

А. В. ВОРОПАЙ, П. А. ЕГОРОВ

ВЫДЕЛЕНИЕ УПРУГОЙ, ВЯЗКОЙ И ИНЕРЦИОННОЙ СОСТАВЛЯЮЩИХ ИЗ ПОЛНОЙ РЕАКЦИИ ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ОПОРЫ, ПРИСОЕДИНЕННОЙ К ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЕ

Рассматривается механическая система, состоящая из прямоугольной пластины, опертой по контуру, и дополнительной вязкоупругой опоры с учётом её массово-инерционных характеристик. Влияние характеристик дополнительной опоры на деформированное состояние пластины исследуется с помощью оригинального подхода для разделения упругой, вязкой и инерционной составляющих из общей реакции. Предполагается, что пластина имеет прямоугольную форму, среднюю толщину и является изотропной и упругой. Используются уравнения деформирования пластины в рамках гипотез Тимошенко. Колебания пластины вызваны приложением внешнего нестационарного нагружения. Влияние дополнительной опоры заменяется действием трёх неизвестных независимых нестационарных сосредоточенных сил. В работе приведены основные аналитические соотношения для получения системы трёх интегральных уравнений Вольтерра. Полученная система решается численно-аналитически. После выполнения дискретизации по времени система интегральных уравнений преобразуется в систему матричных уравнений. Полученная система матричных уравнений решается с использованием обобщенного алгоритма Крамера для блочных матриц и метода регуляризации А. Н. Тихонова. Укажем, что изложенный подход применим и для других объектов, имеющих дополнительные опоры (балки, пластины и оболочки, которые могут иметь различное опирание по контуру и разные формы в плане). Приведены результаты вычислений по определению составляющих (вязкой, упругой и инерционной) полной реакции на пластину, возникающей из-за наличия дополнительной опоры. Достоверность предлагаемого подхода подтверждается совпадением результатов сопоставления реакций, найденных двумя методами: численно-аналитическим для одной полной реакции и численным для суммарной реакции (полученной, сложением трех составляющих).

Ключевые слова: нестационарные колебания, прямоугольная пластина средней толщины, дополнительная вязкоупругая опора, массово-инерционные характеристики, сосредоточенная масса, интегральное уравнение Вольтерра.

О. В. ВОРОПАЙ, П. А. ЕГОРОВ

ВИДІЛЕННЯ ПРУЖНОЇ, В'ЯЗКОЇ ТА ІНЕРЦІЙНОЇ СКЛАДОВИХ З ПОВНОЇ РЕАКЦІЇ ДОДАТКОВОЇ ОПОРИ, ПРИЄДНАНОЇ ДО ПРЯМОКУТНОЇ ПЛАСТИНИ

Розглядається механічна система, яка складається з прямокутної пластини, опертої по контуру та додаткової в'язкопружної опори з урахуванням її масово-інерційних характеристик. Вплив характеристик додаткової опори на деформований стан пластини досліджується за допомогою оригінального підходу для поділу пружної, в'язкої та інерційної складових із повної реакції. Передбачається, що пластина має прямокутну форму, середню товщину, а також є ізотропною і пружною. Використовуються рівняння деформування пластини в рамках гіпотез Тимошенко. Коливання пластини викликані прикладенням зовнішнього нестационарного навантаження. Вплив додаткової опори замінюється дією трьох невідомих незалежних нестационарних зосереджених сил. У роботі наведені основні аналітичні співвідношення для отримання системи трьох інтегральних рівнянь Вольтерра. Отримана система розв'язується чисельно-аналітично. Після виконання дискретизації за часом система інтегральних рівнянь перетворюється в систему матричних рівнянь. Отримана система матричних рівнянь розв'язується з використанням узагальненого алгоритму Крамера для блокових матриць і методу регуляризації А. М. Тихонова. Зазначимо, що викладений підхід може бути застосовано і для інших об'єктів, що мають додаткові опорні (балки, пластини і оболонки, які можуть мати різне опирання по контуру і різні форми в плані). Наведено результати обчислень по визначенню складових (пружної, в'язкої та інерційної) повної реакції на пластину, що виникає внаслідок наявності додаткової опори. Достовірність запропонованого підходу підтверджується збігом результатів зіставлення реакцій, знайдених двома методами: чисельно-аналітичним для однієї повної реакції і чисельним для сумарної реакції (отриманої, складанням трьох складових).

Ключові слова: нестационарні коливання, прямокутна пластина середньої товщини, додаткова в'язкопружна опора, масово-інерційні характеристики, зосереджена маса, інтегральне рівняння Вольтерра.

A. V. VOROPAY, P. A. YEGOROV

EXTRACTION OF ELASTIC, VISCOUS AND INERTIAL COMPONENTS FROM THE TOTAL REACTION OF AN ADDITIONAL SUPPORT ATTACHED TO A RECTANGULAR PLATE

The paper deals with a mechanical system consisting of a hinged rectangular plate and an additional viscoelastic support with considering its mass-inertia. The impact of the characteristics of additional support on the plate strained state is studied by an original approach of extracting elastic, viscous and inertial components from the total reaction. The plate is assumed to be medium thickness, elastic and isotropic. The Timoshenko hypothesis is used for deformation equations. The external non-stationary force initiates plate vibrations. The impact of the additional support is replaced by the action of three unknown independent non-stationary concentrated forces. The basic formulas for deriving system of three Volterra integral equations are proposed. The system is then solved by numerical and analytical method. By discretizing in time the system of Volterra integral equations is reduced to a system of matrix equations. The system of matrix equations is solved with using generalized Kramer's algorithm for block matrices and Tikhonov's regularization method. Note that the approach proposed is applicable for other objects with additional supports, such as beams, plates and shells having various boundary contour and boundary supporting. The results of computing elastic, viscous and inertial components of total reactions on the plate are given. The approach proposed is verified by matching the results of computations by two different methods, namely numerical and analytical for one total reaction and numerical for the total reaction obtained by adding elastic, viscous and inertial components.

Key words: non-stationary vibrations, medium thickness rectangular plate, additional viscoelastic support, mass-inertial characteristics, concentrated mass, Volterra integral equation.

Введение и постановка задачи. При необходимости повысить жесткость, прочность или несущую способность конструкций используются *дополнительные опоры*. Также опоры и демпферы могут применяться с целью уменьшения амплитуд перемещений или гашения колебаний, в задачах виброзащиты, а также управления напряженно-деформированным состоянием. Во многих литературных источниках описано деформирование

подпертых элементов конструкций с использованием абсолютно жестких дополнительных опор или ребер жесткости. В реальности дополнительные опоры имеют вязкоупругие, а также инерционные свойства, то есть имеют вязкую, упругую и инерционную составляющие.

Существует значительное количество работ, в которых рассматриваются прямые постановки задач для конструкций с учетом инерционных характеристик объектов. Так в монографии [1] рассматривается влияние подвижной массы на балку и тонкую прямоугольную пластину, лежащую на упругом основании. В статье [2] рассмотрены многопролетные балки на упругих опорах при подвижной нагрузке, задачи решаются с использованием *метода Ньютона* и *итерационных схем* для определения прогиба балки с учетом жесткости дополнительных опор. В работе [3] представлены решения прямой и обратной задач для балок с дополнительными опорами, однако учитываются только упругие их характеристики.

Исследование вязкоупругих характеристик опор при динамическом взаимодействии моста и подвижного состава приведены в [4]. В статье [5] рассматриваются вынужденные колебания тонкой пластины с *дискретным динамическим гасителем* с использованием метода конечных элементов. В [6] рассмотрен активный гаситель колебаний для изгибающейся пластинки, который контактирует с ней по границе, однако сама пластина представлена, по сути, в виде колеблющейся массы.

Данная статья является продолжением исследований *нестационарного деформирования механических систем*, состоящих из балок и пластин, которые, кроме основного опирания по контуру, имеют дополнительные сосредоточенные опоры. В предыдущих работах [7 – 9] приведены решения прямых и обратных задач для пластин с дополнительной вязкоупругой опорой. В статье [7] описаны возможные постановки обратных задач, а также приведено решение одной обратной задачи идентификации неизвестной нагрузки, вызывающей нестационарное деформирование пластины с дополнительной опорой. В работе [8] основное внимание посвящено учету массово-инерционной характеристики дополнительной вязкоупругой опоры при моделировании, а в статье [9] предложен метод разделения реакции вязкоупругой опоры на вязкую и упругую составляющие.

В случае, когда при решении задачи приоритетом является определение внешнего возмущающего воздействия во времени $P(t)$, методика, описанная в работе [8], демонстрирует достаточно высокую эффективность. В указанных задачах (рис. 1, а) влияние вязкоупругой опоры, заменялось одной реакцией:

$$R_i(t) = m \frac{d^2 w(t)}{dt^2} + \kappa \frac{dw(t)}{dt} + c \cdot w(t), \quad (1)$$

что позволяло определить ее в результате решения соответствующей прямой или обратной задачи.

Выражение для прогиба в точке приложения полной реакции вязкоупругой опоры с учетом её массы будет:

$$w_i(t) = \int_0^t K_{fi}(t-\tau) R(\tau) d\tau, \text{ где } K_{fi}(t) = \frac{1}{m_i} \frac{1}{\omega_{CDi}} \cdot e^{-\frac{\kappa_i t}{2m_i}} \cdot \sin(\omega_{CDi} \cdot t).$$

Укажем, что $K_{fi}(t)$ – конечно-разностное ядро интеграла типа свёртки, учитывающее вязкие, упругие и массово-инерционные характеристики дополнительной опоры в i -й точке, а $\omega_{CDi} = \sqrt{c_i/m_i - 0.25 \cdot \kappa_i^2/m_i^2}$ – собственная частота, соответствующая i -й дополнительной вязкоупругой опоре с учетом её массы.

Однако для задач, связанных с идентификацией параметров вязкоупругой опоры (жесткости, вязкости и массы), или при оптимальном проектировании дополнительных опор, снижающих амплитуды прогибов, определение полной реакции недостаточно. Необходимо знать отдельно влияние вязкой и упругой, а также инерционной составляющих реакции. В этом случае целесообразно рассмотреть задачу в следующей постановке: пусть прямоугольная пластина имеет две независимые дополнительные опоры – вязкую (*демпфирующую*) и линейно-упругую, которые приложены в двух разных точках (рис. 1, б), а также к пластине присоединена сосредоточенная масса, вес которой равен весу дополнительной вязкоупругой опоры. Считается, что точка D с координатами проекции в срединной плоскости пластины (x_D, y_D) – это место контакта с демпфером, действие которого заменяется реакцией $R_D(t) = \kappa \cdot dw(x_D, y_D, t)/dt$, точка C с координатами (x_C, y_C) – место контакта с линейно-упругой дополнительной опорой (своего рода жесткой пружиной), реакция которой $R_C(t) = c \cdot w(x_C, y_C, t)$, а точка M с координатами (x_M, y_M) – место присоединения сосредоточенной массы. При решении задачи предполагается, что точки C , D и M не совпадают, то есть, получены аналитические соотношения для общего случая – пластины с дополнительной линейно-упругой и линейно-вязкой опорой, а также присоединённой сосредоточенной массой. Хотя с точки зрения механики, если точки расположены на небольшом расстоянии, то в силу принципа суперпозиции совместное воздействие вязкой и линейно-упругой опор, а также сосредоточенной массы эквивалентно действию вязкоупругой опоры с учётом её массово-инерционных характеристик:

$$R(t) = R_M(t) + R_D(t) + R_C(t).$$

Вычислительные эксперименты показали, что полученное решение оказалось справедливо и для частного случая, когда координаты точек C , D и M совпадают, поскольку разрешающая система уравнений получилась невырожденной.

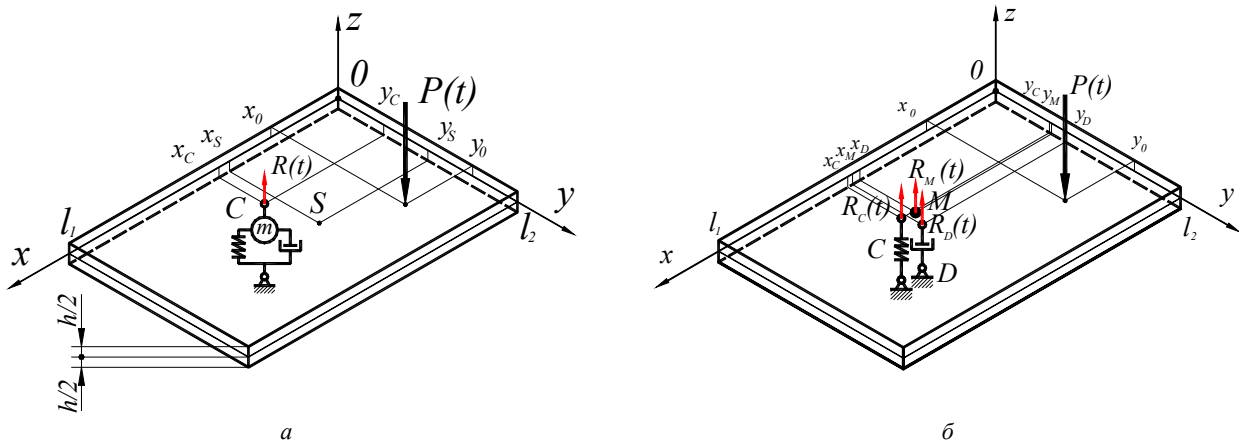


Рис. 1 – Схема нагружения:

a – пластина с дополнительной вязкоупругой опорой; *б* – пластина с независимыми дополнительными опорами.

Прямая задача. Выражение для прогиба пластины в случае, когда на неё действует несколько независимых поперечных нагрузок ($P_i(t)$, $i \in \overline{1, N}$), приведенное, например, в [10], имеет следующий вид:

$$w(x, y, t) = \sum_{i=1}^N \int_0^t K_i(x, y, t-\tau) \cdot P_i(\tau) d\tau, \quad (2)$$

где $w(x, y, t)$ – изменение прогиба пластины во времени; $K_i(x, y, t)$ – разностное ядро интегрального уравнения, типа свертки, для i -той нагрузки в точке пластины с координатами (x, y) . Методы получения ядер и их вид также описаны в [10].

На основе (2) можно записать следующие выражения для точек контакта с демпфером (x_D, y_D) , линейно-упругой дополнительной опорой (x_C, y_C) и сосредоточенной массой (x_M, y_M) :

$$\begin{cases} w(x_C, y_C, t) = \int_0^t K_{PC}(t-\tau) \cdot P(\tau) d\tau - \int_0^t K_{CC}(t-\tau) \cdot R_C(\tau) d\tau - \int_0^t K_{CD}(t-\tau) \cdot R_D(\tau) d\tau - \int_0^t K_{CM}(t-\tau) \cdot R_M(\tau) d\tau; \\ w(x_D, y_D, t) = \int_0^t K_{PD}(t-\tau) \cdot P(\tau) d\tau - \int_0^t K_{DC}(t-\tau) \cdot R_C(\tau) d\tau - \int_0^t K_{DD}(t-\tau) \cdot R_D(\tau) d\tau - \int_0^t K_{DM}(t-\tau) \cdot R_M(\tau) d\tau; \\ w(x_M, y_M, t) = \int_0^t K_{PM}(t-\tau) \cdot P(\tau) d\tau - \int_0^t K_{MC}(t-\tau) \cdot R_C(\tau) d\tau - \int_0^t K_{MD}(t-\tau) \cdot R_D(\tau) d\tau - \int_0^t K_{MM}(t-\tau) \cdot R_M(\tau) d\tau, \end{cases} \quad (3)$$

где $P(t)$ – внешняя возмущающая нестационарная нагрузка; $K_{ij}(t)$ – ядра, записанные для конкретной i -той нагрузки в j -той точке, вид которых будет приведен ниже; $R_C(t)$, $R_D(t)$ и $R_M(t)$ – соответствующие реакции в точках контакта с массой, демпфером и линейно-упругой опорой.

Укажем, что реакции $R_C(t)$, $R_D(t)$ и $R_M(t)$, действующие со стороны дополнительных опор и массы на пластину, считались условно отрицательными (взяты в выражениях (3) со знаком минус), действия со стороны пластины на массу, демпфер и пружину считались равными по величине, но условно положительными (для удобства записи):

$$R_M(t) = +m \frac{d^2 w(x_M, y_M, t)}{dt^2}, \quad R_D(t) = +\kappa \cdot \frac{dw(x_D, y_D, t)}{dt} \quad \text{и} \quad R_C(t) = +c \cdot w(x_C, y_C, t). \quad (4)$$

Из соотношений (4) для прогибов в точках (x_M, y_M) , (x_D, y_D) и (x_C, y_C) можно получить следующие выражения:

$$w(x_M, y_M, t) = \frac{1}{m} \int_0^t R_M(\tau) (t-\tau) d\tau, \quad w(x_D, y_D, t) = \frac{1}{\kappa} \int_0^t R_D(\tau) d\tau \quad \text{и} \quad w(x_C, y_C, t) = \frac{1}{c} R_C(t). \quad (5)$$

Если считать, что возмущающая сила, а также реакции дополнительных опор и массы являются сосредоточенными нагрузками, то соответствующие ядра $K_{ij}(t)$ в интегралах свертки для шарнирно-опертой пластины средней толщины типа С. П. Тимошенко будут иметь вид:

$$K_{ij}(t) = C \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [\Omega_{1kn} \cdot \sin \omega_{1kn}(t) - \Omega_{2kn} \cdot \sin \omega_{2kn}(t)] \cdot \sin\left(\frac{k\pi x_i}{l_1}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi y_i}{l_2}\right) \cdot \sin\left(\frac{k\pi x_j}{l_1}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi y_j}{l_2}\right), \quad (6)$$

где l_1 и l_2 – длина и ширина пластины, м; h – толщина пластины, м; (x_i, y_i) – координаты точки, в которой прикладывается i -тая нагрузка, а (x_j, y_j) – это координаты j -той точки, в которой определяется изменение прогиба во времени,

$$C = \frac{4}{l \cdot m} \cdot \frac{1}{\rho \cdot h}; \quad \lambda_{kn}^2 = \pi^2 \left(\frac{k^2}{l_1^2} + \frac{n^2}{l_2^2} \right); \quad c_T^2 = \frac{G'}{\rho}; \quad c_p^2 = \frac{E_p}{\rho}; \quad E_p = \frac{E}{(1-\nu^2)}; \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)};$$

$$\Delta_{kn} = \sqrt{\left(\lambda_{kn}^2 (c_T^2 + c_p^2) + c_T^2 \cdot 12 / h^2 \right)^2 - 4 \cdot c_T^2 \cdot c_p^2 \cdot \lambda_{kn}^4}, \quad \Omega_{1kn} = \omega_{1kn} - \frac{c_p^2 \lambda_{kn}^2 + c_T^2 \cdot 12 / h^2}{\omega_{1kn}};$$

$$\Omega_{2kn} = \omega_{2kn} - \frac{c_p^2 \lambda_{kn}^2 + c_T^2 \cdot 12 / h^2}{\omega_{2kn}};$$

E – модуль упругости материала пластины; ρ – плотность; ν – коэффициент Пуассона; G' – приведенный модуль сдвига $G' = k' \cdot G$ (отметим, что k' – коэффициент сдвига, подробные сведения о котором приведены в [11]).

Укажем, что ω_{1kn} и ω_{2kn} – собственные частоты колебаний пластины:

$$\omega_{1kn} = \sqrt{0.5(\lambda_{kn}^2 (c_T^2 + c_p^2) + c_T^2 \frac{12}{h^2} + \Delta_{kn})} \quad \text{и} \quad \omega_{2kn} = \sqrt{0.5(\lambda_{kn}^2 (c_T^2 + c_p^2) + c_T^2 \frac{12}{h^2} - \Delta_{kn})}.$$

В случае, когда нагрузка $P(t)$ известна, систему интегральных уравнений (3) относительно неизвестных сил $R_C(t)$, $R_D(t)$ и $R_M(t)$ можно дополнить выражениями в точках контакта (5). Исключим из уравнений прогибы и перенесем известные слагаемые в правую часть:

$$\begin{cases} \int_0^t K_{CC}(t-\tau) \cdot R_C(\tau) d\tau + \frac{R_C(t)}{c} + \int_0^t K_{CD}(t-\tau) \cdot R_D(\tau) d\tau + \int_0^t K_{CM}(t-\tau) \cdot R_M(\tau) d\tau = \int_0^t K_{PC}(t-\tau) \cdot P(\tau) d\tau; \\ \int_0^t K_{DC}(t-\tau) \cdot R_C(\tau) d\tau + \int_0^t K_{DD}(t-\tau) \cdot R_D(\tau) d\tau + \int_0^t \frac{R_D(\tau)}{\kappa} d\tau + \int_0^t K_{DM}(t-\tau) \cdot R_M(\tau) d\tau = \int_0^t K_{PD}(t-\tau) \cdot P(\tau) d\tau; \\ \int_0^t K_{MC}(t-\tau) \cdot R_C(\tau) d\tau + \int_0^t K_{MD}(t-\tau) \cdot R_D(\tau) d\tau + \int_0^t K_{MM}(t-\tau) \cdot R_M(\tau) d\tau + \frac{1}{m} \int_0^t R_M(\tau)(t-\tau) d\tau = \int_0^t K_{PM}(t-\tau) \cdot P(\tau) d\tau. \end{cases} \quad (7)$$

Для решения системы интегральных уравнений (7) была выполнена дискретизация по времени ($\Delta t = T / J$, где T – исследуемый промежуток, а J – число шагов дискретизации) методом частичного интегрирования. То есть на малых дискретных участках времени сила $P(t) = P(j \cdot \Delta t) = P_j$, а также реакции $R_C(j \cdot \Delta t)$, $R_D(j \cdot \Delta t)$ и $R_M(j \cdot \Delta t)$ считались условно постоянными. В результате получена следующая система матричных уравнений:

$$\begin{cases} \mathbf{A}_{CC} \cdot \mathbf{R}_C + \mathbf{A}_{CD} \cdot \mathbf{R}_D + \mathbf{A}_{CM} \cdot \mathbf{R}_M = \mathbf{A}_{PC} \cdot \mathbf{P}; \\ \mathbf{A}_{DC} \cdot \mathbf{R}_C + \mathbf{A}_{DD} \cdot \mathbf{R}_D + \mathbf{A}_{DM} \cdot \mathbf{R}_M = \mathbf{A}_{PD} \cdot \mathbf{P}; \\ \mathbf{A}_{MC} \cdot \mathbf{R}_C + \mathbf{A}_{MD} \cdot \mathbf{R}_D + \mathbf{A}_{MM} \cdot \mathbf{R}_M = \mathbf{A}_{PM} \cdot \mathbf{P}, \end{cases} \quad (8)$$

где матрицы \mathbf{A}_{PC} , \mathbf{A}_{PD} , \mathbf{A}_{PM} соответствуют частично проинтегрированным ядрам $K_{PC}(t-\tau)$, $K_{PD}(t-\tau)$ и $K_{PM}(t-\tau)$, элементы которых могут быть найдены в виде $a_{ji} = K^*[(j-i)\Delta t]$, как значения дискретно проинтегрированного ядра

$$K^*[i\Delta t] = \int_{(i-1)\Delta t}^{i\Delta t} K(\tau) d\tau.$$

Укажем, что систему матричных уравнений (8) можно представить в виде блочной матрицы.

Матрицы \mathbf{A}_{ij} соответствуют частично проинтегрированным ядрам $K_{ij}(t-\tau)$ при $i \neq j$.

В случае, когда $i = j$ матрицы \mathbf{A}_{ii} , находящиеся на главной диагонали блочной матрицы, модифицируются с учетом особенности (для дополнительной упругой и вязкой опоры, а также сосредоточенной массы).

Матрица \mathbf{A}_{CC} эквивалентна выражению:

$$\mathbf{A}_{CC} = \mathbf{A}_{CC}^* + \frac{1}{c} \mathbf{E},$$

где матрица \mathbf{A}_{CC}^* соответствует частично проинтегрированному ядру $K_{CC}(t-\tau)$, а \mathbf{E} – единичная матрица.

Матрица \mathbf{A}_{DD} соответствует интегралу:

$$\int_0^t \left[K_{DD}(t-\tau) + \frac{1}{\kappa} \right] \cdot R_D(\tau) d\tau .$$

Матрица \mathbf{A}_{MM} соответствует интегралу:

$$\int_0^t \left[K_{MM}(t-\tau) + \frac{t-\tau}{m} \right] \cdot R_M(\tau) d\tau .$$

Система (8) решается с использованием *обобщенного алгоритма Крамера* для блочных матриц [12] и регуляризирующего *алгоритма А. Н. Тихонова* [13]. В результате решения (8) определяются \mathbf{R}_C , \mathbf{R}_D и \mathbf{R}_M , являющиеся дискретными аналогами неизвестных независимых реакций $R_C(t)$, $R_D(t)$ и $R_M(t)$.

Результаты расчетов. При расчетах срединная плоскость пластины была связана с плоскостью xOy декартовой системы координат. Расчеты производились при следующих значениях параметров: $\rho = 7890 \text{ кг/м}^3$; $\nu = 0.3$; $E = 2.07 \cdot 10^{11} \text{ Па}$; $h = 0.04 \text{ м}$; $l_1 = 0.6 \text{ м}$; $l_2 = 0.4 \text{ м}$. Коэффициент жесткости дополнительной опоры $c = 10^8 \text{ Н/м}$, коэффициент линейно-вязкого демпфирования $\kappa = 4 \cdot 10^4 \text{ Н/(м/с)}$; величина массы опоры $m = 5 \text{ кг}$. Число членов в соответствующих двойных рядах Фурье 50×50 . Укажем, что коэффициент жесткости c был принят таким, чтобы его величина была сопоставима с жесткостью исходной пластины, а остальные параметры дополнительной опоры (κ и m) такими, чтобы величины реакций $R_C(t)$, $R_D(t)$ и $R_M(t)$ были одного порядка.

Далее приведено два расчета:

1) *тестовый случай*, когда координаты всех точек совпадали с центром пластины, то есть предполагалось, что внешняя возмущающая нагрузка приложена в центре пластины к верхней лицевой поверхности, а дополнительная опора установлена в этой же точке (строго под ней), только присоединена к нижней лицевой поверхности. Координаты точки имеют значения: $x_0 = 0.3 \text{ м}$, $y_0 = 0.2 \text{ м}$;

2) *расчетный случай*, когда все точки специально не совпадают:

– координаты точки приложения возмущающей нагрузки имеют значения: $x_0 = 0.4 \text{ м}$, $y_0 = 0.2 \text{ м}$;

– координаты точки крепления дополнительной вязкоупругой опоры к пластине: $x_{CD} = 0.2 \text{ м}$, $y_{CD} = 0.2 \text{ м}$;

– координаты точки, в которой исследовалось изменение прогиба пластины: $x_S = 0.3 \text{ м}$, $y_S = 0.2 \text{ м}$.

На рис. 2 показаны схемы нагружения в плане для первого и второго случаев: \times – точка приложения возмущающей нагрузки; \bullet – точка присоединения дополнительной опоры; \square – точка установки датчика прогиба.

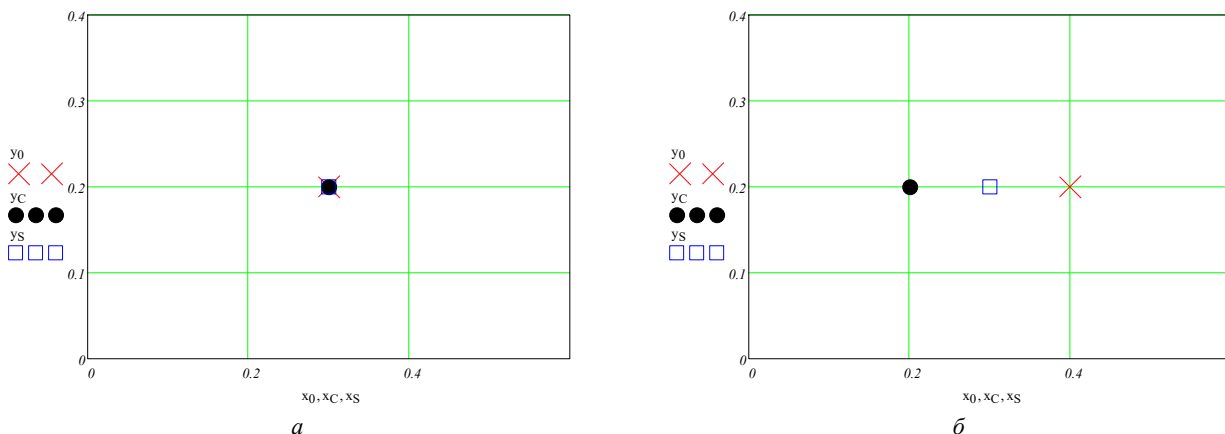


Рис. 2 – Схема нагружения пластины в плане.

На рис. 3 показаны результаты вычислений для первого случая. Составляющие реакции между пластиной и дополнительной вязкоупругой опорой, определенные в результате численно-аналитического решения системы интегральных уравнений (7), приведены на рис. 3, а:

1-я кривая – упругая составляющая $R_C(t)$;

2-я кривая – вязкая составляющая $R_D(t)$;

3-я кривая – инерционная составляющая $R_M(t)$.

Для удобства анализа на рис. 3, б показаны те же составляющие $R_C(t)$, $R_D(t)$ и $R_M(t)$ (их графики полностью идентичны рис. 3, а), а также добавлена суммарная реакции вязкоупругой опоры $R_{\Sigma}(t) = R_C(t) + R_D(t) + R_M(t)$ – она показана чёрной жирной кривой.

На рис. 4, *a* показаны две кривые, соответствующие полной реакции вязкоупругой опоры с учётом массы $R_{\Sigma}(t)$ и $R_f(t)$. Укажем, что $R_{\Sigma}(t)$ – суммарная реакция, которая также приведена выше рис. 3, *a*, получена численно, а $R_f(t)$ – это реакция именно вязкоупругой опоры (1), вычисленная согласно методике, описанной в работе [7], она получена численно-аналитически. На рис. 4, *б* кроме кривых $R_{\Sigma}(t)$ и $R_f(t)$ (что и на рис. 4, *a*), показано изменение во времени возмущающей нагрузки $P(t)$ (полуволна синусоиды), что позволяет оценить абсолютное отличие кривых, полученных разными методами. Укажем, что незначительное расхождение кривых $R_{\Sigma}(t)$ и $R_f(t)$ на рис. 4, *a* можно объяснить разностью методов, а именно, кривая $R_f(t)$, полученная численно-аналитическим методом, является более точной, а суммарная реакция $R_{\Sigma}(t)$, полученная сложением трёх составляющих, является некоторым усреднением, и поэтому кажется сглаженной относительно $R_f(t)$. Близость кривых $R_{\Sigma}(t)$ и $R_f(t)$ доказывает правильность решения и возможность использования любого из двух методов для определения реакции вязкоупругой опоры с учётом её массово-инерционных характеристик.

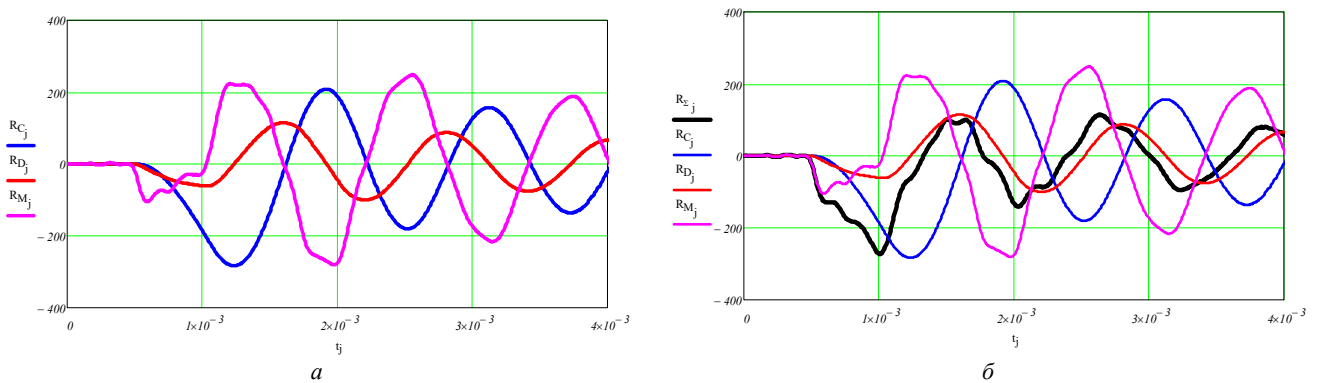


Рис. 3 – Реакция вязкоупругой опоры:
a – составляющие реакции $R_C(t)$, $R_D(t)$ и $R_M(t)$; *б* – составляющие реакции и суммарное воздействие $R_{\Sigma}(t)$.

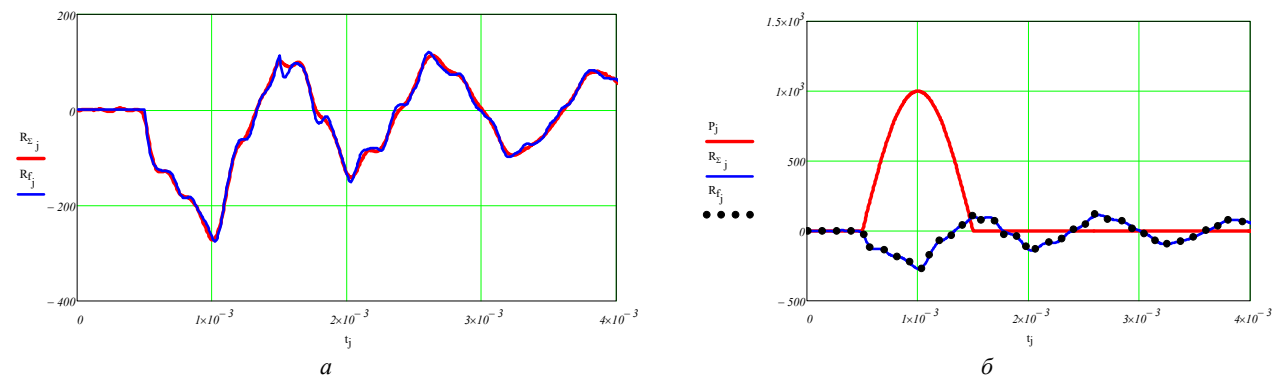


Рис. 4 – Реакции вязкоупругой опоры, найденные двумя разными методами:
a – реакции $R_{\Sigma}(t)$ и $R_f(t)$; *б* – реакции $R_{\Sigma}(t)$ и $R_f(t)$ дополненные внешней возмущающей силой $P(t)$.

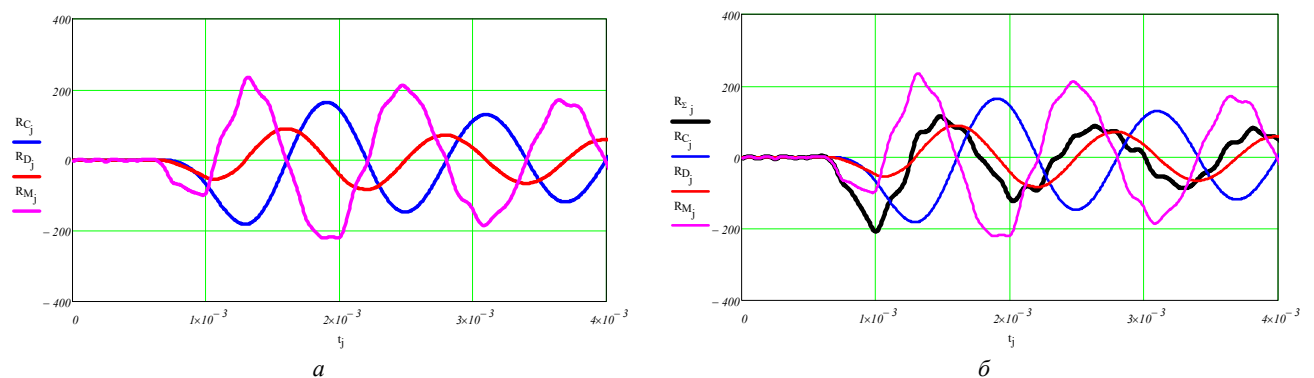


Рис. 5 – Реакция вязкоупругой опоры:
a – составляющие реакции $R_C(t)$, $R_D(t)$ и $R_M(t)$; *б* – составляющие реакции и их суммарное воздействие $R_{\Sigma}(t)$.

На рис. 5 – 7 показаны результаты вычислений для второго случая.
Описание рис. 5 – 6 полностью идентично описанию рис. 3 – 4 соответственно.

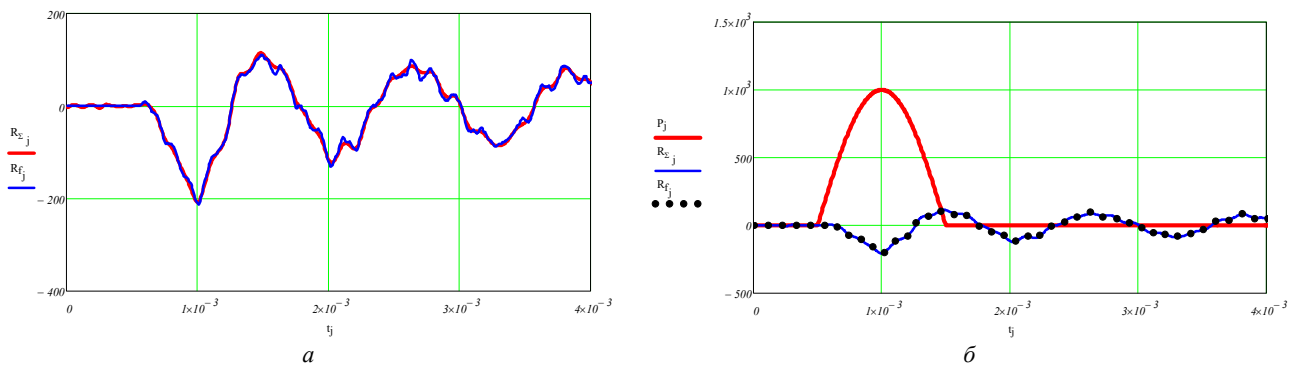


Рис. 6 – Реакции вязкоупругой опоры, найденные двумя разными методами:
а – реакции $R_{\Sigma}(t)$ и $R_f(t)$; б – реакции $R_{\Sigma}(t)$ и $R_f(t)$ дополненные внешней возмущающей силой $P(t)$.

Изменение прогибов пластины в некоторой точке S с координатами (x_S, y_S) показано на рис. 7.

Причем на рис. 7, а показано 3 кривых:

- $w_{PS}(t)$ – изменение прогибов пластины в точке S , вызванное действием только внешней возмущающей нагрузки $P(t)$;
- $w_{Rf}(t)$ – изменение прогибов пластины в точке S , вызванное действием только реакции вязкоупругой опоры $R_f(t)$, как будто это действовала внешняя возмущающая сила с законом изменения как у $R_f(t)$;
- $w_{\Sigma Sf}(t)$ – изменение прогибов пластины в точке S , вызванное совместным действием реакции вязкоупругой опоры $R_f(t)$ и внешней возмущающей силы $P(t)$ – реальное изменение прогиба пластины с дополнительной опорой.

На рис. 7, б показано 4 кривых:

- $w_{Rf}(t)$ – изменение прогибов пластины в точке S , вызванное действием только реакции вязкоупругой опоры $R_f(t)$ – вторая кривая рис. 7, а,
- а также три составляющие этого прогиба, вызванные отдельно упругой, вязкой и инерционной составляющими:
- $w_{Rc}(t)$ – изменение прогибов пластины в точке S , вызванное действием $R_C(t)$;
- $w_{Rd}(t)$ – изменение прогибов пластины в точке S , вызванное действием $R_D(t)$;
- $w_{Rm}(t)$ – изменение прогибов пластины в точке S , вызванное действием $R_M(t)$.

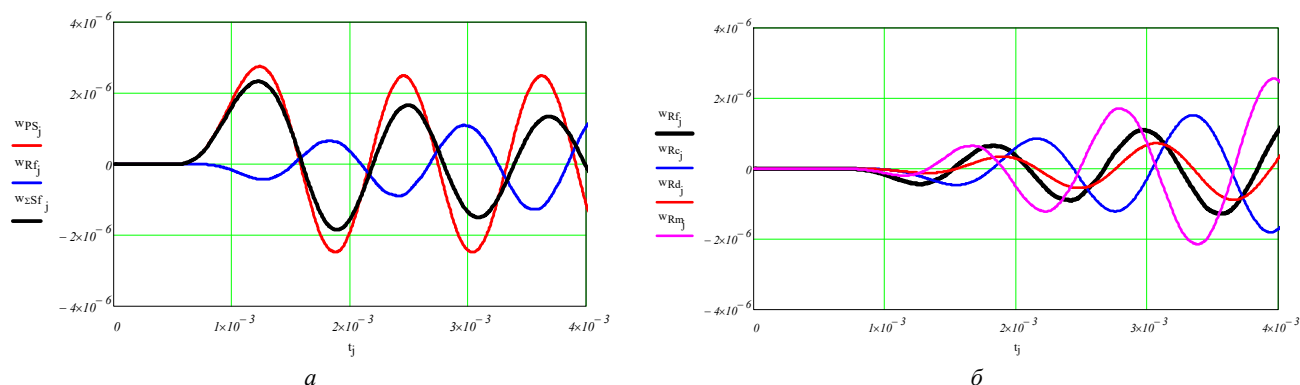


Рис. 7 – Изменение прогибов пластины в точке с координатами (x_S, y_S) :
а – кривые $w_{PS}(t)$, $w_{Rf}(t)$, $w_{\Sigma Sf}(t)$; б – показано кривые $w_{Rf}(t)$, $w_{Rc}(t)$, $w_{Rd}(t)$, $w_{Rm}(t)$.

Указанные кривые позволяют оценить отдельный вклад каждой из составляющих реакции дополнительной опоры в изменение прогиба и на колебательный процесс в целом. Однако приведенные результаты справедливы только для конкретного расчетного случая, и их обобщение возможно только качественно. Для количественных

выводов необходимо выполнять отдельный расчет для каждого конкретного случая.

Перспективы дальнейших исследований. Во первых, изложенный в работе подход целесообразно распространить кроме пластин на другие «несущие» объекты типа балок и оболочек, для которых выполнить аналогичные вычислительные эксперименты и подтвердить возможность обобщения и эффективность, если таковая будет иметь место.

Поскольку появилась возможность достаточно детально учитывать влияние дополнительной вязкоупругой опоры, а также её массово-инерционные характеристики, авторы считают, что в дальнейших работах необходимо исследовать в первую очередь внутренние резонансные явления, которые могут возникнуть при совпадении собственной частоты дополнительной опоры $\omega_{CDi} = \sqrt{c_i/m_i - 0.25 \cdot \kappa_i^2/m_i^2}$ с собственными частотами «несущего» объекта (в данном случае – прямоугольной пластины средней толщины).

Также вызывает определенный интерес при развитии описанной модели возможность учета более сложного контура опирания, например, не «чистый» прямоугольный контур, а прямоугольный, имеющий скругления по углам или овальный.

Актуальным является приближение к реальности не только при моделировании дополнительной опоры, но и основного опирающего контура, так как в технике не часто встречаются закрепления, соответствующие шарнирному или свободному опиранию (это механические идеализации). Так по аналогии с дополнительными реакциями, которые прикладываются к пластине вместо дополнительной опоры, можно приложить дополнительные нагрузки, моделирующие, например, трение в основном опорном контуре.

Перспективными будут являться исследования, связанные с учетом диссипации энергии в самом материале пластины, так как реальные конструкционные материалы [14] зачастую обладают вязкоупругими свойствами.

Выводы. В работе описан оригинальный подход, при котором воздействие дополнительной вязкоупругой опоры на пластину моделируется в виде трёх неизвестных независимых нестационарных сил – упругой, вязкой и инерционной составляющих реакции между пластиной и дополнительной опорой. Достоверность предлагаемого подхода подтверждается путем совпадения результатов сопоставления реакций, найденных двумя методами: численно-аналитически для одной полной реакции, как в работе [7], и численно – суммарной (сложением трех составляющих).

Описанный подход позволяет получать устойчивые численно-аналитические решения для задач нестационарного деформирования пластины с дополнительной опорой.

Методика решения прямой задачи по аналогии с работой [9] может быть обобщена и на обратные задачи идентификации неизвестных нагрузок, вызывающих нестационарное деформирование пластины с дополнительной вязкоупругой опорой.

Список литературы

1. Кохманюк С. С., Янютин Е. Г., Романенко Л. Г. Колебания деформируемых систем при импульсных и подвижных нагрузках. – Киев : Наукова думка, 1980. – 232 с.
2. Кохманюк С. С., Филиппов А. П. Колебания многопролетных балок на упругих опорах при подвижной нагрузке // Строительная механика и расчет сооружений. – 1965. – № 6. – С. 32 – 36.
3. Янютин Е. Г., Гнатенко Г. О., Гришакин В. Т. Розв’язання нестационарних прямих та обернених задач для балок з пружним додатковим спіранням // Машинознавство. – 2007. – № 8. – С. 18 – 23.
4. Li H., Gomez D., Dyke S. J., Xu Z., Dai J. Investigating Coupled Train-Bridge-Bearing System under Earthquake-and Train-Induced Excitations // Journal of Vibration and Acoustics, Transactions of the ASME. – 2021. – Vol. 143. – Issue 5. – Article num. 051003. DOI:10.1115/1.4049374.
5. Ranjan V., Ghosh M. K. Forced vibration response of thin plate with attached discrete dynamic absorbers // Journal of Thin-Walled Structures. – 2005. – Vol. 43. – P. 1513 – 1533. DOI:10.1016/j.tws.2005.07.001.
6. Wu S. T., Chen J. Y., Yeh Y. C., Chiu Y. Y. An active vibration absorber for a flexible plate boundary-controlled by a linear motor // Journal of Sound & Vibration. – 2007. – № 300(1–2). – P. 250 – 264. DOI:10.1016/j.jsv.2006.08.015.
7. Воропай А. В. Обратная задача при нестационарном деформировании прямоугольной пластины с дополнительной вязкоупругой опорой // Вестник национального технического университета «ХПИ». Серия : Динамика и прочность машин. – X. : НТУ «ХПИ», 2015. – № 57 (1166). – С. 25 – 29.
8. Воропай А. В., Егоров П. А. Учёт влияния массово-инерционной характеристики дополнительной вязкоупругой опоры при нестационарном деформировании прямоугольной пластины // Вісник НТУ «ХПИ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – X: НТУ «ХПИ», 2020. – № 1. – С. 15 – 23. DOI: 10.20998/2222-0631.2020.01.02.
9. Воропай А. В. Распределение вязкой и упругой составляющих в реакции дополнительной вязкоупругой опоры, контактирующей с пластиной // Вісник НТУ «ХПИ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПИ», 2016. – №16 (1188). – С. 16 – 22. – Бібліогр. : 7 назв. – ISSN 2222-0631.
10. Янютин Е. Г., Воропай А. В., Поваляев С. И., Янчевский И. В. Идентификация нагрузок при импульсном деформировании тел. Монография в 2-х частях. Часть II. – Харьков : Изд-во ХНАДУ, 2010. – 212 с.
11. Григолюк Э. И., Селезов И. Т. Механика твердых деформируемых тел. Т. 5. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. – М. : ВИНТИ, 1973. – 272 с.
12. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит.-ры, 1967. – 576 с.

13. Тихонов А. Н., Гончаровский А. В., Степанов В. В., Ягола А. Г. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. – М. : Наука. // Главная редакция физико-математической литературы, 1983. – С 200 с.
14. Писаренко Г. С., Яковлев А. П., Матвеев В. В. Вибропоглощающие свойства конструкционных материалов. – К. : Наукова думка, 1971. – 375 с.

References (transliterated)

1. Kokhmanyuk S. S., Yanyutin Ye. G., Romanenko L. G. *Kolebaniya deformiruyemykh system pri impul'snykh i podvizhnykh nagruzkakh* [Vibration of deformable systems under the pulse and travelling loading]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 1980. 232 p.
2. Kokhmanyuk S. S., Filippov A. P. *Kolebaniya mnogopropyetnykh balok na uprugikh oporakh pri podvizhnoy nagruzke* [Vibrations of multispan beams on elastic support under travelling loading]. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy* [Structural mechanics and computation of structures]. 1965, no. 6, pp. 32–36.
3. Yanyutin Ye. G., Gnatenko G. O., Gryshakin V. T. Rozv'yazannya nestatsionarnykh pryamykh ta obrernenykh zadach dlya balok z pruzhnim dodatkovym spyrannym [Solving nonstationary direct and inverse problems for beams with additional elastic support]. *Mashynoznavstvo* [Mechanical Engineering]. 2007, no. 8, pp. 18–23.
4. Li H., Gomez D., Dyke S. J., Xu Z., Dai J. Investigating Coupled Train-Bridge-Bearing System under Earthquake-and Train-Induced Excitations. *Journal of Vibration and Acoustics, Transactions of the ASME*. 2021, vol. 143, Issue 5, Article num. 051003. DOI:10.1115/1.4049374
5. Ranjan V., Ghosh M. K. Forced vibration response of thin plate with attached discrete dynamic absorbers. *Journal of Thin-Walled Structures*. 2005, vol. 43, pp. 1513–1533. DOI:10.1016/j.tws.2005.07.001
6. Wu S. T., Chen J. Y., Yeh Y. C., Chiu Y. Y. An active vibration absorber for a flexible plate boundary-controlled by a linear motor. *Journal of Sound & Vibration*. 2007, no. 300(1–2), pp. 250–264. DOI:10.1016/j.jsv.2006.08.015
7. Voropay A. V. Obratnaya zadacha pri nestatsionarnom deformirovanii pryamougol'noy plastiny s dopolnitel'noy vyazkouprugoy oporoy [Inverse problem in nonstationary deforming of rectangular plate with additional viscoelastic support]. *Vestnik NTU «KhPI». Seriya : Dinamika i prochnost' mashin* [Bulletin of the NTU «KhPI». Series : Dynamics and strength of machines]. Kharkov, NTU «KhPI» Publ., 2015, no. 57 (1166), pp. 25–29.
8. Voropay A. V., Egorov P. A. Uchiye vliyaniya massovo-inertsionnoy kharakteristiki dopolnitel'noy vyazkouprugoy opory pri nestatsionarnom deformirovanii pryamougol'noy plastiny [The influence of mass and inertial characteristics of an additional viscoelastic support in the nonstationary deforming of a rectangular plate]. *Visnyk Natsional'nogo tekhnichnogo universytetu «KhPI». Seriya : Matematychni modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of the National Technical University «KhPI». Series : Mathematical modeling in engineering and technology]. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2020, no. 1, pp. 15–23. DOI: 10.20998/2222-0631.2020.01.02
9. Voropay A. V. Raspredelenie vyazkoy i uprugoy sostavlyayushchikh v reaktsii dopolnitel'noy vyazkouprugoy opory, kontaktiruyushchey s plastynoy [Distribution of viscous and elastic components of the reaction of additional viscoelastic support in contact with plate]. *Visnyk Natsional'nogo tekhnichnogo universytetu «KhPI». Seriya : Matematychni modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of the National Technical University «KhPI». Series : Mathematical modeling in engineering and technology]. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2016, no. 16 (1188), pp. 16–22.
10. Yanyutin Ye. G., Voropay A. V., Povalyayev S. I., Yanchevskiy I. V., Sharapata A. S. *Identifikatsiya nagruzok pri impul'snom deformirovanii tel. Monografiya v 2-kh chastyakh. Chast' II* [Loading Identification in Solid Pulse Deforming. Monograph in 2 parts. Part]. Kharkov, KhNADU Publ., 2010. 212 p.
11. Grigolyuk Eh. I., Selezov I. T. *Mekhanika tverdukh deformiruyemykh tel. T. 5. Neklassicheskiye teorii kolebaniy sterzhney, plastin i obolochek* [Mechanics of deformable solids. Vol. 5. Non-classical theory of oscillations of rods, plates, and shells]. Moscow, VINITI Publ., 1973. 272 p.
12. Gantmakher F. R. *Teoriya matrits* [Matrix theory]. Moscow, Nauka. Gl. red. fiz.-mat. lit-ry Publ., 1967. 576 p.
13. Tikhonov A. N., Goncharovskiy A. V., Stepanov V. V., Yagola A. G. *Regulyariziruyushchiye algoritmy i apriornaya informatsiya* [Regularization algorithms and a priori information]. Moscow, Nauka Publ., 1983. 200 p.
14. Pisarenko G. S., Yakovlev A. P., Matveyev V. V. *Vibroproshchayushchiye svoystva konstruksionnykh materialov* [Vibro-absorbing properties of structural materials]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 1971. 375 p.

Поступила (received) 29.09.2021

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Воропай Олексій Валерійович – доктор технічних наук, доцент, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, м. Харків; тел.: (050) 524-92-54; e-mail: voropay.alexey@gmail.com.

Воропай Алексей Валериевич – доктор технических наук, доцент, Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет; тел.: (050) 524-92-52; e-mail: voropay.alexey@gmail.com.

Voropay Alexey Valerievich – Doctor of Engineering Sciences, Associate Professor, Kharkov National Automobile and Highway University, Kharkov; tel.: (050) 524-92-54; e-mail: voropay.alexey@gmail.com.

Егоров Павло Анатолійович – кандидат технічних наук, доцент, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, м. Харків; тел.: (066) 225-33-51; e-mail: egorovpa@online.com.

Егоров Павел Анатольевич – кандидат технических наук, доцент, Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет; тел.: (066) 225-33-51; e-mail: egorovpa@online.com.

Yegorov Pavel Anatoliyevich – Sciences Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Kharkov National Automobile and Highway University, Kharkov; tel.: (066) 225-33-51; e-mail: egorovpa@online.com.