УДК 517.5

doi: 10.20998/2222-0631.2020.1.09

В. П. ОЛЬШАНСЬКИЙ

ПРО АПРОКСИМАЦІЮ ФУНКЦІЇ ЛАМБЕРТА

Виведено компактні формули для обчислення значень функції Ламберта на певних проміжках її області визначення. Це досягнуто заміною трансцендентних рівнянь на відповідні алгебраїчні (квадраті та кубічні), за умови малої зміни їх коренів при переході від одних видів рівнянь до інших. У побудові апроксимацій задіяна формула Шенкса, що наближено виражає суму повільно збіжного степеневого ряду. Порівняння наближених значень функції Ламберта з точними її значеннями показало, що похибка запропонованих апроксимацій на виділених проміжках аргументів менша за 0,5 %. Проміжки охоплюють не тільки великі, а і малі та від'ємні значення аргументу, де функція двохзначна. Апроксимація стосується обох гілок функції.

Ключові слова: функція Ламберта, апроксимація елементарними функціями, формула Шенкса.

В. П. ОЛЬШАНСКИЙ

ОБ АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИИ ЛАМБЕРТА

Выведены компактные формулы для вычисления значений функции Ламберта на некоторых промежутках ее области определения. Это достигнуто заменой трансцендентных уравнений на соответствующие алгебраические (квадратные и кубические), при условии малого изменения их корней при переходе от одних видов уравнений к другим. В построении аппроксимаций задействована формула Шенкса, которая приближенно выражает сумму медленно сходящегося степенного ряда. Сравнение приближенно вычисленных значений функции Ламберта с точными ее значениями показало, что погрешность предложенных аппроксимаций на выделенных промежутках аргументов меньше 0,5 %. Промежутки охватывают не только большие, но и малые, а также отрицательные значения аргумента, где функция двухзначная. Аппроксимация касается обеих ветвей функции.

Ключевые слова: функция Ламберта, аппроксимация элементарными функциями, формула Шенкса.

V. P. OLSHANSKIY

ON THE APPROXIMATION OF THE LAMBERT FUNCTION

Compact formulas are derived for calculating the values of the Lambert function on some intervals of its domain. This is achieved by replacing the transcendental equations by the corresponding algebraic (square and cubic) equations, provided that their roots change little when passing from one type of the equation to another. In the construction of approximations, the Shanks formula is used, which approximately expresses the sum of a slowly converging power series. A comparison of the approximately calculated values of the Lambert function with its exact values showed that the error of the proposed approximations on the selected intervals of the arguments is less than 0.5 %. The gaps cover not only large, but also small, as well as negative values of the argument, where the function is two-valued. The approximation applies to both branches of the function.

Key words: Lambert function, approximation by elementary functions, Shanks formula.

Вступ. *Функція Ламберта* була відома ще з часів *Л. Ейлера*, але на неї довго не звертали уваги. Як окрема спеціальна функція вона з'явилась в системі комп'ютерного забезпечення *Maple* в 80-роках минулого століття і була названа *Lambert W*. Її використання дає можливість розв'язати аналітично деякі *трансцендентні рівняння*.

Огляд останніх публікацій і постановка мети дослідження. Функція Ламберта поширена в сучасних дослідженнях з фізики і механіки. В роботі [1] вона задіяна для опису нових *форм ентропії*. В публікаціях [2, 3] її використали при аналітичному розв'язанні задач балістики матеріальної точки в середовищі з опором. В статті [4] цю функцію задіяли для розрахунку амплітуд вільних коливань осцилятора, коли сила в'язкого опору пропорційна квадрату швидкості руху. В прикладних дослідженнях функцію використовують при математичному моделюванні нерівномірного руху зернової суміші, як в'язкої рідини, по нахиленому плоскому віброрешету [5] та при розв'язуванні задачі пневмосепарування насіння повітряним потоком [6]. Останнім часом функцію Ламберта вживають також при математичному моделюванні удару в'язкопружних тіл [7 – 9]. В монографії [3] надруковані таблиці цієї спеціальної функції, що спрощує числову реалізацію відповідних аналітичних розв'язків. Асимптотичні подання функції Ламберта при великих значеннях її аргументу надруковано в [3, 10]. Тут пропонуємо інші варіанти апроксимації.

Метою статті є виведення та апробація формул для наближеного обчислення значень функції Ламберта додатного й від'ємного аргументів, з урахуванням її двозначності при від'ємних аргументах.

Апроксимація функції при близьких до нуля значеннях аргументу. Виходимо з того, що функція подається повільно збіжним степеневим рядом [1]:

$$W(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-n)^{n-1}x^{n}}{n!}, \tag{1}$$

що збігається в області $x\in\left(-\frac{1}{e};\frac{1}{e}\right]$.

Щоб одержати наближений замкнутий вираз суми $S(x)$ цього ряду, скористаємося *формулою Шенкса* [11, 12], за якою:

$$S(x) \approx S_n(x) - \frac{a_n a_{n+1}}{a_{n+1} - a_n}. \qquad (2)$$

Тут S_n – сума n членів ряду; a_n і a_{n+1} – n – й і $(n+1)$ – й його члени.

Приймемо за S_n наступну суму в (1):

$$S_n = x - x^2 + \frac{3}{2}x^3 - \frac{8}{3}x^4. \qquad (3)$$

Тоді: $a_n = -\frac{8}{3}x^4$, $a_{n+1} = \frac{125}{24}x^5$ і згідно з (2), (3):

$$W(x) = x - x^2 + \frac{3}{2}x^3 - \frac{8x^4}{3\cdot\left(1 + \frac{125}{64}x\right)}. \qquad (4)$$

Наближені значення $W(x)$, при $x > 0$, обчислені по формулі (4), записано в табл. 1, де також вказано й умовно точні значення, запозичені з таблиці 1.3 стор. 15 в [3].

Таблиця 1 – Наближені й точні значення $W(x)$

x	Формула (4)	в [3]	x	Формула (4)	в [3]
	Значення $W(x)$			Значення $W(x)$	
0,1	0,0913	0,0913	0,3	0,2369	0,2368
0,2	0,1689	0,1689	1/*e*	0,2788	0,2785

Порівняння результатів показує, що на проміжку $x \in [0, 1/e]$ похибка наближення (4) менша за 0,5 %.

Формулу (4) можна використовувати і для наближених обчислень значень першої гілки $W_1(-x)$ двохзначної функції Ламберта від'ємного аргументу. Результати підстановки від'ємних x в формулу (4) записано в табл. 2, де також вказано умовно точні значення $W_1(-x)$, запозичені в таблиці 1.1 стор. 10 в [3].

Як бачимо, на проміжку $x \in (0; 0,25)$ похибка апроксимації (4) менша за 0,5 %, але вона швидко зростає при більших x. Тому при $x \to 1/e$ потрібні інші наближення. Про одне з них піде мова далі.

Таблиця 2 – Наближені й точні значення $-W_1(-x)$

x	Формула (4)	в [3]	x	Формула (4)	в [3]
	Значення $-W_1(-x)$			Значення $-W_1(-x)$	
0,05	0,0527	0,0527	0,25	0,3563	0,3574
0,10	0,1118	0,1118	0,30	0,4827	0,4894
0,15	0,1795	0,1795	0,35	0,6633	0,7166
0,20	0,2590	0,2592	1/*e*	0,7514	1,0000

Додаткова апроксимація $W_1(-x)$ при $x \in [0,25; 1/e]$. Якщо $f = -W_1(-x)$, то має місце рівняння:

$$f\,e^{-f} = x. \qquad (5)$$

Задамо в ньому:

$$x = \frac{1}{e} - \xi; \quad f = 1 - \varepsilon; \quad \xi > 0, \quad \varepsilon > 0, \quad x \in [0,25; 1/e], \quad f > 0. \qquad (6)$$

Тоді вираз (5) отримує форму:

$$(1 - \varepsilon)e^{\varepsilon} = 1 - \xi e. \qquad (7)$$

Розгорнемо e^{ε} в степеневий ряд:

$$e^{\varepsilon} = 1 + \varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon^2 + \frac{1}{3!}\varepsilon^3 + \ldots$$

Щоб знайти наближено його суму приймемо: $S_n = 1 + \varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon^2$; $a_n = \frac{1}{2}\varepsilon^2$; $a_{n+1} = \frac{1}{6}\varepsilon^3$. Тоді, за формулою Шенкса (2):

$$e^{\varepsilon} \approx 1 + \varepsilon + \frac{3\varepsilon^2}{6 - 2\varepsilon} = \frac{\varepsilon^2 + 4\varepsilon + 6}{6 - 2\varepsilon}. \qquad (8)$$

Підставивши (8) в (7), приходимо до кубічного рівняння:

$$\varepsilon^3 + 3\varepsilon^2 + 2e\xi\,\varepsilon - 6e\,\xi = 0 .$$

Воно має розв’язок:

$$\varepsilon = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\alpha}{3} - 1, \qquad (9)$$

де $p = 2e\xi - 3$; $q = 2 - 8e\xi$; $\alpha = \arccos\left(-\frac{q}{2\sqrt{-\left(p/3\right)^3}}\right)$.

Враховуючи (6) і (9), одержуємо наступну додаткову апроксимацію:

$$W_1(-x) \approx 2\left(\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\alpha}{3} - 1\right), \qquad (10)$$

в якій $\xi = \frac{1}{e} - x$.

Про похибки наближення (10) надана інформація в табл. 3.

Таблиця 3 – Наближені та точні значення $-W_1(-x)$ при $x \ge 0,25$

x	Формула (4)	в [3]	Похибка %
	Значення $-W_1(-x)$		
0,250	0,3562	0,3574	0,34
0,300	0,4886	0,4894	0,16
0,350	0,7164	0,7166	0,03
0,367	0,9324	0,9324	0,00
$1/e$	1,0000	1,0000	0,00

Розрахунки показують, що похибка формули (10) невеликі. Отже, в сукупності формули (4) і (10) забезпечують апроксимацію $W_1(-x)$ в області її визначення з похибкою меншою за 0,5 %.

Апроксимація $W(x)$ при великих x. Виходимо з того, що $W(x)$ є аналітичним розв’язком рівняння:

$$\ln W + W = \ln x . \qquad (11)$$

Підстановкою $W = \ln x - y$, де $y = y(x) < \ln x$ – невідома функція, рівнянню (11) надаємо вигляд:

$$Q + \ln\left(1 - \frac{y}{P}\right) - y = 0 . \qquad (12)$$

Тут $P = \ln x$, $Q = \ln P$.

Далі використаємо ряд:

$$\ln(1-z) = -z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - \dots .$$

Обчисливши наближено його суму по формулі Шенкса, отримуємо:

$$\ln(1-z) \approx -z - \frac{3z^2}{2(3-2z)} = \frac{z^2 - 6z}{6-4z} . \qquad (13)$$

Підставивши вираз (13) в (12), приходимо до рівняння:

$$z^2(4P+1) - 2(3+3P+2Q) + 6Q = 0 .$$

Його розв’язком є:

$$z = \frac{y}{P} = \frac{3+3P+2Q}{4P+1} - \sqrt{\left(\frac{3+3P+2Q}{4P+1}\right)^2 - \frac{6Q}{4P+1}} .$$

У підсумку одержуємо апроксимацію:

$$W(x) \approx P\left[1 - \frac{3+3P+2Q}{4P+1} + \sqrt{\left(\frac{3+3P+2Q}{4P+1}\right)^2 - \frac{6Q}{4P+1}}\right]. \qquad (14)$$

Альтернативу їй знаходимо в роботі [10], де:

$$W(x) \approx P - Q + \frac{Q}{P} + \frac{Q(Q-2)}{2P^2} + \frac{Q\left(2Q^2 - 9Q + 6\right)}{6P^3} + \frac{Q\left(3Q^3 - 22Q^2 + 36Q - 12\right)}{12P^4} . \qquad (15)$$

Результати обчислень $W(x)$ за формулами (14) і (15) записано в табл. 4, де також вказано значення функції Ламберта, одержані на комп'ютері в середовищі Maple.

Таблиця 4 – Значення $W(x)$ при $x \geq 3$

x	Формула (14)	Формула (15)	Maple	x	Формула (14)	Формула (15)	Maple
	Значення $W(x)$				Значення $W(x)$		
3	1,0499	1,0297	1,0499	50	2,8607	2,8604	2,8609
4	1,2022	1,2017	1,2022	100	3,3854	3,3852	3,3856
5	1,3267	1,3333	1,3267	200	3,9296	3,9294	3,9297
10	1,7454	1,7488	1,7455	1000	5,2495	5,2495	5,2496

Порівняння показує, що виведена тут формула (14) забезпечує більш високу точність обчислень, ніж (15).

Апроксимація $W_2(-x)$ $x>0$. Це друга гілка двозначної функції Ламберта від'ємного аргументу. Якщо $f=-W_2(-x)$, то має місце рівняння:

$$f-\ln f=-\ln(x). \tag{16}$$

Функцію f подаємо сумою:

$$f=-\ln x+y(x), \tag{17}$$

де $y(x)>\ln x$.

Підстановкою (17) в (16), отримуємо рівняння:

$$T+\ln\left(1+\frac{y}{S}\right)-y=0, \tag{18}$$

в якому: $S=-\ln x$, $T=\ln S$, $x\in\left(\frac{1}{e};0\right)$.

Далі використаємо апроксимацію:

$$\ln(1+z)\approx z-\frac{3z^2}{6+4z}=\frac{z^2+6z}{6+4z}, \tag{19}$$

до якої призводить формула Шенкса (2).

Враховуючи (19), вираз (18) зводимо до квадратного рівняння:

$$z^2-2\frac{3-3S+2T}{4S-1}z-\frac{6T}{4S-1}=0,$$

що має розв'язок:

$$z=\frac{y}{S}=\frac{3-3S+2T}{4S-1}+\sqrt{\left(\frac{3-3S+2T}{4S-1}\right)^2+\frac{6T}{4S-1}}.$$

У підсумку одержуємо апроксимацію:

$$W_2(-x)\approx -S\left[1+\frac{3-3S+2T}{4S-1}+\sqrt{\left(\frac{3-3S+2T}{4S-1}\right)^2+\frac{6T}{4S-1}}\right]. \tag{20}$$

Про її похибки надана інформація в табл. 5.

Таблиця 5 – Значення $-W_2(-x)$

x	Формула (20)	в [3]	Похибка %
	Значення $-W_2(-x)$		
0,001	9,1182	9,1180	0,002
0,010	6,4732	6,4728	0,006
0,100	3,5787	3,5772	0,041
0,200	2,5448	2,5426	0,087
0,300	1,7829	1,7813	0,090
1/e	1,0000	1,0000	0,000

Як бачимо, формула (20) з малою похибкою наближає $W_2(-x)$ на всій області її визначення.

Перспективи подальших досліджень. Апроксимаційні формули (14) і (20) можна уточнити, зводячи пошук значень функції Ламберта до обчислення коренів не квадратних, а кубічних рівнянь, що потребує подальших досліджень.

Висновки. Запропоновані апроксимації доповнюють таблиці спеціальної функції Ламберта, де вона визначена для окремих значень її аргументу. Ці апроксимації мають компактну форму і дають можливість з похибкою меншою за 0,5 % обчислювати значення спеціальної функції, при числовій реалізації аналітичних розв'язків різних задач, побудованих з її використанням.

Список літератури

1. *Farial Shafee*. Lambert function and new-extensive form of entropy // IMA Journal of Applied Mathematics. – 2007. – V. 72. – P. 785 – 800.
2. *Ольшанський В. П., Ольшанський С. В.* Інверсія розв'язку Дідіона в задачі балістики матеріальної точки // Наукові вісті НТУУ «КПІ». – Київ : НТТУ «КПІ», 2013. – № 4. – С. 145 – 147.
3. *Ольшанский В. П., Ольшанский С. В.* Функция Ламберта в задачах баллистики матеральной точки. – Харьков : Издатель Савчук А. О., 2013. – 204 с.
4. *Ольшанский В. П., Ольшанский С. В.* Функция Ламберта в задаче колебаний математического маятника // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2014. – № 18 (1061). – С. 116 – 119.
5. *Тищенко Л. Н., Ольшанский В. П., Ольшанский С. В.* Виброрешетная сепарация зерновых смесей. – Харьков : Міськдрук, 2011. – 280 с.
6. *Бакум М. В., Ольшанський В. П., Крекот М. М.* Закономірності руху часток в квазігоризонтальному каналі // Вісник ХНТУСГ. Серія : Технічні науки. – Харків : ХНТУСГ, 2014. – Вип. 148. – С. 90 – 97.
7. *Дягель Р. В., Лапшин В. В.* О нелинейной вязкоупругой модели коллинеарного удара Ханта-Кроссли // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2011. – № 5. – С. 164 – 173.
8. *Боровин Г. К., Лапшин В. В.* Обобщенная модель удара Герца-Ханта-Кроссли // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Серия : Естественные науки. – 2018. – № 6. – С. 18 – 30. – DOI : 10.18698/1812-3368.
9. *Боровин Г. К., Дягель Р. В., Лапшин В. В.* Нелинейная вязкоупругая модель коллинеарного удара // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. – Москва : ИПМ, 2008. – № 53. – 18 с.
10. *Corless R. M., Gonnet G. H., Hare D. E. G.* On the Lambert W Function // Advances in Computational Math. – 1996. – V. 5. – P. 329 – 359.
11. *Ван-Дайк М.* Методы возмущений в механике жидкости. – Москва : Мир, 1967. – 310 с.
12. *Кильчевский Н. А.* Динамическое контактное сжатие твердых тел. Удар. – Киев : Наукова думка, 1976. – 319 с.

References (transliterated)

1. Farial Shafee. Lambert function and new-extensive form of entropy. *IMA Journal of Applied Mathematics*. 2007, vol. 72, pp. 785–800.
2. Ol'shans'kyy V. P., Ol'shans'kyy S. V. Inversiya rozv"yazku Didiona v zadachi balistyky material'noyi tochky [Inversion of Dedion's solution in the problem of material point ballistics]. *Naukovi visti NTUU "KPI"* [Scientific News of NTUU "KPI"]. Kyiv, NTU "KPI" Publ., 2013, no. 4, pp. 145–147.
3. Ol'shanskiy V. P., Ol'shanskiy S. V. *Funktsiya Lamberta v zadachakh ballistiki materal'noy tochki* [Lambert function in ballistics problems of a material point]. Kharkov, Izdatel' Savchuk A.O. Publ., 2013. 204 p.
4. Ol'shanskiy V. P., Ol'shanskiy S. V. Funktsiya Lamberta v zadache kolebaniy matematicheskogo mayatnika [Lambert function in the problem of oscillations of a mathematical pendulum]. *Visnyk Natsional'noho tekhnichnoho universytetu «KhPI». Seriya : Matematichne modelyuvannya v tekhnstsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series : Mathematical modeling in engineering and technology]. Kharkiv, NTU "KhPI" Publ., 2014, no. 18 (1061), pp. 116–119.
5. Tishhenko L. N., Ol'shanskiy V. P., Ol'shanskiy S. V. *Vibroreshetnaya separatsiya zernovykh smesey* [Vibro-sieve separation of grain mixtures]. Kharkov, Mis'kdruk Publ., 2011. 280 p.
6. Bakum M. V., Ol'shans'kyy V. P., Krekot M. M. Zakonomirnosti rukhu chastok v kvazigoryzontal'nomu kanali [Regularities of particle motion in a quasi-horizontal channel]. *Visnyk KhNTUSG. Seriya : Tekhnichni nauky* [Bulletin of KhNTUSG. Series : Technical Sciences]. Kharkiv, KhNTUSG Publ., 2014, no. 148, pp. 90–97.
7. Dyagel' R. V., Lapshin V. V. O nelineynoy vyazkouprugoy modeli kollinearnogo udara Khanta-Krossli [On the nonlinear viscoelastic model of a Hunt-Crossley collinear impact]. *Izvestiya RAN. Mekhanika tvyerdogo tela* [Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Solid mechanics]. 2011, no. 5, pp. 164–173.
8. Borovin G. K., Lapshin V. V. Obobshhennaya model' udara Gertsa-Khanta-Krossli [Generalized model of the Hertz-Hunt-Crossley hit]. *Vestnik MGTU im. N. E. Baumana. Seriya : Estestvennye nauki* [Herald of the Bauman Moscow State University. Series : Natural Sciences]. 2018, no. 6, pp. 18–30. DOI: 10.18698/1812-3368.
9. Borovin G. K., Dyagel' R. V., Lapshin V. V. Nelineynaya vyazkouprugaya model' kollinearnogo udara [Non-linear viscoelastic collinear impact model]. *Preprinty IPM im. M.V. Keldysha* [Preprints of the Keldysh Institute of Applied Mathematics]. Moscow, IPM Publ., 2008, no. 53, 18 p.
10. Corless R. M., Gonnet G. H., Hare D. E. G. On the Lambert W Function. *Advances in Computational Math*. 1996, vol. 5, pp. 329–359.
11. Van Dyke M. *Metody vozmushheniy v mekhanike zhidkosti* [Methods of perturbations in fluid mechanics]. Moscow, Mir Publ., 1967, 310 p.
12. Kil'chevskiy N. A. *Dinamicheskoe kontaktnoe szhatie tverdyih tel. Udar* [Dynamic contact compression of solids. Blow]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 1976, 319 p.

Надійшла (received) 16.01.2020

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Ольшанський Василь Павлович (Ольшанский Василий Павлович, Olshanskiy Vasiliy Pavlovich) – доктор фізико-математичних наук, професор, Харківський національний технічний університет сільського господарства імені П. Василенка, м. Харків; тел.: (066) 010-09-55.; e-mail: OlshanskiyVP@gmail.com.