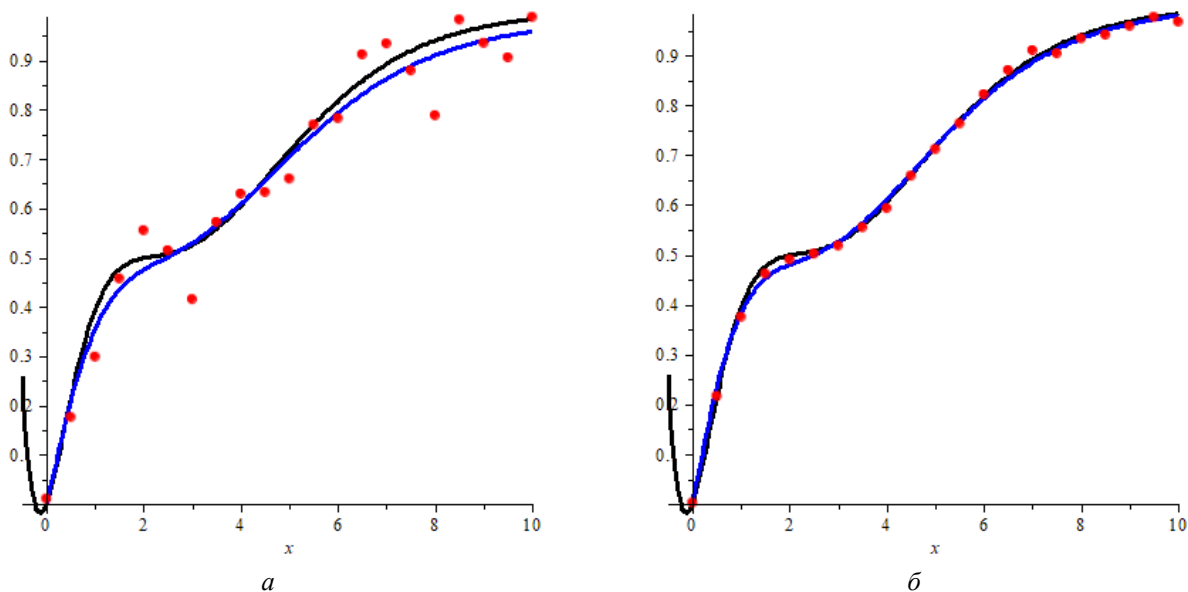


Рис. 2 – Приклади ідентифікації функції (21), коли:  $a - \sigma(\xi) = 5 \cdot 10^{-2}$ ;  $b - \sigma(\xi) = 1 \cdot 10^{-2}$ ;

— — графік функції (21) з точними значеннями параметрів; — — графік функції (11) з оцінками параметрів;  
 • — точки експериментальної послідовності.

**Перспективи подальших досліджень.** Практичний та теоретичний інтерес представляють дослідження



властивостей інших модифікацій кривої Рамсея. Серед них відзначимо такі.

У подальших дослідження доцільно розглянути модифіковану функцію Рамсея з мономами довільних степенів:

$$f(x) = K + (-K + Bx^b) \cdot \exp(-rx^a), \quad (22)$$

де  $K \geq 0$ ,  $r \geq 0$ ,  $a, b \in \mathbb{N}$ ,  $a, b \geq 2$ .

Перша похідна функції (22) може бути подана у вигляді:

$$\frac{d}{dx} f(x) = (arKx^{a-1} + bBx^{b-1} - arBx^{a+b-1}) \cdot \exp(-rx^a), \quad (23)$$

а друга похідна функції (22) – у вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} f(x) = & (a^2r^2Bx^{2a+b-2} - arB(a+2b-1)x^{a+b-2} - a^2r^2Kx^{2a-2} + \\ & + arK(a-1)x^{a-2} + bB(b-1)x^{b-2}) \cdot \exp(-rx^a). \end{aligned} \quad (24)$$

Оскільки типовою є вимога неперервності першої та другої похідної апроксимуючої функції, тому логічно розглядати показники степенів мономів, які є більшими за 2, тобто  $a, b \in \mathbb{N}$ ,  $a, b \geq 2$ , як це впливає з виразів похідних (23) та (24).

Певним обмеженням для практичного застосування функції (22) є необхідність попереднього встановлення значень показників степенів  $a$  і  $b$  за інформацією з предметної галузі, для якої виконується моделювання.

При відомих значеннях показників степенів  $a$  і  $b$  реалізація алгоритму формування обмежень, які забезпечують монотонність апроксимуючої функції та наявність в неї заданої кількості точок перегину, повністю співпадає з описаною вище в пп. 1.2, 2.1.

Очевидною наступною модифікацією кривої Рамсея є функція:

$$f(x) = K + (-K + P(x)) \cdot \exp(-rx^a), \quad (25)$$

де  $K \geq 0$ ,  $r \geq 0$ ,  $P(x) = \sum_{i=1}^n k_i x^i$ ,  $a \in \mathbb{N}$ ,  $a \geq 2$ .

Перша похідна функції (25) може бути подана у вигляді:

$$\frac{d}{dx} f(x) = \left( arx^{a-1}(K - P(x)) + \frac{d}{dx} P(x) \right) \cdot \exp(-rx^a), \quad (26)$$

а друга похідна функції (25) – у вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} f(x) = & \left( ar(a-1)(K - P(x))x^{a-2} - arx^{a-1} \frac{d}{dx} P(x) + \frac{d^2}{dx^2} P(x) - \right. \\ & \left. - arx^{a-1} \left( arx^{a-1}(K - P(x)) + \frac{d}{dx} P(x) \right) \right) \cdot \exp(-rx^a). \end{aligned} \quad (27)$$

Для забезпечення неперервності першої та другої похідної апроксимуючої функції (25) також доцільно розглядати показник степеня  $a \geq 2$ .

Для зведення подібних доданків у поліноміальних множниках похідних (26) та (27) показник степеня  $a$  та степінь  $n$  полінома  $P(x)$  повинні бути відомими під час виконання апроксимації функцією (25).

**Висновки.** У даній роботі на підставі теореми Штурма про кількість коренів полінома на відрізьку розроблено алгоритм ідентифікації модифікованих кривих Рамсея. В явному вигляді виписані обмеження на коефіцієнти рівнянь цих кривих, які забезпечують збереження ними  $S$  – подібної форми. Це дозволило дослідити властивості таких модифікацій кривої Рамсея, які схильні втрачати логістичну форму при їх використанні в якості апроксимуючих функцій.

На відміну від інших дослідників розв'язання відповідних задач апроксимації здійснювалося за допомогою методу Conjugate Direction with Orthogonal Shift (CDOS) [4], який дозволяє не виконувати лінеаризацію моделі.

Точність оцінювання параметрів розглянутих в статті модифікацій кривої Рамсея суттєво залежить від величини дисперсії стохастичної компоненти експериментальної залежності. Даний висновок збігається з висновками інших дослідників, які вивчали властивості інших модифікацій кривої Рамсея.

## Список літератури

1. *Иванов Д. В.* Модифицированный метод идентификации логистической кривой Рамсея // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. – 2020. – № 8(2). – С. 18 – 88.
2. *Конюховский П. В.* Микроэкономическое моделирование банковской деятельности. – СПб. : Питер, 2001. – 224 с.
3. *Крянев А. В., Лукин Г. В.* Математические методы обработки неопределенных данных. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 216 с.
4. *Моисеев С. Н.* Универсальный метод оптимизации без использования производных с квадратичной сходимостью. – Воронеж, 2011. – Режим доступа – <http://www.twirpx.com/file/1534928/>. – Дата звертання : 05 вересня 2021.
5. *Семеновичев В. К., Кожухова В. Н.* Анализ и предложения моделей экономической динамики с кумулятивным логистическим трендом: Монография. – Самара : СамНЦ РАН, 2013. – 156 с
6. *Семеновичев В. К., Семеновичев Е. В.* Информационные системы в экономике. Эконометрическое моделирование инноваций. Часть 1. – Самара : Изд-во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2006. – 217 с.
7. *Ramsay J. O.* A Comparative Study of Several Robust Estimates of Slope, Intercept a Scale in Linear Regression // Journal of the American Statistical Association. – 1977. – Vol.72. – № 359. – P. 608 – 615.

## References (transliterated)

1. Ivanov D. V. Modifitsirovannyi metod identifikatsii logisticheskoy krivoy Ramseya [Modified Ramsey Logistic Curve Identification Method]. *Modelirovanie, optimizatsiya i informatsionnye tekhnologii* [Modeling, optimization and information]. 2020, no. 8(2), pp. 18–88.
2. Konyukhovskiy P. V. *Mikroekonomicheskoe modelirovanie bankovskoy deyatelnosti* [Microeconomic Modeling of Banking]. Saint Petersburg, Piter Publ., 2001. 224 p.
3. Kryanov A. V., Lukin G. V. *Matematicheskie metody obrabotki neopredelennykh dannykh* [Mathematical Methods for Processing Undefined Data]. Moscow, FIZMATLIT Publ., 2003. 216 p.
4. Moiseev S. N. *Universal'nyy metod optimizatsii bez ispol'zovaniya proizvodnykh s kvadrachnoy skhodimost'yu* [Universal Derivative-Free Optimization Method with Quadratic Convergence]. Voronezh, 2011. Available at : <http://www.twirpx.com/file/1534928/> (accessed 5 September 2021).
5. Semenychev V. K., Kozhukhova V. N. *Analiz i predlozheniya modeley ekonomicheskoy dinamiki s kumulyativnym logisticheskim trendom* : *Monografiya* [Analysis and Proposals of Models of Economic Dynamics with a Cumulative Logistic Trend: Monograph]. Samara, SamNTs RAN Publ., 2013. 156 p.
6. Semenychev V. K., Semenychev E. V. *Informatsionnye sistemy v ekonomike. Ekonometricheskoe modelirovanie innovatsiy. Chast 1* [Information Systems in the Economy. Econometric Modeling of Innovation. Part 1]. Samara, Izd-vo Samar. gos. aerokosm. un-ta Publ., 2006. 217 p.
7. Ramsay J. O. A Comparative Study of Several Robust Estimates of Slope, Intercept a Scale in Linear Regression. *Journal of the American Statistical Association*. 1977, vol.72, no. 359, pp. 608–615.

Надійшла (received) 29.09.2021

## Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

**Курносенко Дар'я Вікторівна** – аспірант, Херсонська державна морська академія, м. Херсон; тел.: (095) 549-43-72; e-mail: [dasha10021991@gmail.com](mailto:dasha10021991@gmail.com).

**Курносенко Дарья Викторовна** – аспірант, Херсонская государственная морская академия, г. Херсон; тел.: (095) 549-43-72; e-mail: [dasha10021991@gmail.com](mailto:dasha10021991@gmail.com).

**Kurnosenko Daria Viktorivna** – PhD Student, Kherson State Maritime Academy, Kherson; tel.: (095) 549-43-72; e-mail: [dasha10021991@gmail.com](mailto:dasha10021991@gmail.com).

**Савчук Володимир Петрович** – кандидат технічних наук, доцент, Херсонська державна морська академія, м. Херсон; тел.: (067) 489-77-64; e-mail: [postsavchuk@gmail.com](mailto:postsavchuk@gmail.com).

**Савчук Владимир Петрович** – кандидат технических наук, доцент, Херсонская государственная морская академия, г. Херсон; тел.: (067) 489-77-64; e-mail: [postsavchuk@gmail.com](mailto:postsavchuk@gmail.com).

**Savchuk Volodymyr Petrovych** – Candidate of Technical Sciences, Docent, Kherson State Maritime Acad, Kherson; tel.: (067) 489-77-64; e-mail: [postsavchuk@gmail.com](mailto:postsavchuk@gmail.com).

**Тулущенко Галина Яківна** – доктор технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (095) 465-70-60; e-mail: [tuluchenko.galina@ukr.net](mailto:tuluchenko.galina@ukr.net).

**Тулущенко Галина Яковлевна** – доктор технических наук, профессор, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: (095) 465-70-60; e-mail: [tuluchenko.galina@ukr.net](mailto:tuluchenko.galina@ukr.net).

**Tuluchenko Halyna Yakivna** – Doctor of Technical Sciences, Professor, National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute», Kharkiv; tel.: (095) 465-70-60; e-mail: [tuluchenko.galina@ukr.net](mailto:tuluchenko.galina@ukr.net).