

***В. П. ОЛЬШАНСЬКИЙ, С. В. ОЛЬШАНСЬКИЙ***

### **КОЛИВАННЯ, ОПИСАНІ АНАЛОГАМИ РІВНЯНЬ ВАН ДЕР ПОЛЯ І РЕЛЕЯ**

Розглянуто режими усталених квазілінійних автоколивань, які описані аналогами диференціальних рівнянь Ван дер Поля і Релея. Для дослідження руху задіяно метод енергетичного балансу в диференціальній формі. Отримано умови, у вигляді нерівностей, стосовно констант диференціальних рівнянь, при виконанні яких рівняння будуть описувати квазілінійні автоколивання з амплітудою, що не залежить від початкових умов. Виведено формули для обчислення цієї амплітуди з використанням таблиці гама-функції. Доведено стійкість руху в усталеному режимі автоколивань та нестійкість нульового положення статичної рівноваги системи. Встановлено також нерівності, при виконанні яких розглянуті типи рівнянь будуть описувати вільні затухаючі коливання відносно нульового положення рівноваги або їх розгойдування з подальшою втратою стійкості системи. Ці варіанти руху залежать від початкових умов. При «малих» початкових відхиленнях, менших порогового значення, коливання осцилятора затухають, а при «великих» відбуваються їх розгойдування. Динамічна система стійка в «малому» та є нестійкою в «великому». Розглянуто також вплив сталої складової у виразі сили опору на процес коливань. Показано, що вона призводить до зміщення положення відносно якого проходять усталені автоколивання, але не впливає на їх амплітуду і частоту, що є наслідком лінійної пружності системи. Виділено випадки, коли виведені розрахункові формули переходять у відомі результати. Аналітичні дослідження супроводжуються чисельним комп'ютерним розв'язанням задачі Коші та порівнянням результатів, одержаних двома способами, що підтверджує адекватність виведених розрахункових формул.

**Ключові слова:** квазілінійні автоколивання, граничний цикл, аналоги рівнянь Ван дер Поля і Релея, метод енергетичного балансу, вільні коливання, чисельні розв'язки задачі Коші.

***В. П. ОЛЬШАНСКИЙ, С. В. ОЛЬШАНСКИЙ***

### **КОЛЕБАНИЯ, ОПИСАННЫЕ АНАЛОГАМИ УРАВНЕНИЙ ВАН ДЕР ПОЛЯ И РЭЛЕЯ**

Рассмотрены режимы установившихся квазилинейных автоколебаний, описанные аналогами дифференциальных уравнений Ван дер Поля и Рэлея. Для исследования движения задействован метод энергетического баланса в дифференциальной форме. Получены условия в виде неравенств между константами в дифференциальных уравнениях, при выполнении которых уравнения будут описывать квазилинейные автоколебания с амплитудой, не зависящей от начальных условий. Выведены формулы для вычисления этой амплитуды с использованием таблицы гамма-функции. Доказана устойчивость движения в установившемся режиме автоколебаний и неустойчивость положения статического равновесия системы. Выведены также неравенства, при выполнении которых рассмотренные типы уравнений будут описывать свободные затухающие колебания относительно нулевого положения равновесия или их раскачивание с последующей потерей устойчивости системы. Эти варианты движения зависят от начальных условий. При «малых» начальных отклонениях, меньших порогового значения, колебания осциллятора затухают, а при «больших» происходит их раскачивание. Динамическая система, устойчивая в «малом», является неустойчивой в «большом». Рассмотрено также влияние постоянной составляющей в выражении силы сопротивления на процесс колебаний. Показано, что она приводит к смещению положения, относительно которого происходят установившиеся автоколебания, но не влияет на их амплитуду и частоту, что является следствием линейной упругости системы. Выделены случаи, когда выведенные расчётные формулы переходят в известные результаты. Аналитические исследования сопровождаются численным компьютерным решением задачи Коши и сравнением результатов, полученных двумя способами, что подтверждает адекватность выведенных расчётных формул.

**Ключевые слова:** квазилинейные колебания, предельный цикл, аналоги уравнений Ван дер Поля и Рэлея, метод энергетического баланса, свободные колебания, численные решения задачи Коши.

***V. P. OLSHANSKIY, S. V. OLSHANSKIY***

### **OSCILLATIONS DESCRIBED BY ANALOGUES OF VAN DER POL AND RAYLEIGH EQUATIONS**

The paper deals with the modes of steady-state quasilinear self-oscillations described by the analogues of Van der Pol and Rayleigh differential equations. The differential formulation of the energy balance method is applied for studying the motion. The conditions for the equations to describe quasilinear self-oscillations with the amplitude independent of the initial conditions are derived in the form of inequalities. The formulae for computing this amplitude using the table of gamma functions are proposed. The steady-state mode of the self-oscillations is proved to be stable in contrast to the static equilibrium which appears unstable. The inequalities are also obtained which guarantee the equations of the type considered to describe the damped free oscillations about the zero equilibrium or the oscillations which build up resulting in the loss of system stability. These forms of motion depend on the initial conditions. For small initial deflections, which are less than the threshold value, the oscillations decay whereas for large once they build up. The dynamical system, which is stable in small, is unstable in large. The impact of the constant component of the resistance force on the oscillatory process is also studied. It is shown to cause the shift of the position about which the steady-state self-oscillations occur but not to influence their amplitude or frequency, which is the result of the linear elasticity of the system. The special cases are separated, when the computational formulae proposed become the results previously known. The analytical studies are followed by numerical solution of the respective Cauchy problem. By comparing the results obtained by the two methods we substantiate the adequacy of the computational formulae obtained.

**Key words:** quasilinear oscillations, limit cycle, analogues of Van der Pol and Rayleigh equations, energy balance method, free oscillations, numerical solution of Cauchy problem.

**Вступ.** Автоколивання є досить поширеним видом руху. З ними доводиться мати справу в фрикційних муфтах, гальмах транспортних засобів, при обробці матеріалів різанням і шліфуванням та ін. Щоб регулювати вплив автоколивань на різні механічні процеси треба вміти належним чином моделювати їх. Тому моделювання автоколивань відноситься до актуальних задач, при постановці та розв'язанні яких важливу роль мали відомі

класичні диференціальні рівняння Ван дер Поля і Релея. Тут вивчаємо рух, який описують узагальнені аналоги вказаних рівнянь. Оскільки побудова їх точних аналітичних розв'язків є дуже складною математичною задачею, проводимо наближене дослідження руху методом енергетичного балансу, що поширений в теорії автоколивань. Для встановлення фактичних похибок цього наближеного методу проводимо порівняння результатів, до яких він призводить, з результатами чисельного розв'язання задачі Коші на комп'ютері.

**Огляд літературних джерел і постановка мети дослідження.** Рівняння Ван дер Поля і Релея мають давню історію. Так Ван дер Поль у 1926 році не тільки вивів рівняння, що носить його ім'я, а й запропонував наближений його розв'язок, який потім набув поширення в теорії нелінійних коливань [1]. Різні наближені аналітичні розв'язки цього рівняння також викладено в [2, 3], причому в [3] одержано друге наближення асимптотичним методом, що дає можливість оцінити точність першого наближення. Релей пов'язував своє рівняння з задачами акустики. Його асимптотичний розв'язок надруковано в [4]. Різні варіанти наближеного розв'язку рівняння Релея є також в [5]. Тут розглядаємо узагальнені аналоги цих класичних рівнянь, одержані заміною в них виразу активно дисипативної сили. Конкретні степені переміщення і швидкості заміняємо загальними степенями з невід'ємними показниками.

**Метою статті** є дослідження руху, який будуть описувати узагальнені диференціальні рівняння Ван дер Поля і Релея, та встановлення умов, за яких можливий стійкий стаціонарний автоколивальний режим.

**Основні результати.** 1. Рух, який описує аналог рівняння Ван дер Поля. Розглянемо рівняння:

$$m\ddot{x} - \left( k_1 |x|^\mu - k_2 |\dot{x}|^\nu \right) |\dot{x}|^\beta \operatorname{sign}(\dot{x}) + cx = 0, \quad (1)$$

де  $m$  – маса осцилятора;  $k_1, k_2$  – невід'ємні коефіцієнти опору;  $\mu \geq 0, \nu \geq 0, \beta \geq 0$  ( $\mu \neq \nu$ ) – показники степеня;  $c$  – коефіцієнт пружності;  $x = x(t)$  – переміщення системи як функція часу  $t$ ; крапка над  $x$  означає похідну по  $t$ .

При  $\mu = 0, \nu = 2, \beta = 1$  рівняння (1) співпадає з класичним варіантом рівняння Ван дер Поля.

Вважаємо, що в рівнянні (1) модуль другого доданку (активно дисипативної сили) значно менший, ніж модуль третього доданку (сили пружності).

За цього припущення квазілінійні коливання описуємо добутком:

$$x(t) = -a \cos(\omega t), \quad (2)$$

в якому  $\omega = \sqrt{c/m}$ ;  $a$  – амплітуда коливань [6].

Враховуючи (1), (2), роботу активно дисипативної сили  $A$  за один напівцикл коливань подаємо інтегралом:

$$A = 2a^{\beta+1}\omega^\beta \left[ k_1 a^\mu \int_0^{\pi/2} \cos^\mu \varphi \sin^{\beta+1} \varphi d\varphi - k_2 a^\nu \int_0^{\pi/2} \cos^\nu \varphi \sin^{\beta+1} \varphi d\varphi \right]. \quad (3)$$

Далі беремо до уваги, що інтеграли в (3) виражаються через *гамма-функцію*, затабульовану в [7]. Дійсно, в довіднику [8]:

$$\int_0^{\pi/2} \cos^\mu \varphi \sin^{\beta+1} \varphi d\varphi = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{\beta+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\beta+\mu+3}{2}\right)}.$$

Отже:

$$A = a^{\beta+1} (\lambda_1 a^\mu - \lambda_2 a^\nu), \quad (4)$$

де

$$\lambda_1 = k_1 \omega^\beta \frac{\Gamma\left(\frac{\beta+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\beta+\mu+3}{2}\right)}; \quad \lambda_2 = k_2 \omega^\beta \frac{\Gamma\left(\frac{\beta+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\beta+\nu+3}{2}\right)}.$$

В усталеному режимі коливань робота активно дисипативної сили за один напівцикл коливань дорівнює нулю. Рівність  $A = 0$  в (4) можлива, коли:

$$a = 0 \quad \text{і} \quad a = a_* = \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{\frac{1}{\nu-\mu}}. \quad (5)$$

Якщо задати в (5)  $\mu = 0$ ,  $\nu = 2$ ,  $\beta = 1$ ,  $k_1 = k_2$  та врахувати, що:

$$\Gamma\left(\frac{\mu+1}{2}\right) = \sqrt{\pi}; \quad \Gamma\left(\frac{\beta+\mu+3}{2}\right) = 1; \quad \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}; \quad \Gamma\left(\frac{\beta+\nu+3}{2}\right) = 2,$$

то, одержимо:

$$a_* = \sqrt{4} = 2 \text{ м.}$$

Саме таке значення амплітуди у першому наближенні одержано в [3, 4] при розв'язанні класичного рівняння Ван дер Поля.

Дослідимо стійкість усталеного режиму автоколивань з амплітудою  $a = a_*$ . Для цього, за аналогією з [2], використаємо допоміжну функцію:

$$F(a) = a^{-1}A = \lambda_1 a^{\beta+\mu} - \lambda_2 a^{\beta+\nu}.$$

Візьмемо з неї похідну по  $a$ :

$$F'(a) = \lambda_1(\beta+\mu)a^{\beta+\mu-1} - \lambda_2(\beta+\nu)a^{\beta+\nu-1}$$

та обчислимо границі:

$$\lim_{a \rightarrow 0} F'(a) = \lim_{a \rightarrow 0} a^{\beta+\mu-1} \cdot \lim_{a \rightarrow 0} [\lambda_1(\beta+\mu) - \lambda_2(\beta+\nu)a^{\nu-\mu}];$$

$$\lim_{a \rightarrow a_*} F'(a) = a_*^{\beta+\nu-1} \lambda_2(\mu-\nu).$$

Далі будемо розрізняти два варіанти співвідношення між  $\nu$  і  $\mu$ . У першому, коли  $\nu > \mu$ , маємо:

$$\lim_{a \rightarrow 0} F'(a) > 0; \quad \lim_{a \rightarrow a_*} F'(a) < 0.$$

Це значить, що згідно з [2] режим автоколивань, де  $a = a_*$ , є стійким, а положення  $x = a = 0$  нестійке. Отже, при  $\nu > \mu$  вираз (2) може описувати усталені автоколивання з амплітудою  $a = a_*$ , що визначається формулою (5). Як це властиво автоколиванням, амплітуда  $a_*$  не залежить від початкових умов.

У другому випадку, коли  $\nu < \mu$ , знаки границь наступні:

$$\lim_{a \rightarrow 0} F'(a) < 0; \quad \lim_{a \rightarrow a_*} F'(a) > 0.$$

Згідно з [2] положення  $x = 0$  є стійким положенням статичної рівноваги, а режим коливань  $a = a_*$  – нестійкий. Якщо при цьому початкове відхилення  $a_0$  системи від положення  $x = 0$  менше за  $a_*$ , то вільні коливання відносно цього положення затухають, а при  $a_0 > a_*$  проходить їх розгойдування з подальшою втратою стійкості системи. Тепер  $a_*$  називають *пороговим відхиленням*. Розглянемо приклад.

**Приклад.** Для проведення розрахунків приймаємо:  $m = 1 \text{ кг}$ ;  $c = 400 \text{ Н/м}$ ;  $\mu = 0,4$ ;  $\nu = 1,6$ ;  $\beta = 1,2$ ;  $k_1 = 16 \text{ Нс}^{1,2} \text{ м}^{-1,6}$ ;  $k_2 = 4000 \text{ Нс}^{1,2} \text{ м}^{-2,8}$ . При таких вхідних даних:

$$\Gamma\left(\frac{\mu+1}{2}\right) = 1,298056; \quad \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) = 0,897471; \quad \Gamma\left(\frac{\beta+\nu+3}{2}\right) = 1,827355; \quad \Gamma\left(\frac{\beta+\mu+3}{2}\right) = 1,166712;$$

$$\omega = 20 \text{ с}^{-1}; \quad a_* = 0,019845 \text{ м.}$$

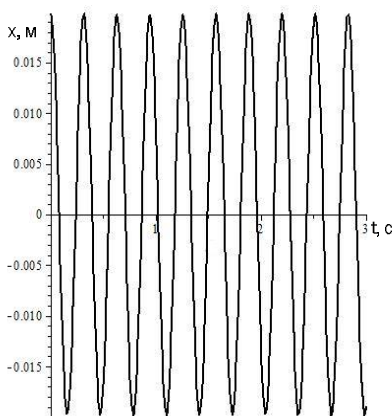


Рис. 1 – Графік коливань при  $a_0 = a_*$ ,  $\nu > \mu$ .

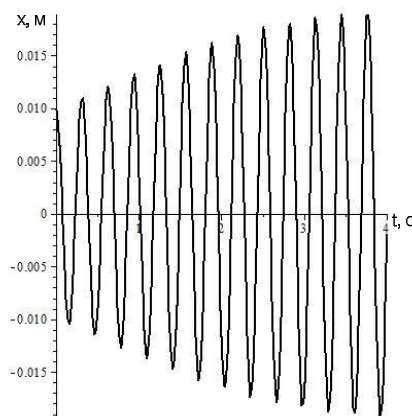


Рис. 2 – Графік коливань при  $a_0 = 0,01 \text{ м} < a_*$ ,  $\nu > \mu$ .

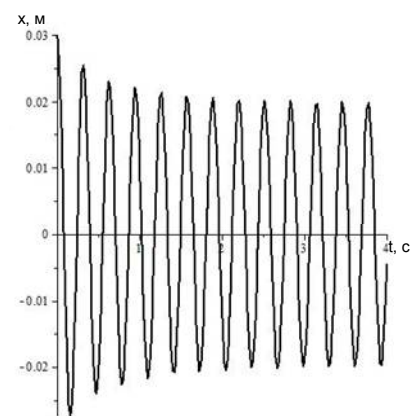
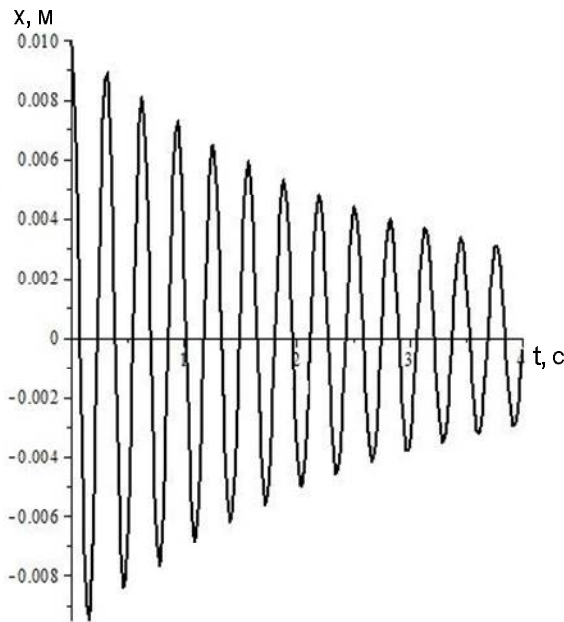
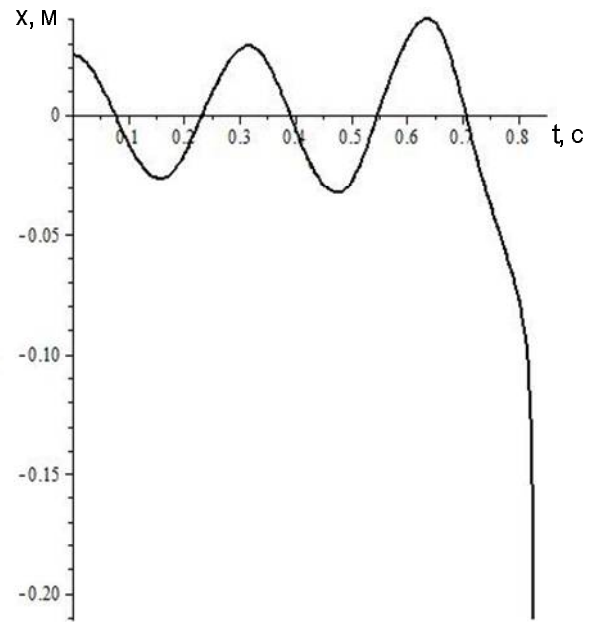


Рис. 3 – Графік коливань при  $a_0 = 0,03 \text{ м} > a_*$ ,  $\nu > \mu$ .

Розраховані чисельним інтегруванням графіки коливань зображено на рис. 1 – 3. Вони одержані при різних початкових відхиленнях  $a_0$ . Графік на рис. 1 одержано при  $a_0 = a_* = 0,019845$  м. Тут маємо усталений режим автоколивань з амплітудою  $a_0 = a_*$ . Перехідні режими автоколивань, подані на рис. 2 і рис. 3, розраховані, відповідно, при  $a_0 = 0,01$  м і  $a_0 = 0,03$  м. У першому випадку амплітуди коливань зростають, а в другому спадають. В обох випадках вони асимптотично прямують до значення  $a_*$ , що відповідає стійкому режиму автоколивань.

Рис. 4 – Графік коливань при  $a_0 = 0,01$  м,  $v < \mu$ .Рис. 5 – Графік руху  $a_0 = 0,025$  м,  $v < \mu$ .

Про те, як зміниться характер руху, коли  $\mu > v$ , надана графічна інформація на рис. 4 і рис. 5. При їх одержанні зберегли попередні значення  $m, c, \beta$ , а в виразі активно дисипативної сили прийняли:  $k_1 = 4000 \text{ Нс}^{1,2} \text{ м}^{-2,8}$ ;  $k_2 = 16 \text{ Нс}^{1,2} \text{ м}^{-1,6}$ ;  $\mu = 1,6$ ;  $v = 0,4$ . Осцилограму затухаючих вільних коливань отримали чисельним інтегруванням рівнянням (1) при  $a_0 = 0,01 < a_*$ , а розгойдування коливань з подальшою втратою стійкості системи – при  $a_0 = 0,025 \text{ м} > a_*$ . Отже, графічні результати, одержані чисельним методом, підтверджують висновки, до яких призводить аналітичне дослідження.

2. Рух, який описується аналогом рівняння Релея. Розглянемо рух, змодельований рівнянням:

$$m\ddot{x} - \left( k_1 |\dot{x}|^\mu - k_2 |\dot{x}|^\nu \right) |\dot{x}|^\beta \text{sign}(\dot{x}) + cx = 0, \quad (6)$$

в припущенні, що модуль другого доданку (активно дисипативної сили) значно менший за модуль третього доданку (сили пружності). Як і раніше, константи в (6) такі, що  $k_1 > 0$ ,  $k_2 > 0$ ,  $\mu \geq 0$ ,  $\nu \geq 0$ ,  $\mu \neq \nu$ . У відповідності з (2), (6), робота активно дисипативної сили за один напівцикл коливань становить:

$$A = 2a \left[ k_1 a^\mu \omega^\mu \int_0^{\pi/2} \sin^{\mu+1} \varphi d\varphi - k_2 a^\nu \omega^\nu \int_0^{\pi/2} \sin^{\nu+1} \varphi d\varphi \right].$$

Оскільки

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{\mu+1} \varphi d\varphi = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{\mu+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu+3}{2}\right)},$$

то

$$A = a^{\mu+1} (\gamma_1 - \gamma_2 a^{\nu-\mu}). \quad (7)$$

$$\text{Тут } \gamma_1 = k_1 \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{\mu+2}{2}\right) \omega^\mu}{\Gamma\left(\frac{\mu+3}{2}\right)}, \quad \gamma_2 = k_2 \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{\nu+2}{2}\right) \omega^\nu}{\Gamma\left(\frac{\nu+3}{2}\right)}.$$

За умовою стаціонарності коливань  $A = 0$  і з (7) випливає, що:

$$a = 0 \text{ і } a = a_* = \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right)^{\frac{1}{\nu-\mu}}. \quad (8)$$

Покладемо в (8)  $\mu = 1$ ,  $\nu = 3$ . Тоді  $\Gamma\left(\frac{\mu+2}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ ,  $\Gamma\left(\frac{\mu+3}{2}\right) = 1$ ,  $\Gamma\left(\frac{\nu+2}{2}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$ ,  $\Gamma\left(\frac{\nu+3}{2}\right) = 2$ ;

$$a_* = \frac{2}{\omega} \sqrt{\frac{k_1}{3k_2}},$$

що узгоджується з наближеним розв'язком в [5] класичного рівняння Релея. Отже, для окремих значень  $\mu, \nu$  формула (8) дає відомі результати.

З'ясуємо стійкість режимів, виділених в (8), використавши допоміжну функцію  $F(a) = \gamma_1 a^\mu - \gamma_2 a^\nu$ , що має похідну:

$$F'(a) = a^{\mu-1} (\mu\gamma_1 - \nu\gamma_2 a^{\nu-\mu}).$$

Розрізняємо два випадки:  $\nu > \mu$  і  $\nu < \mu$ .

У першому з них маємо:

$$\lim_{a \rightarrow 0} F'(a) > 0; \quad \lim_{a \rightarrow a_*} F'(a) = \gamma_2 a_*^{\nu-1} (\nu-1) < 0.$$

Це значить, що режим автоколивань з амплітудою  $a = a_*$  при  $\nu > \mu$  є стійким, а положення  $x = a = 0$  не є положенням стійкої рівноваги.

У другому випадку, коли  $\nu < \mu$ :

$$\lim_{a \rightarrow 0} F'(a) < 0; \quad \lim_{a \rightarrow a_*} F'(a) > 0.$$

При такому співвідношенні показників режим коливань з амплітудою  $a = a_*$  нестійкий, а положення  $x = a = 0$  є положенням стійкої рівноваги. Рух, який тепер описує рівняння (6), залежить від початкових умов. Якщо початкове відхилення  $x = a_0 < a_*$ , то маємо вільні згасаючі коливання. При  $a_0 > a_*$  відбувається розгойдування коливань з подальшою втратою стійкості системи. Щоб переконатись у дотриманні цих висновків, розглянемо приклад.

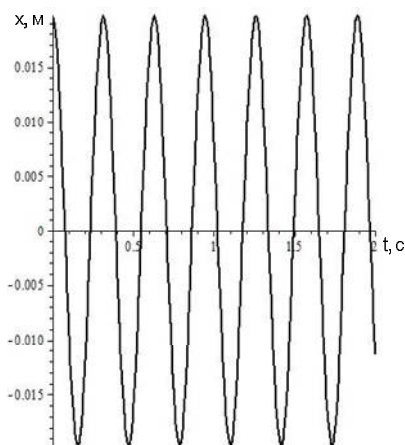


Рис. 6 – Усталені автоколивання при  $a_0 = a_*$ ,  $\mu = 0,6$ ,  $\nu = 2,6$ .

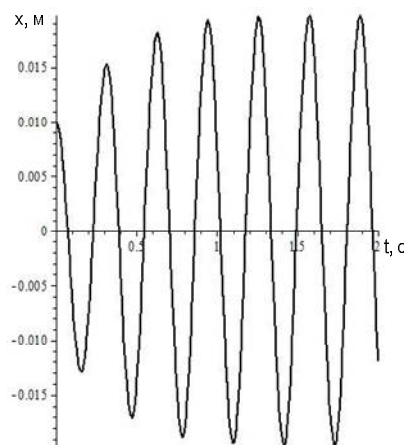


Рис. 7 – Перехідний режим коливань при  $a_0 = 0,01 \text{ м} < a_*$ .

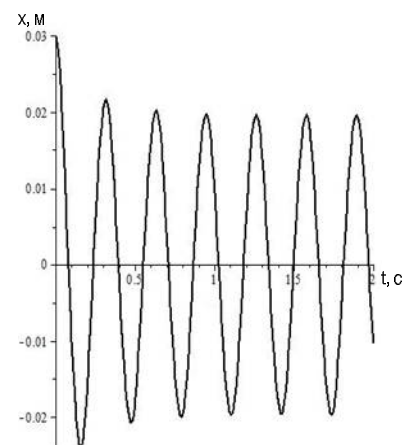


Рис. 8 – Перехідний режим коливань при  $a_0 = 0,03 \text{ м} > a_*$ .

**Приклад.** Для проведення розрахунків приймаємо:  $m = 2 \text{ кг}$ ;  $c = 800 \text{ Н/м}$ ;  $\mu = 0,6$ ;  $\nu = 2,6$ ;  $k_1 = 5 \text{ Н(с/м)}^{0,6}$ ;  $k_2 = 45 \text{ Н(с/м)}^{2,6}$ . При таких вихідних даних:

$$\omega = 20 \text{ c}^{-1}; \quad \Gamma\left(\frac{\mu+2}{2}\right) = 0,897471; \quad \Gamma\left(\frac{\mu+3}{2}\right) = 0,931384; \quad \Gamma\left(\frac{\nu+2}{2}\right) = 1,166712; \quad \Gamma\left(\frac{\nu+3}{2}\right) = 1,676491;$$

$$a_* = 0,019612 \text{ м}.$$

Осцилограма усталених автоколивань, одержана чисельним інтегруванням рівняння (6) на комп'ютері, подана на рис. 6. Перехідні режими автоколивань при  $a_0 = 0,01 \text{ м}$  і  $a_0 = 0,03 \text{ м}$  подано, відповідно, на рис. 7 і рис. 8.

На рис. 7 розмахи коливань зростають, а на рис. 8 вони спадають, асимптотично прямуючи до значення  $a = a_*$ , що відповідає стійкому режиму руху.

Траєкторії руху, описані рівнянням (6) при  $\mu = 2,6$ ,  $\nu = 0,6$ ,  $k_1 = 45 \text{ Н(с/м)}^{2,6}$ ,  $k_2 = 5 \text{ Н(с/м)}^{0,6}$  та попередніх  $m$  і  $c$ , показано на рис. 9 і рис. 10. Перша траєкторія одержана чисельним інтегруванням (6) при  $a_0 = 0,01 \text{ м} < a_*$ , а друга – при  $a_0 = 0,025 \text{ м} > a_*$ . Тут вид руху залежить від початкових умов. При  $a_0 < a_*$  маємо затухання вільних коливань відносно положення  $x = 0$ , причому тривалість руху обмежена у часі. При  $a_0 > a_*$  – система втрачає стійкість. Отже, чисельний комп'ютерний аналіз підтвердив аналітичне дослідження.

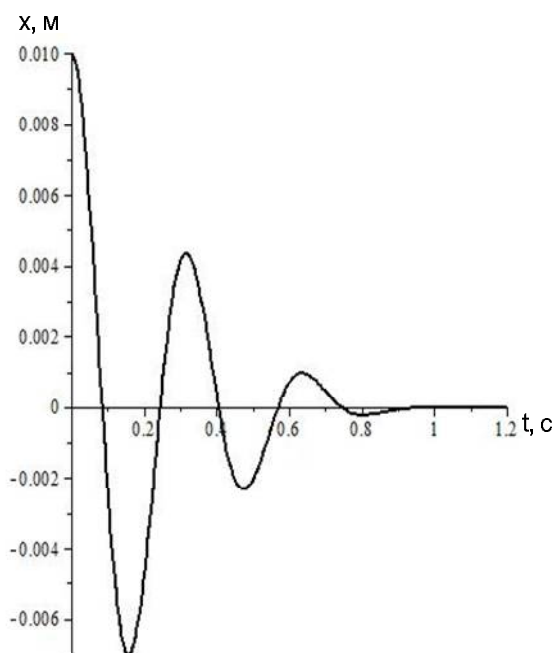


Рис. 9 – Графік затухаючих коливань при  $\mu = 2,6$ ,  $\nu = 0,6$ ,  $a_0 < a_*$ .

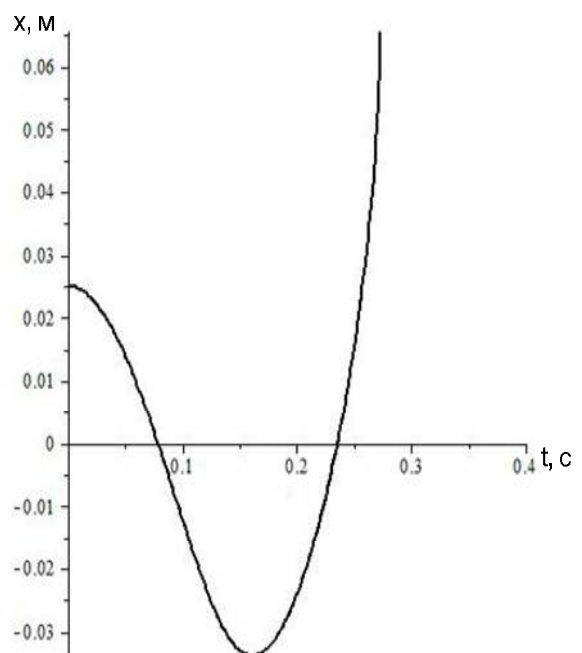


Рис. 10 – Графік втрати стійкості системи при  $\mu = 2,6$ ,  $\nu = 0,6$ ,  $a_0 > a_*$ .

3. Вплив на рух константи у виразі дисипативної сили. Позначимо константу символом  $k_0$  і розглянемо переміщення  $y(t)$ , які описує диференціальне рівняння:

$$m\ddot{y} - k_0 - \left(k_1 |\dot{y}|^\mu - k_2 |\dot{y}|^\nu\right) \text{sign}(\dot{y}) + cy = 0. \quad (9)$$

Подамо його розв'язок сумою  $y(t) = x_0 + x(t)$ , після підстановки якої в (9), отримуємо:

$$x_0 = \frac{k_0}{c}; \quad m\ddot{x} - \left(k_1 |\dot{x}|^\mu - k_2 |\dot{x}|^\nu\right) \text{sign}(\dot{x}) + cx = 0.$$

Останнє рівняння співпадає з (6), що розглянули раніше.

Отже, наявність константи у виразі сили опору не змінює умови стійкості автоколивань, а лише змінює положення, відносно якого вони проходять. Це є наслідком лінійної пружності системи.

**Перспективи подальших досліджень.** Приведений аналіз руху стосувався осциляторів з лінійною характеристикою пружності. На практиці поширені також нелінійно пружні осцилятори. Тому вважаємо перспективним узагальнення викладеного способу моделювання на нелінійно пружні коливальні системи.

**Висновки.** Дослідження показало, що за певних обмежень узагальнені рівняння Ван дер Поля і Релея можуть описувати квазілінійні автоколивання в перехідному та усталеному режимах. При порушенні вказаних обмежень узагальнені рівняння, в залежності від початкових умов, будуть описувати або вільні затухаючі коливання, або процес динамічної втрати стійкості системи, що виникає внаслідок розгойдування коливальних.

#### Список літератури

1. Ларин А. А. Очерки истории развития теории механических колебаний. – Севастополь : Вебер, 2013. – 403 с.
2. Бабаков И. М. Теория колебаний. – Москва : Дрофа, 2004. – 591 с.
3. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – Москва : Наука, 1974. – 504 с.
4. Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – Москва : Физматлит, 2001. – 576 с.
5. Василенко М. В., Алексейчук О. М. Теория колебаний и стійкості руху. – Київ : Вища школа, 2004. – 525 с.
6. Ольшанський В. П., Ольшанський С. В., Тищенко Л. М. Динаміка дисипативних осциляторів. – Харків : Міськдрук, 2016. – 264 с.
7. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям (с формулами, графиками и математическими таблицами). – М. : Наука, 1979. – 832 с.
8. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. – Москва : Наука, 1981. – 800 с.

#### References (transliterated)

1. Larin A. A. *Ocherki istorii razvitiya teorii mekhanicheskikh kolebaniy* [Essays on the history of the development of the theory of mechanical vibrations]. Sevastopol, Veber Publ., 2013. 403 p.
2. Babakov I. M. *Teoriya kolebaniy* [Theory of fluctuations]. Moscow, Drofa Publ., 2004. 591 p.
3. Bogolyubov N. N., Mitropol'skiy Yu. A. *Asimptoticheskie metody v teorii nelineynykh kolebaniy* [Asymptotic methods in the theory of nonlinear oscillations]. Moscow, Nauka Publ., 1974. 504 p.
4. Zaytsev V. F., Polyaniin A. D. *Spravochnik po obyknovennym differentsial'nyim uravneniyam* [Handbook of ordinary differential equations]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2001. 576 p.
5. Vasylenko M. V., Alekseychuk O. M. *Teoriya kolyvan' i stiykosti rukhu* [Theory of oscillations and stability of motion]. Kyiv, Vyshha shkola Publ., 2004. 525 p.
6. Ol'shans'kiy V. P., Ol'shans'kiy S. V., Tishhenko L. M. *Dynamika dysypatyvnykh ostsyl'yatoriv* [Dynamics of Dissipative Oscillators]. Kharkiv, Mis'kdruk Publ., 2016. 264 p.
7. Abramovits M., Stigan I. *Spravochnik po spetsial'nyim funktsiyam (s formulami, grafikami i matematicheskimi tablitsami)* [Handbook of special functions (with formulas, graphs and mathematical tables)]. Moscow, Nauka Publ., 1979. 832 p.
8. Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I. *Integraly i ryady. Elementarnye funktsii* [Integrals and series. Elementary functions]. Moscow, Nauka Publ., 1981. 800 p.

Надійшла (received) 09.09.2020

#### Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

**Ольшанський Василь Павлович** – доктор фізико-математичних наук, професор, Харківський національний технічний університет сільського господарства імені П. Василенка, м. Харків; тел.: (066) 010-09-55; e-mail: OlshanskiyVP@gmail.com.

**Ольшанский Василий Павлович** – доктор физико-математических наук, профессор, Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства имени П. Василенка, г. Харьков; тел.: (066) 010-09-55; e-mail: OlshanskiyVP@gmail.com.

**Olshanskiy Vasily Pavlovich** – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Petro Vasylenko Kharkiv National Technical University of Agriculture, Kharkiv; tel.: (066) 010-09-55; e-mail: OlshanskiyVP@gmail.com.

**Ольшанський Станіслав Васильович** – кандидат фізико-математичних наук, Харківський національний технічний університет сільського господарства імені П. Василенка, м. Харків; тел.: (057) 343-29-41; e-mail: stasolsh77@gmail.com.

**Ольшанский Станислав Васильевич** – кандидат физико-математических наук, Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства имени П. Василенка, г. Харьков; тел.: (057) 343-29-41; e-mail: stasolsh77@gmail.com.

**Olshanskiy Stanislav Vasilevich** – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Petro Vasylenko Kharkiv National Technical University of Agriculture, Kharkiv; tel.: (057) 343-29-41; e-mail: stasolsh77 @gmail.com.