

А. В. ВОРОПАЙ, П. А. ЕГОРОВ

УЧЁТ ВЛИЯНИЯ МАССОВО–ИНЕРЦИОННОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ ОПОРЫ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ

Исследуется нестационарное нагружение механической системы, состоящей из прямоугольной упругой изотропной пластины и дополнительной вязкоупругой опоры. Основное внимание посвящено учету массово–инерционной характеристики дополнительной вязкоупругой опоры при моделировании. В качестве основного объекта, к которому присоединена дополнительная опора, в работе рассматривается пластина средней толщины в рамках гипотез Тимошенко. Так как исследуется влияние дополнительной опоры, сама пластина для простоты ее модели имеет шарнирное опирание. Укажем, что изложенный материал применим и для других объектов, имеющих дополнительные опоры (балки, пластины и оболочки, которые могут иметь различное опирание по контуру и разные формы в плане). Нестационарное деформирование вызвано приложением к пластине внешней поперечной возмущающей нагрузки. Влияние дополнительной опоры на деформирование пластины заменяется приложением неизвестной дополнительной переменной сосредоточенной силы, которая, по сути, является реакцией взаимодействия между пластиной и дополнительной опорой. Определение этой неизвестной реакции сводится к решению интегрального уравнения Вольтерра I рода. В работе получены основные аналитические соотношения для получения интегральных уравнений или их систем, а также приведен алгоритм их решения. Описаны результаты вычислений для конкретных численных значений. Причем рассмотрено действие на пластину дополнительной вязкоупругой опоры, как без учёта, так и с учётом массово–инерционных характеристик опоры. Показано, что для малых масс влияние практически отсутствует, что может служить косвенным доказательством правильности полученной модели. В качестве главного вывода можно отметить, что массово–инерционные характеристики дополнительной вязкоупругой опоры оказывают заметное влияние на колебательный процесс, причем как на амплитудные, так и на фазовые характеристики.

Ключевые слова: нестационарные колебания, дополнительная вязкоупругая опора, массово–инерционные характеристики, прямоугольная пластина, интегральное уравнение Вольтерра.

О. В. ВОРОПАЙ, П. А. ЕГОРОВ

УРАХУВАННЯ ВПЛИВУ МАСОВО–ИНЕРЦІЙНОЇ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДОДАТКОВОЇ В'ЯЗКОУПРУГОЇ ОПОРИ ПРИ НЕСТАЦІОНАРНОМУ ДЕФОРМУВАННІ ПРЯМОКУТНОЇ ПЛАСТИНИ

Досліджується нестационарне навантаження механічної системи, що складається з прямокутної пружної ізотропної пластини і додаткової в'язкоупругої опори. Основну увагу присвячено урахуванню масово–інерційної характеристики додаткової в'язкоупругої опори при моделюванні. В якості основного об'єкта, до якого приєднана додаткова опора, в роботі розглядається пластина середньої товщини в рамках гіпотез Тимошенко. Оскільки досліджується вплив додаткової опори, сама пластина для простоти її моделі має шарнірне обпирання. Зазначимо, що викладений матеріал може бути застосований і для інших об'єктів, що мають додаткові опори (балки, пластини і оболонки, які можуть мати різне обпирання по контуру і різні форми в плані). Нестационарне деформування викликано прикладанням до пластини зовнішньої поперечної збурює навантаження. Вплив додаткової опори на деформування пластини замінюється прикладанням невідомої додаткової змінної зосередженої сили, яка, по суті, є реакцією взаємодії між пластиною і додатковою опорою. Визначення цієї невідомої реакції зводиться до розв'язання інтегрального рівняння Вольтерра I роду. В роботі отримані основні аналітичні співвідношення для отримання інтегральних рівнянь або їх систем, а також наведено алгоритм розв'язання. Описано результати обчислень для конкретних числових значень. Причому розглянуто дію на пластину додаткової в'язкоупругої опори як без урахування, так і з урахуванням масово–інерційних характеристик опори. Показано, що для малих мас вплив практично відсутній, що може бути непрямим доказом правильності отриманої моделі. В якості головного висновку можна відзначити, що масово–інерційні характеристики додаткової в'язкоупругої опори утворюють помітний вплив на коливальний процес, причому як на амплітудні так і на фазові характеристики.

Ключові слова: нестационарні коливання, додаткова в'язкоупруга опора, масово–інерційні характеристики, прямокутна пластина, інтегральне рівняння Вольтерра.

A. V. VOROPAY, P. A. YEGOROV

THE INFLUENCE OF MASS AND INERTIAL CHARACTERISTICS OF AN ADDITIONAL VISCOELASTIC SUPPORT IN THE NONSTATIONARY DEFORMING OF A RECTANGULAR PLATE

The nonstationary loading of a mechanical system consisting of a rectangular elastic isotropic plate and an additional viscoelastic support is investigated. The main attention is devoted to taking into account the mass and inertial characteristics of the additional viscoelastic support during modeling. As the main object, to which an additional support is attached, a plate of medium thickness within the framework of Timoshenko's hypotheses is considered. Since the focus of the paper is on the influence of the additional support, the plate itself is assumed to be hinged for simplicity of its model. We point out that the results presented are applicable to other objects that have additional supports (beams, plates and shells, which can have different supports along the contour and different shapes in plan). Nonstationary deformation is caused by the application of an external transverse disturbing load to the plate. The influence of the additional support on the deformation of the plate is replaced by the application of an unknown additional variable concentrated force, which, in fact, is the reaction of interaction between the plate and the additional support. The determination of this unknown reaction is reduced to solving the first kind Volterra integral equation. In this work, the main analytical relations for obtaining integral equations or their systems are derived, and an algorithm for their solving is presented. The results of calculations for specific numerical values are described. Moreover, the effect of an additional viscoelastic support on the plate is considered, both with and without taking into account the mass and inertial characteristics of the support. It is shown that for small masses the effect is practically absent, which can serve as an indirect proof of the correctness of the model obtained. As the main conclusion, it can be pointed out that the mass and inertial characteristics of the additional viscoelastic support have a noticeable effect on the vibration process, on both the amplitude and phase characteristics.

Key words: nonstationary vibrations, additional viscoelastic support, mass and inertial characteristics, rectangular plate, Volterra integral equation.

Введение и анализ литературы. В ряде случаев для повышения жесткости, прочности или несущей способности изделия в виде балок и пластин дополняют *промежуточными опорами*. В дисциплине «Сопrotивле-

ние материалов» даже используется специальный термин – *неразрезная балка*. Однако моделирование дополнительных опор, влияющих на деформирование исследуемого объекта, сопряжено с рядом идеализаций и допущений. Например, рассматривается влияние абсолютно жестких дополнительных опор или ребер жесткости.

В реальности дополнительные опоры обладают вязкоупругими свойствами (имеют вязкую и упругую составляющие), а также инерционные свойства (имеется влияние дополнительной сосредоточенной массы). Следует отметить, что при нестационарных колебаниях в динамических системах значительное влияние могут оказывать жесткости и демпфирующие свойства дополнительных опор, а также силы инерции, вызванные даже малыми массами, у которых могут быть значительные ускорения.

В области прямых задач имеются научные работы, исследования в которых касаются указанной тематики. Например, в монографии [1] рассматривается воздействие подвижной массы на балки и тонкую прямоугольную пластину, лежащую на упругом основании. Обратные задачи такого направления мало изучены.

Отметим, что к настоящему времени хорошо исследованы колебания многопролетных балок с одной или несколькими дополнительными упругими опорами. Упомянем некоторые работы такого типа, связанные с учетом дополнительных упругих опор (дополнительных сосредоточенных жесткостей) для упруго деформируемых элементов конструкций в виде балок. Например, в работе [2] рассмотрены многопролетные балки на упругих опорах при подвижной нагрузке, задачи решаются с использованием метода Ньютона и итерационных схем для определения прогиба балки с учетом жесткости дополнительных опор.

В работе [3] представлены решения прямой и обратной задач для балок с дополнительными опорами, причем влияние опор моделируется при помощи неизвестных сосредоточенных сил. Однако в указанной работе рассматривается чисто упругие дополнительные опоры.

Работ, рассматривающих элементы конструкций, контактирующих с гасителями колебаний, в рамках механики деформируемого твердого тела сравнительно мало. Упомянем некоторые работы, связанные с пластинчатыми элементами конструкций. В работе [4] рассмотрен активный гаситель колебаний для изгибающейся пластинки, который контактирует с ней по границе, однако сама пластина представлена, по сути, в виде колеблющейся массы. В работе [5] рассматриваются вынужденные колебания тонкой пластины с *дискретным динамическим гасителем* с использованием метода конечных элементов.

В настоящей работе излагается подход, позволяющий учитывать влияние дополнительных опор на нестационарное деформирование элементов конструкции путем введения в исходные модели деформирования балок (пластин) дополнительных нестационарных сил (реакций). Эти неизвестные нестационарные нагрузки могут быть определены из соответствующих интегральных соотношений, путем сведения их к линейным интегральным уравнениям Вольтерра или их системам, что позволяет получать аналитико-численные решения без использования итерационных схем.

Укажем, что настоящая работа является логическим продолжением работ [6 – 7], но в настоящей работе рассматривается влияние дополнительной опоры, в которой кроме вязкой и упругой характеристик учитывается ещё и инерционная составляющая.

Постановка задачи и математическая модель. Нестационарное деформирование балок или пластин описывается системами дифференциальных уравнений в частных производных. Опыт показывает, что для указанных объектов хорошие результаты дают модели на базе *гипотез С. П. Тимошенко*, учитывающие инерцию вращения и сдвиг [8 – 9]. Такие системы уравнений могут быть решены при помощи разложения искомых функций (перемещений и углов поворота) в соответствующие ряды (*Фурье, Бесселя* и т.п.) [10]. Тогда для коэффициентов разложения, как функций времени, можно записать систему обыкновенных дифференциальных уравнений, которые могут быть решены с использованием, например, *интегрального преобразования Лапласа* [11]. В этом случае, при выполнении обратных преобразований, решения могут быть представлены в виде интегралов типа свёртки, что позволяет выделить аналитические выражения для ядер интегральных уравнений.

Таким образом, для искомых функций перемещений и углов поворота нормали, а также деформаций могут быть получены выражения вида:

$$w_j(t) = \sum_{i=1}^N \int_0^t K_{ij}(t-\tau) \cdot P_i(\tau) d\tau; \quad (1)$$

где $w_j(t)$ – изменение во времени компоненты перемещения некоторой точки (например, прогиба пластины); $P_i(t)$ – i -я нагрузка ($P_{0i}(t)$ – внешняя сила, или $R_i(t)$ – реакция на моделируемую особенность, например, дополнительную опору); $K_{ij}(t)$ – ядро соответствующего *свёрточного интеграла* для i -ой нагрузки в j -й точке.

При нестационарном деформировании балок или пластин с особенностями для каждой моделируемой особенности (объекта, контактирующего с балкой или пластиной) можно записать выражение вида (1). То есть для N -объектов можно записать систему из N интегральных уравнений, которая будет иметь $2 \cdot N$ неизвестных (неизвестны как функции перемещения $w_j(t)$, так и $R_i(t)$ – реакции). Для решения такой системы интегральных уравнений необходимо записать дополнительные (замыкающие) соотношения для каждой из точек, в которой

имеется особенность.

В общем случае можно представить моделируемый объект в виде комбинации наличия влияния массы, жесткости и демпфирования (рис. 1).

Выражение для учета реакции между пластиной и дополнительной вязкоупругой опорой с учетом инерционных эффектов:

$$R_i(t) = m_i \frac{d^2 w_i(t)}{dt^2} + \kappa_i \frac{dw_i(t)}{dt} + c_i w_i(t). \quad (2)$$

Приведем для рассматриваемого случая (как наиболее общего) подробную методику получения выражения для функции прогибов в соответствующей точке.

Выполним для выражения (2) интегральное преобразование Лапласа, при нулевых начальных условиях получим формулу:

$$R_i(s) = m_i \cdot s^2 \cdot w_i(s) + \kappa_i \cdot s \cdot w_i(s) + c_i \cdot w_i(s). \quad (3)$$

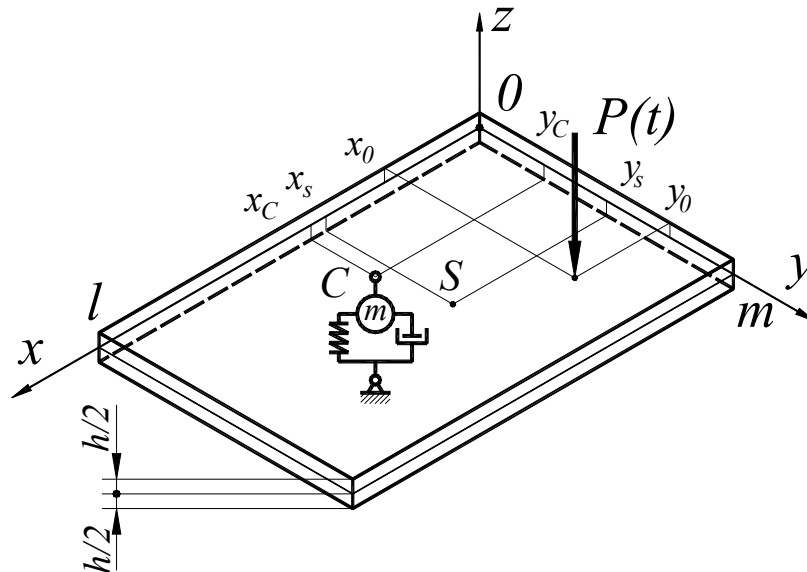


Рис. 1 – Пластина и дополнительная вязкоупругая опора, с учетом ее массово-инерционных характеристик.

Из (3) получим выражение для прогиба в пространстве изображений:

$$w_i(s) = \frac{R_i(s)}{m_i \cdot s^2 + \kappa_i \cdot s + c_i}. \quad (4)$$

После выполнения обратного преобразования Лапласа с использованием теоремы о свёртке получим следующее выражение для прогиба в точке приложения реакции на вязкоупругую опору с учетом её массы:

$$w_i(t) = \int_0^t K_{fi}(t-\tau) R(\tau) d\tau, \quad (5)$$

где $K_{fi}(t) = \frac{1}{m_i} \frac{1}{\omega_{CDi}} \cdot e^{-\frac{\kappa_i}{2m_i} t} \cdot \sin(\omega_{CDi} \cdot t)$ – конечно-разностное ядро интеграла типа свёртки, учитывающее вязкие, упругие и массово-инерционные характеристики дополнительной опоры в i -й точке, а $\omega_{CDi} = \sqrt{c_i/m_i - 0.25 \cdot \kappa_i^2/m_i^2}$ – собственная частота, соответствующая i -й дополнительной вязкоупругой опоре с учетом её массы.

Описание решения задачи. Система интегральных соотношений вида (1), дополненная выражениями (5) для каждой дополнительной опоры, решается согласно следующему алгоритму.

1) Выполняется исключение неизвестных функций перемещений $w_i(t)$, путем приравнивания соответствующих выражений вида (1) и (5), например, для одной вязкоупругой опоры с учетом ее инерционных характеристик (массы):

$$\int_0^t K_P^W(t-\tau) P_0(\tau) d\tau - \int_0^t K_R^W(t-\tau) R(\tau) d\tau = \int_0^t K_f(t-\tau) R(\tau) d\tau. \quad (6)$$

Выражение (6) после переноса известных слагаемых в правую часть уравнения, а неизвестных в левую примет вид:

$$\int_0^t \left[K_R^W(t-\tau) + K_f(t-\tau) \right] R(\tau) d\tau = \int_0^t K_P^W(t-\tau) P_0(\tau) d\tau. \quad (7)$$

В итоге в общем случае исходная система, состоящая из $2 \cdot N$ интегро-дифференциальных соотношений, сводится к системе N интегральных уравнений Вольтерра относительно неизвестных реакций $R_i(t)$. В приведенном примере для модели одной реальной опоры задача сведется к одному интегральному уравнению Вольтерра 1-рода (7).

2) Выполняется дискретизация системы интегральных уравнений (СИУ). После дискретизации каждое интегральное уравнение заменяется системой линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). В результате чего, для рассматриваемого примера (7) его дискретный аналог можно записать в виде:

$$\mathbf{A}_R^* \mathbf{R} = \mathbf{w}_P, \quad (8)$$

где вектор \mathbf{R} соответствует изменению во времени реакции $R(t)$, \mathbf{w}_P – изменение перемещения во времени в точке присоединения дополнительной опоры, вызванное только внешней силой $P_0(t)$, определяемое как

$$w_{Pi} = \int_0^t K_P^W(t-\tau) P_0(\tau) d\tau.$$

3) Решается СЛАУ вида (8). В прямой задаче, при условии, что внешняя сила $P_0(t)$ известна, СЛАУ (8) решается любым удобным методом (матрица \mathbf{A}_R^* «хорошо» обращается).

В случае, если решается обратная задача (внешняя сила $P_0(t)$ неизвестна) или к пластине присоединено несколько дополнительных опор, задача сводится к блочной СЛАУ и решается при помощи *обобщенного алгоритма Крамера* или *Гаусса* [12] с использованием регуляризирующего алгоритма *А. Н. Тихонова* [13].

Если к пластине присоединено несколько дополнительных опор, в результате решения блочной СЛАУ определяются неизвестные зависимости во времени реакций $R_j(t)$, каждая из которых описывает влияние присоединённой в соответствующей точке дополнительной опоры на нестационарные колебания (деформирование) основного рассматриваемого объекта (балки или пластины). Зная внешнее нагружение и зависимости $R_j(t)$, можно определить все компоненты перемещения в любой требуемой точке исследуемого объекта на базе зависимостей вида (1).

Вычислительный эксперимент. В работе рассматривается конкретный пример моделирования нестационарных поперечных колебаний прямоугольной пластины средней толщины. Для простоты прямоугольная пластина имеет шарнирное опирание по контуру и только одну дополнительную опору (приложенную к нижней лицевой поверхности пластины в произвольной точке, не принадлежащей контуру опирания). В качестве дополнительной опоры исследуется наиболее реалистичная модель, учитывающая упругие, вязкие, а также различные массово-инерционные характеристики, которые варьируются в ходе вычислительного эксперимента. Для удобства сравнения и анализа влияния массы параметры для расчетов были приняты как в работе [7].

При расчетах срединная плоскость пластины была связана с плоскостью xOy декартовой системы координат. Вычисления производились при следующих значениях параметров: $\rho = 7890 \text{ кг/м}^3$; $\nu = 0.3$; $T = 2.07 \cdot 10^{11} \text{ Па}$ (значения механических констант для пластины соответствуют легированной стали); $h = 0.04 \text{ м}$; $l = 0.6 \text{ м}$; $m = 0.4 \text{ м}$. Координаты точки приложения возмущающей нагрузки имеют значения: $x_0 = 0.4 \text{ м}$; $y_0 = 0.2 \text{ м}$. Координаты точки крепления дополнительной вязкоупругой опоры к пластине: $x_C = 0.2 \text{ м}$; $y_C = 0.2 \text{ м}$. Координаты точки, в которой исследовалось изменение прогиба пластины во времени (центр пластины): $x_S = 0.3 \text{ м}$; $y_S = 0.2 \text{ м}$. Значение коэффициента жесткости дополнительной опоры $c_1 = 10^8 \text{ Н/м}$, а коэффициент линейно-вязкого демпфирования $\kappa_1 = 4 \cdot 10^4 \text{ Н/(м/с)}$; число членов в соответствующих двойных рядах Фурье 50×50 .

Общий вид рассмотренной при расчетах геометрии показан на рис. 2. На рис. 3 показана внешняя возмущающая сила, которая вызывает деформирование (нестационарные колебания) прямоугольной пластины с дополнительной опорой.

При вычислениях рассматривалось 3 случая.

1) Величина массово-инерционной характеристики дополнительной опоры минимально допустимая, так как в случае, если масса будет меньше $m_{\min} = \kappa_1 / 4 \cdot c_1$, собственная частота, соответствующая дополнительной вязкоупругой опоре, с учетом её массы $\omega_{CDi} = \sqrt{c_i / m_i - 0.25 \cdot \kappa_i^2 / m_i^2}$ станет комплексной. Для принятых значений параметров (c_1, κ_1) $m_{\min} = 0.25 \text{ кг}$. При расчётах было принято значение $m_1 = 0.251 \text{ кг}$. Этот случай использовался для сопоставления результатов вычисления реакции вязкоупругой опоры и опоры с учётом всех трёх параметров (m_1, c_1, κ_1).

2) Величина массово-инерционной характеристики дополнительной опоры $m_1 = 5$ кг. Относительно реалистичный вариант, с учётом принятых расчётных параметров.

3) Величина массово-инерционной характеристики дополнительной опоры $m_1 = 20$ кг. Относительно большее значение массы для более яркой выраженности изменения реакции дополнительной опоры.

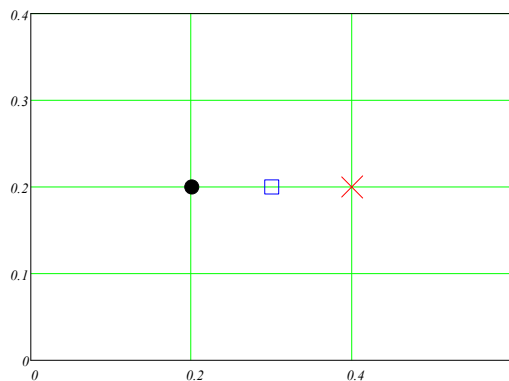


Рис. 2 – Схема нагружения пластины в плане:
 × – точка приложения возмущающей нагрузки;
 • – точка присоединения дополнительной опоры;
 □ – точка установки датчика прогиба.

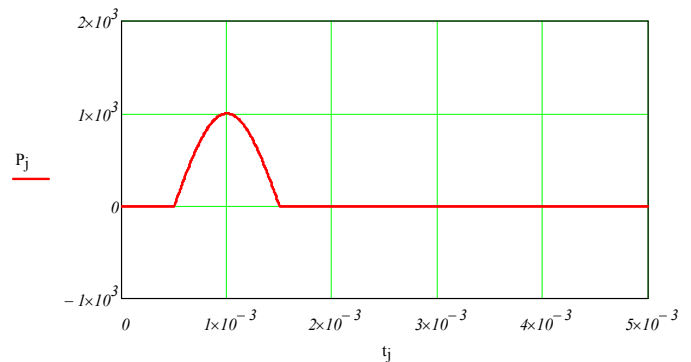


Рис. 3 – Изменение возмущающей нагрузки во времени:
 по оси абсцисс – время в секундах;
 по оси ординат – сила в Ньютонах.

На рис. 4 – 6 показаны результаты вычислений для 1-го случая с учётом массы $m_1 = 0.251$ кг и для вязкоупругой опоры без учета её массы, согласно методики описанной в работах [6 – 7].

Укажем, что на рис. 4 и рис. 5 приведены идентичные графики определенных в результате решения СЛАУ вида (8) реакций вязкоупругой опоры $R_e(t)$ (без учёта массы) и $R_f(t)$ (с учётом влияния массово-инерционной характеристики). Только на рис. 4 для оценки величины также показана внешняя возмущающая сила $P_0(t)$, а на рис. 5 – исключительно реакции $R_e(t)$ и $R_f(t)$, что позволяет заметить небольшое отличие между ними, вызванное учётом небольшой массы. Можно отметить небольшое уменьшение реакции между пластиной и дополнительной опорой, вызванное наличием небольшой массы (инерционными характеристиками дополнительной опоры).

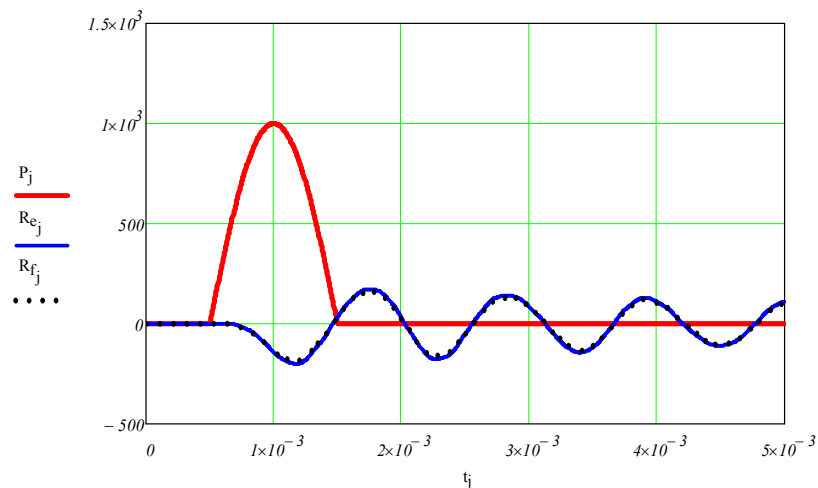


Рис. 4 – Изменение во времени возмущающей нагрузки и реакций между пластиной и дополнительной опорой.

На рис. 6 показано изменение прогиба в точке (x_S, y_S) (в данном расчёте, соответствующей геометрическому центру пластины). Показано 3 кривых: $w_{PS}(t)$ – изменение прогиба пластины, вызванное только возмущающей силой; $w_{\Sigma Se}(t)$ – изменение прогиба, вызванное совместным действием возмущающей силы $P_0(t)$ и реакций вязкоупругой опоры $R_e(t)$ (без учёта массы); $w_{\Sigma Sf}(t)$ – изменение прогиба, вызванное действием силы $P_0(t)$ и реакций $R_f(t)$ (учитывающей массу). Из анализа рис. 6 видно, что, несмотря на небольшое отличие реакций $R_e(t)$ и $R_f(t)$, прогибы в исследуемой точке практически не отличаются. Это обусловлено малой величиной массы, а также тем, что исследуемая точка не находится в непосредственной близости от дополнительной опоры (она находится на некотором расстоянии, в описанном расчёте расстояние равно 0,1 м).

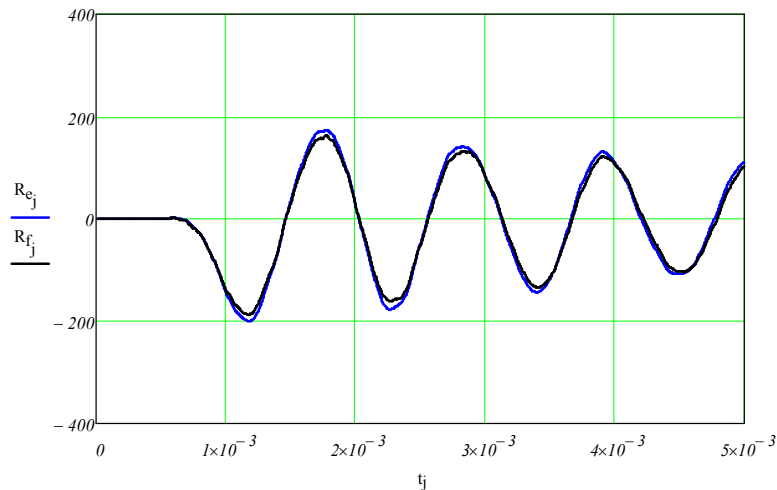


Рис. 5 – Отличия реакций дополнительной вязкоупругой опоры с учётом массы – $R_f(t)$ и без её учёта – $R_e(t)$.

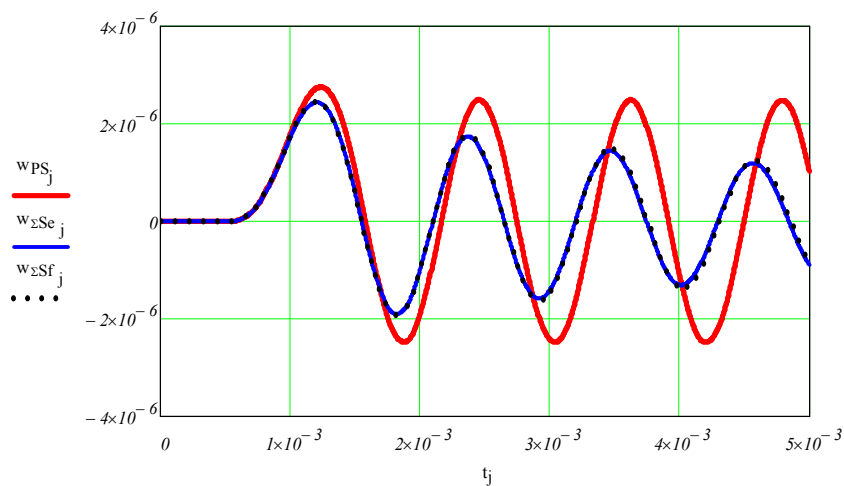


Рис. 6 – Изменение прогибов в центре пластины:
по оси абсцисс – время в секундах; по оси ординат – величина прогиба пластины в метрах.

На рис. 7 – 9 показаны результаты вычислений для 2-го случая с учётом массы $m_1 = 5$ кг. Описание этих рисунков полностью аналогично описанию рис. 4 – 6, отличается только масса.

На рис. 10 – 12 показаны результаты вычислений для 3-го случая с учётом массы $m_1 = 20$ кг (относительно большого значение массы). Описание рис. 10 – 12 аналогично описанию рис. 4 – 6 и 7 – 9.

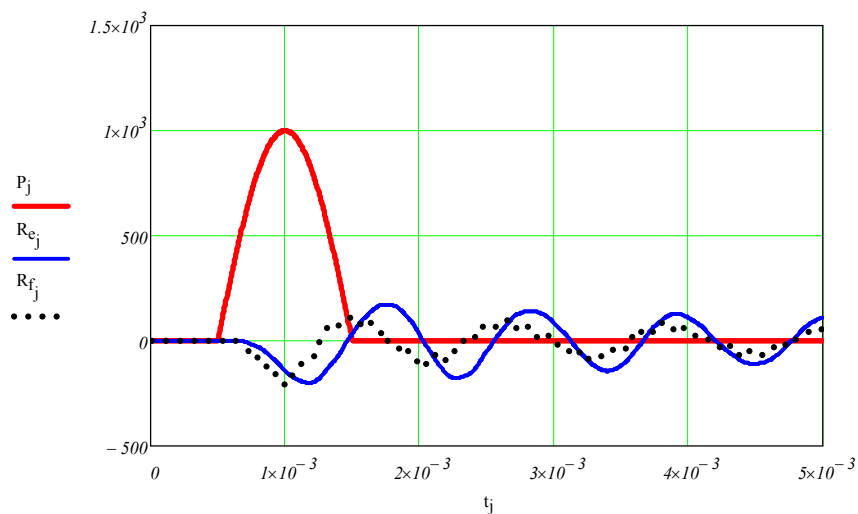


Рис. 7 – Изменение во времени возмущающей нагрузки и реакций между пластиной и дополнительной опорой.

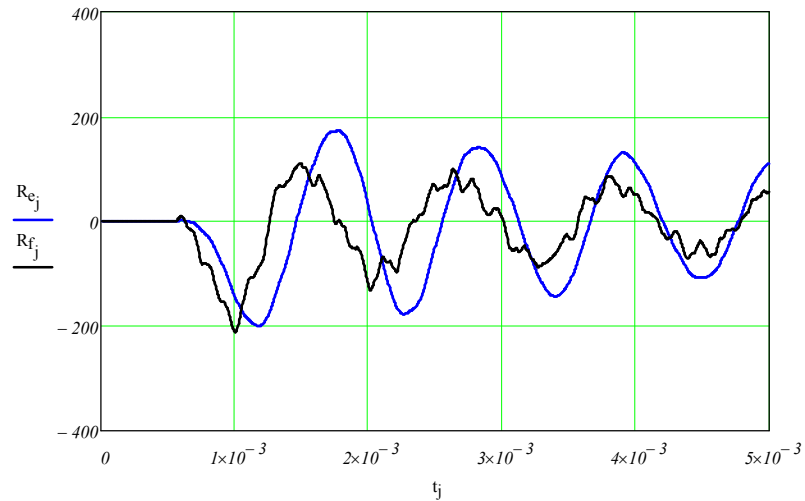


Рис. 8 – Отличия реакций дополнительной вязкоупругой опоры с учётом массы – $R_f(t)$ и без её учёта – $R_e(t)$.

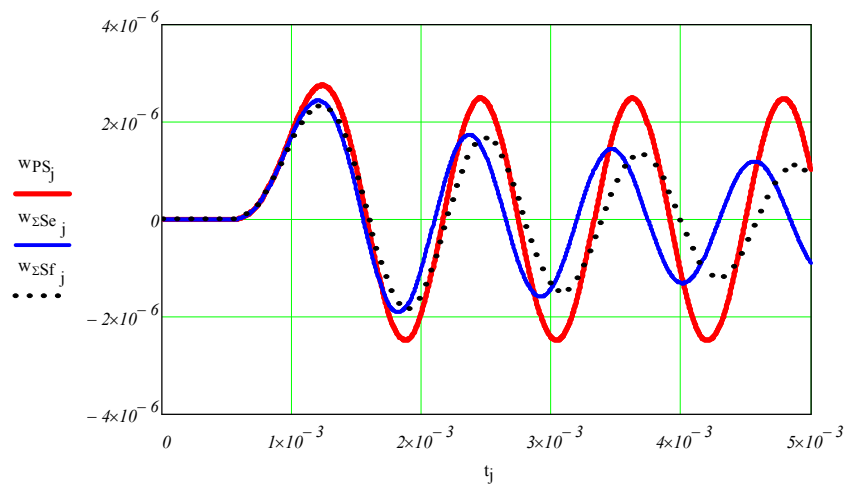


Рис. 9 – Изменение прогибов в центре пластины.

Проанализировав результаты, показанные на рис. 7 – 9 для 2-го случая с учётом реалистичных значений массово инерционных характеристик дополнительной опоры ($m_1 = 5$ кг), можно отметить некоторые изменения амплитудных характеристик, обусловленных величиной массы, и что самое главное – фазовый сдвиг (смещение экстремумов по временной оси).

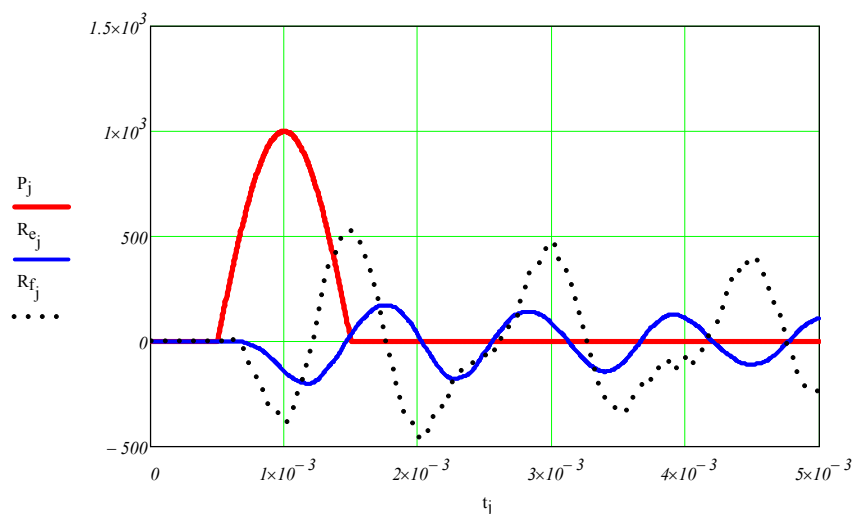


Рис. 10 – Изменение во времени возмущающей нагрузки и реакций между пластиной и дополнительной опорой.

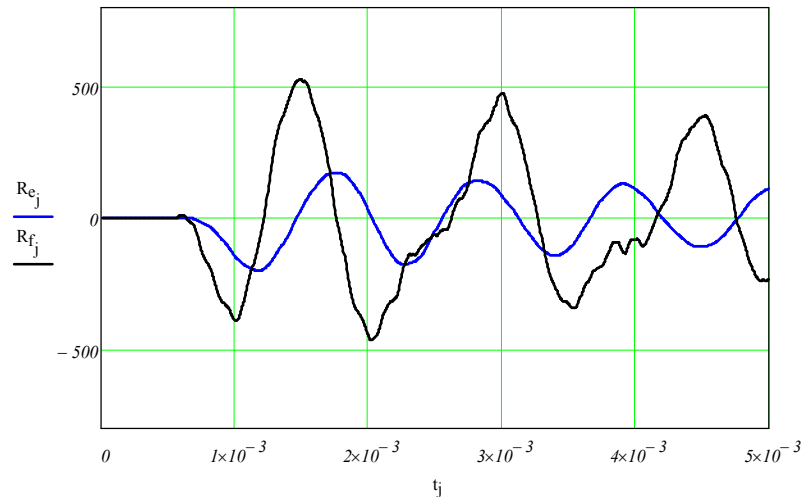


Рис. 10 – Отличия реакций дополнительной вязкоупругой опоры с учётом массы – $R_f(t)$ и без её учёта – $R_e(t)$.

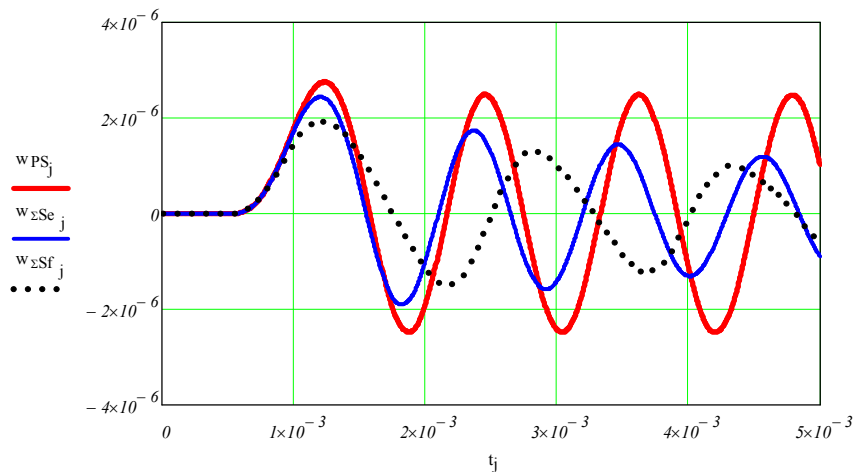


Рис. 11 – Изменение прогибов в центре пластины.

После анализа рис. 8 – 9 с учётом относительно больших значений массово инерционных характеристик дополнительной опоры (для 3-го случая, $m_1 = 20$ кг) можно отметить заметные отличия амплитудных и фазовых характеристик, обусловленных величиной массы.

Выводы. В данной работе описана методика, позволяющая учитывать влияние массово–инерционной характеристики дополнительной вязкоупругой опоры при нестационарном деформировании прямоугольной пластины. Определение неизвестной реакции сводится к решению интегрального уравнения Вольтерра I рода. В работе получены основные аналитические соотношения для получения интегральных уравнений или их систем, а также приведен алгоритм их решения.

Описаны результаты вычислений для конкретных численных значений. Проведен анализ влияния массово–инерционной характеристики дополнительной вязкоупругой на нестационарные колебания пластин. Показано, что для малых масс отличие реакции дополнительной вязкоупругой опоры с учетом её массы и без учёта массово–инерционной характеристики практически отсутствует, что может служить косвенным доказательством правильности полученной модели.

В качестве главного вывода можно отметить, что массово–инерционные характеристики дополнительной вязкоупругой опоры оказывают заметное влияние на колебательный процесс, причем как на амплитудные, так и на фазовые характеристики. Соответственно для получения более достоверных результатов расчётов при исследовании нестационарных колебаний реальных конструкций, имеющих дополнительные вязкоупругие опоры, следует учитывать их массы.

Список литературы

1. Кохманюк С. С., Янютин Е. Г., Романенко Л. Г. Колебания деформируемых систем при импульсных и подвижных нагрузках. – Киев : Наукова думка, 1980. – 232 с.
2. Кохманюк С. С., Филиппов А. П. Колебания многопролетных балок на упругих опорах при подвижной нагрузке // Строительная механика и расчет сооружений. – 1965. – № 6. – С. 32 – 36.

3. Янютін С. Г., Гнатенко Г. О., Гришакін В. Т. Розв'язання нестационарних прямих та обернених задач для балок з пружним додатковим спіранням // *Машинознавство*. – 2007. – № 8. – С. 18 – 23.
4. Wu S. T., Chen J. Y., Yeh Y. C., Chiu Y. Y. An active vibration absorber for a flexible plate boundary-controlled by a linear motor // *Journal of Sound & Vibration*. – 2007. – № 300(1–2). – P. 250–264. doi: 10.1016/j.jsv.2006.08.015.
5. Ranjan V., Ghosh M. K. Forced vibration response of thin plate with attached discrete dynamic absorbers // *Journal of Thin-Walled Structures*. – 2005. – Vol. 43. – P. 1513–1533. doi: 10.1016/j.tws.2005.07.001.
6. Воронай А. В. Обратная задача при нестационарном деформировании прямоугольной пластины с дополнительной вязкоупругой опорой // *Вестник НТУ «ХПИ»*. Серия: Динамика и прочность машин. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2015. – № 57 (1166). – С. 25–29.
7. Воронай А. В. Распределение вязкой и упругой составляющих в реакции дополнительной вязкоупругой опоры, контактирующей с пластиной // *Вісник НТУ «ХПІ»*. Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2016. – №16 (1188). – С. 16–22.
8. Григолюк Э. И., Селезов И. Т. Механика твердых деформируемых тел. Т. 5. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. – Москва: ВИНТИ, 1973. – 272 с.
9. Филиппов А. П. Колебания деформируемых систем. – Москва: Машиностроение, 1970. – 736 с.
10. Янютин Е. Г., Янчевский И. В., Воронай А. В., Шарпата А. С. Задачи импульсного деформирования элементов конструкций. Монография. – Харьков: ХНАДУ, 2004. – 392 с.
11. Диткин В. А., Прудников А. П. Операционное исчисление. – Москва: Высшая школа, 1966. – 405 с.
12. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. – Москва: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит.-ры, 1967. – 576 с.
13. Тихонов А. Н., Гончаровский А. В., Степанов В. В., Ягола А. Г. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. – Москва: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983. – 200 с.

References (transliterated)

1. Kokhmanyuk S. S., Yanyutin Ye. G., Romanenko L. G. *Kolebaniya deformiruemyykh system pri impul'snykh i podvizhnykh zagrulkakh* [Vibration of deformable systems under pulse and travelling loading]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 1980. 232 p.
2. Kokhmanyuk S. S., Filippov A. P. *Kolebaniya mnogoproyetnykh balok na uprugikh oporakh pri podvizhnoy nagruzke* [Vibrations of multispan beams on elastic support under travelling loading]. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy* [Structural mechanics and computation of structures]. 1965, no. 6, pp. 32–36.
3. Yanyutin Ye. G., Gnatenko G. O., Gryshakin V. T. *Rozv'yazannya nestatsionarnykh pryamykh ta obrnennykh zadach dlya balok z pruzhnim dodatkovym spyrannyam* [Solving nonstationary direct and inverse problems for beams with additional elastic support]. *Mashynoznavstvo* [Mechanical Engineering]. 2007, no. 8, pp. 18–23.
4. Wu S. T., Chen J. Y., Yeh Y. C., Chiu Y. Y. An active vibration absorber for a flexible plate boundary-controlled by a linear motor. *Journal of Sound & Vibration*. 2007, no. 300(1–2), pp. 250–264. doi: 10.1016/j.jsv.2006.08.015
5. Ranjan V., Ghosh M. K. Forced vibration response of thin plate with attached discrete dynamic absorbers. *Journal of Thin-Walled Structures*. 2005, vol. 43, pp. 1513–1533. doi: 10.1016/j.tws.2005.07.001
6. Voropay A. V. *Obrotnaya zadacha pri nestatsionarnom deformirovanii pryamougol'noy plastyny s dopolnitel'noy vyazkoprugoy oporoy* [Inverse problem in nonstationary deforming of rectangular plate with additional viscoelastic support]. *Vestnik NTU "KhPI". Seriya: Dinamika i prochnost' mashin* [Bulletin of the NTU "KhPI". Series: Dynamics and strength of machines]. Kharkov, NTU «KhPI» Publ., 2015, no. 57 (1166), pp. 25–29.
7. Voropay A. V. *Raspredelenie vyazkoy i uprugoy sostavlyayushchikh v reaktzii dopolnitel'noy vyazkoprugoy opory, kontaktiruyushhey s plastynoy* [Distribution of viscous and elastic components of the reaction of additional viscoelastic support in contact with plate]. *Visnyk Natsional'noho tekhnichnoho universytetu «KhPI»*. Seriya: *Matematichne modelyuvannya v tekhnosti ta tekhnologiyakh* [Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series: Mathematical modeling in engineering and technology]. Kharkiv, NTU "KhPI" Publ., 2016, no. 16 (1188), pp. 16–22.
8. Grigolyuk Eh. I., Selezov I. T. *Mekhanika tverdykh deformiruemyykh tel. T. 5. Neklassicheskiye teorii kolebaniy stержней, plastin i obolochek* [Mechanics of deformable solids. Vol. 5. Non-classical theory of oscillations of rods, plates, and shells]. Moscow, VINITI Publ., 1973. 272 p.
9. Filippov A. P., Kokhmanyuk S. S., Yanyutin Ye. G. *Deformirovaniye ehlementov konstruksiy pod deystviem udarnykh i impul'snykh nagruzok* [Deformation of structural elements under the action of impact and pulse loads]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 1978. 184 p.
10. Yanyutin Ye. G., Yanchevskiy I. V., Voropay A. V., Sharapata A. S. *Zadachi impul'snogo deformirovaniya ehlementov konstruksiy. Monografiya* [Problems of pulsed deformation of structural elements. Monograph]. Kharkov KhNADU Publ., 2004. 392 p.
11. Ditkin V. A., Prudnikov A. P. *Operatsionnoe ischislenie* [Operational calculus]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1966. 405 p.
12. Gantmakher F. R. *Teoriya matrits* [Matrix theory]. Moscow, Nauka. Gl. red. fiz.-mat. lit.-ry Publ., 1967. 576 p.
13. Tikhonov A. N., Goncharskiy A. V., Stepanov V. V., Yagola A. G. *Regulyariziruyushhie algoritmy i apriornaya informatsiya* [Regularization algorithms and a priori information]. Moscow, Nauka Publ., 1983. 200 p.

Поступила (received) 03.12.2020

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Воронай Олексій Валерійович – доктор технічних наук, доцент, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, м. Харків; тел.: (050) 524-92-54; e-mail: voropay.alexey@gmail.com.

Воронай Алексей Валериевич – доктор технических наук, доцент, Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет, г. Харьков; тел.: (050) 524-92-54; e-mail: voropay.alexey@gmail.com.

Voropay Alexey Valerievich – Doctor of Engineering Sciences, Associate Professor, Kharkov National Automobile and Highway University, Kharkiv; tel.: (050) 524-92-54; e-mail: voropay.alexey@gmail.com.

Егоров Павло Анатолійович – кандидат технічних наук, доцент, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, м. Харків; тел.: (066) 225-33-51; e-mail: egorovpa@online.com.

Егоров Павел Анатольевич – кандидат технических наук, доцент, Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет, г. Харьков; тел.: (066) 225-33-51; e-mail: egorovpa@online.com.

Yegorov Pavel Anatoliyevich – Sciences Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Kharkov National Automobile and Highway University, Kharkiv; tel.: (066) 225-33-51; e-mail: egorovpa@online.com.